

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES DIXMIER

Quelques résultats d'Harish-Chandra, I

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 50, p. 7-11

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__7_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES RÉSULTATS D' HARISH-CHANDRA ⁽¹⁾ , I ,

par Jacques DIXMIER.

Tous les espaces vectoriels et toutes les algèbres sont sur le corps complexe.

1. L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.

1. - Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre de Lie, T l'algèbre tensorielle de l'espace vectoriel $\mathfrak{A}$, I l'idéal bilatère de T engendré par les

$$a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 - [a_1, a_2], \quad a_1 \in \mathfrak{A}, \quad a_2 \in \mathfrak{A}.$$

Soit S le sous-espace de T formé des tenseurs symétriques. Alors, T est la somme directe de S et I (non trivial). L'application canonique de T sur $A = T/I$ applique biunivoquement S sur A . En particulier, on peut identifier désormais $\mathfrak{A} \in S$ à un sous-espace de A ; A est engendré par $\mathfrak{A}$ et 1 . D'autre par toute représentation $\mathcal{V}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}$ se prolonge de manière unique en une représentation $\mathcal{V}'$ de l'algèbre associative T , qui s'annule sur les $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 - [a_1, a_2]$, donc sur I ; alors $\mathcal{V}'$ définit par passage au quotient une représentation $\mathcal{V}'_1$ de l'algèbre associative A ; $\mathcal{V}'_1$ est la seule représentation de A prolongeant $\mathcal{V}$; réciproquement, toute représentation de l'algèbre associative A fournit, par restriction à $\mathfrak{A}$, une représentation de l'algèbre Lie $\mathfrak{A}$. L'algèbre A s'appelle l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{A}$.

2. - Sur l'espace vectoriel $\mathfrak{A}$, introduisons l'unique structure d'algèbre de Lie commutative. L'idéal I correspondant dans T est l'idéal engendré par les $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1$; nous le désignerons par I' . Alors, T est la somme directe de S et I' . Identifions S à l'algèbre commutative T/I' : S se trouve muni d'une structure multiplicative qui en fait l'algèbre symétrique de $\mathfrak{A}$ (algèbre de polynômes).

Revenons à l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}$ initiale. Soit γ la restriction à S de l'application canonique de T sur A . On a vu que γ est un isomorphisme de l'espace S sur l'espace A . Mais γ n'est pas un isomorphisme d'algèbre. On va étudier les relations entre l'algèbre S et l'algèbre A .

⁽¹⁾ HARISH-CHANDRA. - On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 28-96.

Soit S^r l'ensemble des éléments homogènes de degré r de S . On a :
 $S^r S^{r'} \subset S^{r+r'}$: S est une algèbre graduée. Soit $A^r = \gamma(S^r)$. Nous dirons que les éléments de A^r sont les éléments symétriques homogènes de degré r de A . L'espace A est la somme directe des A^r ; $A^0 = \{\lambda 1\}$, et $A^1 = \mathcal{A}$. Soit $A_r = A^0 + A^1 + \dots + A^r$. On voit aisément que A_r est l'ensemble des éléments de A qui peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de produits de r éléments de $\mathcal{A}$ au plus. Donc $A_r A_{r'} \subset A_{r+r'}$: A est une algèbre filtrée par les A_r (mais non graduée par les A^r). Un élément $a \neq 0$ de A sera dit de degré r si sa composante symétrique homogène non nulle de degré maximum est de degré r . Ainsi, γ conserve le degré.

Soient $s \in S$, $s' \in S$, avec $(\text{degré de } s) \leq r$, $(\text{degré de } s') \leq r'$. Alors, $\gamma(s)$, $\gamma(s')$ et $\gamma(ss')$ sont congrus modulo $A_{r+r'-1}$. Autre expression de ce résultat : construisons l'algèbre graduée B associée à l'algèbre filtrée A ; soit B_r l'espace A_r/A_{r-1} , et B la somme directe $B_0 + B_1 + \dots$; le produit dans A définit, par passage au quotient, une application bilinéaire de $B_r \times B_{r'}$ dans $B_{r+r'}$; d'où, par linéarité, une application bilinéaire de $B \times B$ dans B ; autrement dit, B se trouve munie d'une structure d'algèbre, graduée par les B_r . Il y a un isomorphisme canonique évident de l'espace B_r sur l'espace A^r donc sur l'espace S^r ; d'où un isomorphisme canonique de l'espace B sur l'espace S , qui est aussi un isomorphisme d'algèbres.

3. - Soient $\mathcal{G}$ une sous-algèbre de $\mathcal{A}$, G la sous-algèbre de A engendrée par $\mathcal{G}$. Soit G' l'algèbre enveloppante de $\mathcal{G}$. Il existe un homomorphisme de G' sur G tel que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(g) = g$ pour $g \in \mathcal{G}$. Soit $(g_1, g_2, \dots, g_m)$ une base de $\mathcal{A}$ telle que $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ soit une base de $\mathcal{G}$. Les $g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_r}$ (calculés dans G'), où $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ est une suite croissante (au sens large) d'entiers compris entre 1 et n , forment une base de l'espace G' , et leurs images par φ sont linéairement indépendantes ; donc φ est biunivoque. Nous identifierons désormais G' à G par l'isomorphisme φ .

Soit h une sous-algèbre de $\mathcal{A}$ telle que $a = g + h, gnh = 0$. Soit $H \subset A$ l'algèbre enveloppante de h . L'application bilinéaire $(g, h) \rightarrow gh$ de $G \times H$ dans A définit une application linéaire θ de $G \otimes H$ dans A telle que $\theta(g \otimes h) = gh$. On peut supposer que $g_{n+1}, g_{n+2}, \dots, g_m$ forment une base de h . Les $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_r} \times g_{j_1} g_{j_2} \dots g_{j_s}$ (où $(j_1, j_2, \dots, j_s)$ est une suite croissante d'entiers compris entre $n+1$ et m) forment une base de $G \otimes H$;

or les $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_r} g_{j_1} g_{j_2} \dots g_{j_s}$ forment une base de A . Donc θ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $G \otimes H$ sur l'espace A .

2. Représentation des algèbres de Lie.

1. - Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie, H son algèbre enveloppante. Soit Δ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{h}$. La représentation nulle s'effectuant dans un espace de dimension 1 définit un élément δ_0 de Δ . Soit ν une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un espace V . Pour $\delta \in \Delta$, on désigne par V_δ l'espace engendré par les sous-espaces stables de V dans lesquels ν induit une représentation de classe δ . Les éléments de V_{δ_0} sont les éléments annulés par ν , encore appelés invariants. V_δ est stable pour ν . Si $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ sont des éléments distincts de Δ , il existe $h \in H$ tel que $\nu(h)$ se réduise à 1 dans V_{δ_1} , à 0 dans les V_{δ_i} , $i > 1$; il en résulte que la somme $\sum V_\delta$ est directe.

Si W est un sous-espace stable de V , on a $W_\delta = V_\delta \cap W$. Soient d'autre part $v \rightarrow v^*$ l'application canonique de V sur $V^* = V/W$, et ν^* la représentation induite par ν dans V^* . Si $v \in V_\delta$, on a $v^* \in (V^*)_\delta$, donc $(V^*)_\delta \supset (V_\delta)^*$. Si de plus $V = \sum V_\delta$, on a $V^* = \sum (V_\delta)^*$, donc, la somme $\sum (V^*)_\delta$ étant directe, $(V^*)_\delta = (V_\delta)^*$.

Si $V = \sum_{\mathfrak{L}} V^{\mathfrak{L}}$ est une décomposition de V en somme directe de sous-espaces stables pour ν , on a $V_\delta = \sum_{\mathfrak{L}} (V_\delta \cap V^{\mathfrak{L}}) = \sum_{\mathfrak{L}} (V^{\mathfrak{L}})_\delta$.

Si $v \in \sum V_\delta$, le sous-espace $W = \nu(H)v$ est de dimension finie. Réciproquement, si W est de dimension finie, et si $\mathfrak{h}$ est semi-simple, on a $v \in \sum V_\delta$; en effet, W , qui est stable pour ν , est complètement réductible.

2. Soit $\delta \in \Delta$, et ν_δ une représentation de classe δ dans un espace U_δ . La représentation $\nu_{\delta^*} = {}^t(\nu_\delta)$ qui s'effectue dans l'espace U_{δ^*} dual de U_δ , définit un élément δ^* de Δ . Ceci posé, considérons, dans $W = V \otimes U_{\delta^*}$, la représentation $\nu \otimes 1 + 1 \otimes \nu_{\delta^*}$. Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ une base de U_{δ^*} . Alors, si $w = \sum_{i=1}^n v_i \otimes u_i \in W_{\delta_0}$, le sous-espace V' de V engendré par les v_i est stable, et ν induit dans V' une représentation de classe δ , ou bien $V' = 0$. Réciproquement, si ν induit dans un sous-espace stable V' de V une

représentation de classe δ , on peut choisir une base $v_1, v_2, \dots, v_n$ de V' telle que $\sum_{i=1}^n v_i \otimes u_i \in W_{\delta_0}$.

3. - Si V est une algèbre, et si $\gamma(h)$ est, pour tout $h \in \mathfrak{h}$, une dérivation de V , chaque V_{δ} est un V_{δ} -module (à gauche par exemple). Car soient $h \in \mathfrak{h}$, $v \in V_{\delta}$, $v_0 \in V_{\delta_0}$; on a : $\gamma(h)(v_0 v) = v_0(\gamma(h)v)$; donc, si γ induit dans $\gamma(H)v$ une représentation de classe δ , on a $\gamma(H)(v_0 v) = 0$, ou bien la représentation induite dans $\gamma(H)(v_0 v)$ est de classe δ ; donc $v_0 \in V_{\delta}$. En particulier, V_{δ_0} est une sous-algèbre de V .

Pour $v \in \sum V_{\delta}$, désignons par v^{δ} la composante de v dans V_{δ} . L'application $v \rightarrow v^{\delta}$ est un projecteur de $\sum V_{\delta}$ sur V_{δ} . Si $v_0 \in V_{\delta_0}$ et $v \in V_{\delta}$, on a $v_0 v \in V_{\delta}$, donc $(v_0 v)^{\delta} = 0 = v_0 v^{\delta}$ si $\delta \neq \delta_0$, et $(v_0 v)^{\delta} = v_0 v = v_0 v^{\delta}$ si $\delta = \delta_0$; donc, si $v_0 \in V_{\delta_0}$ et $v \in \sum V_{\delta}$, on a $(v_0 v)^{\delta} = v_0 v^{\delta}$. De même, $(v v_0)^{\delta} = v^{\delta} v_0$.

4. - Supposons désormais $\mathfrak{h}$ semi-simple et V de dimension finie. Soit $S \supset V$ l'algèbre symétrique de V . Pour $h \in \mathfrak{h}$, $\gamma(h)$ se prolonge d'une manière unique en une dérivation $\tilde{\gamma}(h)$ de S , et $\tilde{\gamma}$ est encore une représentation de $\mathfrak{h}$: car, si $h_1 \in \mathfrak{h}$, $[\tilde{\gamma}(h), \tilde{\gamma}(h_1)]$ et $\tilde{\gamma}([h, h_1])$ sont deux dérivations de S qui coïncident sur V , donc sont identiques. Soit S^r l'ensemble des éléments homogènes de degré r de S . S^1 est stable pour $\tilde{\gamma}$, donc aussi S^r . Comme $S = \sum_{r=0}^{\infty} S^r$ et que $\dim S^r < +\infty$, on voit que $S = \sum S_{\delta}$, et $S_{\delta} = \sum_{r=0}^{\infty} (S_{\delta} \cap S^r)$.

THÉOREME des invariants. - L'algèbre S_{δ_0} a un nombre fini de générateurs.

Soit $\bar{S} = S^1 + S^2 + \dots$. Soit $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ une base de l'idéal engendré dans S par l'algèbre $S_{\delta_0} \cap \bar{S}$. On peut supposer les s_i dans $S_{\delta_0} \cap \bar{S}$, et homogènes. Montrons que $S_{\delta_0} \cap \bar{S}$ est l'algèbre engendrée par $s_1, s_2, \dots, s_n$. Soit $s \in S_{\delta_0} \cap \bar{S}$; s est somme de produits $s_i s_i^{\delta}$, où on peut supposer les $s_i^{\delta} \in S$ homogènes, avec $\deg s_i^{\delta} < \deg s$; donc $s = s^{\delta}$ est somme de produits $(s_i s_i^{\delta})^{\delta} = s_i s_i^{\delta}$, avec des $s_i^{\delta} \in S_{\delta_0}$ homogènes, et $\deg s_i^{\delta} < \deg s$. Si les s_i^{δ} sont des scalaires, s est bien dans l'algèbre engendrée par les s_i . Sinon, $s_i^{\delta} \in S_{\delta_0} \cap \bar{S}$, et on recommence. Par récurrence sur $\deg s$, le théorème est démontré.

COROLLAIRE. - Chaque S_{δ} est un S_{δ_0} -module de type fini.

Soit T l'algèbre symétrique de U_{δ^*} , $\tilde{\nu}_{\delta^*}$ la représentation (dans T) prolongée de ν_{δ^*} (dans U_{δ^*}). Soit $\tilde{\xi} = \tilde{\nu}_{\delta^*} \otimes 1 + 1 \otimes \nu_{\delta^*}$ dans $S \otimes T$, algèbre symétrique (bigraduée) de la somme directe $V + U_{\delta^*}$; $\tilde{\xi}(h)$ n'est autre que la dérivation de $S \otimes T$ prolongeant l'endomorphisme $\xi(h)$ de $V + U_{\delta^*}$ qui est défini par $\nu(h)$ dans V , $\nu_{\delta^*}(h)$ dans U_{δ^*} . Considérons un système fini de générateurs de $(S \otimes T)_{\delta_0}$. Comme les projecteurs de la bigraduation sont permutables aux $\tilde{\xi}(h)$, on peut supposer ces générateurs doublement homogènes. Soient $j_1, j_2, \dots, j_k$ ceux dont le deuxième degré est 1; $w_1, w_2, \dots, w_q$ étant une base de U_{δ^*} , on a $j_i = \sum_{k=1}^q s_k^i \otimes w_k$, avec $s_k^i \in S$. Alors, $s_k^i \in S_{\delta}$, et on voit facilement que le S_{δ_0} -module engendré par les s_k^i est identique à S_{δ} .