

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES DIXMIER

Quelques résultats d'Harish-Chandra, II

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 58, p. 75-81

http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__75_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES RÉSULTATS D'HARISH-CHANDRA ⁽¹⁾, II,

par Jacques DIXMIER.

3. Représentations construites à l'aide d'algèbres enveloppantes.

1. - Soient α une algèbre de Lie, A son algèbre enveloppante, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre semi-simple de α , $\mathfrak{g}$ un idéal de α , H et G les sous-algèbres de A engendrées par $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}$ respectivement. Pour $a \in \alpha$, $a' \in A$, posons

$$\nu_1(a)a' = [a, a'] = aa' - a'a;$$

ν_1 est une représentation de α qui s'effectue dans l'espace A et se réduit dans α à la représentation adjointe usuelle. Pour a fixé, $\nu_1(a)$ est une dérivation de A , pour laquelle $\mathfrak{g}$ est stable, donc aussi G . Les restrictions des $\nu_1(a)$ à G , qui sont des dérivations de G , définissent une représentation ν_2 de α . En particulier, on obtient une représentation ν de $\mathfrak{h}$, qui s'effectue dans l'espace G . Soit Y l'ensemble des éléments de G permutables à $\mathfrak{h}$; on a : $Y = G_{\delta_0}$ (paragraphe 2, n° 1).

LEMME. - $G = \sum G_{\delta}$, et chaque G_{δ} est un Y -module à gauche de type fini.

En effet, soit G^r l'ensemble des éléments symétriques homogènes de degré r de G . Il est immédiat que les G^r sont stables pour ν . Donc, si γ désigne l'application canonique (paragraphe 1, n° 2) de l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ sur G , les $\gamma^{-1} \circ \nu(h) \circ \gamma \neq \tilde{\nu}(h)$ sont des dérivations de S , qui ne sont autres que les dérivations uniques prolongeant $\nu(h)$ sur $\mathfrak{g}$, de sorte que les notations concordent avec celles du paragraphe 2, n° 4; γ est un isomorphisme de l'espace S muni de la représentation $\tilde{\nu}$ sur l'espace G muni de la représentation ν . On a $S = \sum S_{\delta}$, et chaque S_{δ} est un S_{δ_0} -module de type fini (paragraphe 2, n° 4). Donc $G = \sum G_{\delta}$ (ce qui était immédiat directement). Soient d'autre part $s_1, s_2, \dots, s_p$ des générateurs homogènes du S_{δ_0} -module S_{δ} . Les $\gamma(s_i)$ sont dans G_{δ} , soit $M \subset G_{\delta}$ les G_{δ_0} -module à gauche (par exemple) qu'ils engendrent; montrons que $G_{\delta} = M$. Comme $G_{\delta} = \sum (G_{\delta} \cap G_r)$, il suffit de

⁽¹⁾ HARISH-CHANDRA. - On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 28-96.

prouver que $G_\delta \cap G^r \subset M$. Supposons $G_\delta \cap G^i \subset M$ pour $i < r$, et prouvons que $G_\delta \cap G^r \subset M$. Un élément de $G_\delta \cap G^r$ est de la forme $\gamma(s)$, avec $s \in S_\delta \cap S^r$; s est une somme d'éléments de la forme $s'_i s_i$, les s'_i étant des éléments homogènes de S_{δ_0} tels que $d^0 s_i + d^0 s'_i = r : s = \sum s'_i s_i$. Or $\gamma(s'_i s_i) \equiv \gamma(s'_i) \gamma(s_i) \pmod{G^{r-1}}$. Donc $\gamma(s) \equiv \sum \gamma(s'_i) \gamma(s_i) \pmod{G^{r-1}}$. Il suffit alors d'observer que $\gamma(s'_i) \in G_{\delta_0}$, que $\gamma(s) - \sum \gamma(s'_i) \gamma(s_i) \in \sum_{i < r} G_\delta \cap G^i$, et d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

COROLLAIRE 1. - Soit U un espace de dimension finie dans lequel s'effectue une représentation ρ de $\mathfrak{h}$. Considérons, dans $G \otimes U$, la représentation $\xi = \nu \oplus 1 + 1 \oplus \rho$. Alors, $G \otimes U = \sum (G \otimes U)_\delta$, et tout $(G \otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0} -module à gauche de type fini.

a. - D'après le lemme, pour tout $g \in G$ et tout $u \in U$, $\xi(H)(g \otimes u)$ est de dimension finie. D'où $G \otimes U = \sum (G \otimes U)_\delta$.

b. - Soient $\delta \in \Delta$, $\delta' \in \Delta$. Montrons que $(G_\delta, \otimes U)$ est un G_{δ_0} -module de type fini. Soit $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ un système de générateurs du G_{δ_0} -module G_δ . Les $\nu(H)g_i \otimes U$ sont de dimension finie, stables, et engendrent le G_{δ_0} -module $G_{\delta'} \otimes U$. Or, $(G_{\delta'}, \otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0} -module contenant les $(\nu(H)g_i \otimes U)_\delta$; il en résulte que $(G_{\delta'}, \otimes U)_\delta$ est engendré, en tant que G_{δ_0} -module, par les $(\nu(H)g_i \otimes U)_\delta$, donc est de type fini.

c. - Montrons que $(G \otimes U)_{\delta_0}$ est un G_{δ_0} -module de type fini. Soit $U = \sum_{i=1}^n U_i$, chaque U_i étant ρ -irréductible; soit δ_i la classe de la représentation induite par ρ dans U_i . On a : $G \otimes U = \sum_{i=1}^n G_\delta \otimes U_i$, la somme étant directe, et chaque $G_\delta \otimes U_i$ étant ξ -stable. Donc $(G \otimes U)_{\delta_0} = \sum_{\delta, i} (G_\delta \otimes U_i)_{\delta_0}$. Or, $(G_\delta \otimes U_i)_{\delta_0} = 0$ sauf si $\delta = \delta_i^*$. Donc $(G \otimes U)_{\delta_0} = \sum_{i=1}^n (G_{\delta_i^*} \otimes U_i)_{\delta_0}$, et est G_{δ_0} -module de type fini d'après b.

d. - Montrons que $(G \otimes U)_\delta$ est un G_{δ_0} -module de type fini. Soit V un espace dans lequel s'effectue une représentation σ de $\mathfrak{h}$ de classe δ^* . Considérons dans $G \otimes U \otimes V$ la représentation $\xi \otimes 1 + 1 \otimes \sigma$. D'après c, le G_{δ_0} -module $(G \otimes U \otimes V)_{\delta_0}$ admet un système fini de générateurs $x_1, x_2, \dots, x_n$. Soit $e_1, e_2, \dots, e_p$ une base de V , et soit $x_i = \sum_{j=1}^p y_i^j \otimes e_j$ où $y_i^j \in G \otimes U$. Un raisonnement déjà fait prouve que les y_i^j forment un système de générateurs du G_{δ_0} -module $(G \otimes U)_\delta$.

2. - Rappelons que l'application linéaire canonique θ de $G \otimes H$ dans A est un isomorphisme de l'espace $G \otimes H$ sur l'espace A (paragraphe 1, n° 3). Soient I_1 un idéal à gauche de H , I l'idéal à gauche de A engendré par I_1 . Montrons que $\theta(G \otimes I_1) = I$. Un élément de $G \otimes I_1$ est de la forme $\sum g^i \otimes h^i$ avec $g^i \in G$, $h^i \in I_1$; or $\theta(\sum g^i \otimes h^i) = \sum g^i h^i \in I$. Réciproquement, un élément de I est de la forme $\sum a^i h^i$, avec $h^i \in I_1$, $a^i \in A$, donc $a^i = \sum_j g_j^i h_j^i$, $g_j^i \in G$; $h_j^i \in H$; or $\theta(\sum_i \sum_j g_j^i h_j^i h^i) = \sum_i \sum_j g_j^i \otimes h_j^i h^i \in G \otimes I_1$. Ceci nous permet d'identifier désormais l'espace A/I à l'espace $G \otimes H/G \otimes I_1 = G \otimes (H/I_1)$

Soient $a \rightarrow a^*$ et $h \rightarrow \bar{h}$ les applications canoniques de A dans $A^* = A/I$ et de H dans $\bar{H} = H/I_1$. Soient ν_I et ν_{I_1} les représentations canoniques de A et H dans A^* et $\bar{H}$ respectivement. Nous identifions désormais une représentation d'une algèbre de Lie et la représentation correspondante de son algèbre enveloppante. alors on a, pour $h_1 \in \mathcal{U}$, $g \in G$, $h \in H$:

$$\begin{aligned} \nu_I(h_1)(g \otimes \bar{h}) &= \nu_I(h_1)((gh)^*) = (h_1 gh)^* = ([h_1, g]h + gh_1 h)^* = \\ &= [h_1, g] \otimes \bar{h} + g \otimes \bar{h}_1 h = \nu(h_1)g \otimes \bar{h} + g \otimes \nu_{I_1}(h_1)\bar{h} \end{aligned}$$

donc :

$$(1) \quad \nu_I(h_1) = \nu(h_1) \otimes 1 + 1 \otimes \nu_{I_1}(h_1)$$

COROLLAIRE 2. - Considérons la restriction de ν_I à H , qui s'effectue dans l'espace A . Si H/I_1 est de dimension finie, on a $A^* = \sum (A^*)_{\delta}$, et chaque $(A^*)_{\delta}$ est un Y -module de type fini.

Ceci résulte aussitôt du corollaire 1 et de la formule (1).

4. Remarques d'algèbre associative.

1. - LEMME 1. - Soient A une algèbre à élément unité, B une sous-algèbre de A contenant 1, I un idéal à gauche de A . Supposons vérifiée la condition suivante :

(C₁) Si a_1, a_2 sont des éléments de A , il existe $a \equiv 1 \pmod{I}$ tel que $aa_1 \in B$, $aa_2 \in B$.

Alors, si L est un idéal à gauche maximal de A , contenant I , $L \cap B$ est un idéal à gauche maximal de B , et la correspondance $L \rightarrow L \cap B$ est biunivo-
que.

En effet, soit M un idéal à gauche de B tel que $L \cap B \subset M$, $L \cap B \neq M$. Soit $m \in M$; $m \notin L \cap B$. Comme L est maximal, il existe un $a \in A$ avec $am \equiv 1$

(mod L) . Soit $a_1 \equiv 1 \pmod{I}$ avec $a_1 a \in B$. On a : $a_1 a m \in M$, et $a_1 a m \equiv 1 \pmod{L+I=L}$, donc $a_1 a m \equiv 1 \pmod{M}$, donc $M=B$. Ainsi, $L \cap B$ est un idéal à gauche maximal de B .

Soient maintenant L, L' deux idéaux à gauche maximaux de A contenant I tels que $L \cap B = L' \cap B$. Supposons $L \neq L'$. Alors, $1 = \ell + \ell'$ avec $\ell \in L$, $\ell' \in L'$. Soit $a \equiv 1 \pmod{I}$ tel que $a\ell \in B$, $a\ell' \in B$. On a :

$$a = a\ell + a\ell' \in L \cap B + L' \cap B = L \cap B .$$

Donc $1 \in L \cap B + I \subset L$, ce qui est absurde.

2. - Soient maintenant A une algèbre à élément unité, I un idéal à gauche, B l'ensemble des $a \in A$ tels que $Ia \subset I$; B est une sous-algèbre de A contenant I et le centre Z de A ; I est un idéal bilatère de B . Soit $a \mapsto a^*$ l'application canonique de A sur l'espace $A^* = A/I$; sa restriction à B est un homomorphisme de B sur l'algèbre $B^* = B/I$. Soient de plus J un idéal bilatère de A , et $K = I + J$ (idéal à gauche) ; $K \cap B$ est un idéal bilatère de B . Soit $a \mapsto a^+$ l'application canonique de A sur $A^+ = A/K$. Soit Ω l'ensemble des idéaux à gauche maximaux de A contenant K .

LEMME 2. - Supposons vérifiées par A, B, I les conditions (C_1) et (C_2) B^+ est de dimension finie.

Alors, les représentations irréductibles ν_L de A définies canoniquement par les $L \in \Omega$ sont toutes équivalentes à un nombre fini d'entre elles. En outre, $\nu_L(z)$ est scalaire pour $z \in Z$.

En effet, soit $b \mapsto b^\sim$ l'homomorphisme canonique de B sur $B^\sim = B/K \cap B$. Les $L \cap B$, $L \in \Omega$, sont des idéaux à gauche maximaux de B contenant $K \cap B$; donc les $(L \cap B)^\sim$ sont des idéaux à gauche maximaux de $B^\sim$. Soit $\nu_L^\sim$ la représentation irréductible de $B^\sim$ définie canoniquement par $(L \cap B)^\sim$. D'après C_2 , $B^\sim$ est de dimension finie, donc il existe un sous-ensemble fini Ω' de Ω tel que toute $\nu_L^\sim$, $L \in \Omega$, soit équivalente à une $\nu_{L'}^\sim$, $L' \in \Omega'$. Ceci posé, soit $L \in \Omega$. Il existe $L' \in \Omega'$ tel que $\nu_L^\sim$ et $\nu_{L'}^\sim$ soient équivalentes. Donc il existe $b_0 \in B$, $b_0 \notin L$ tel que :

$$b \in B \text{ et } b^\sim b_0^\sim \in (L \cap B)^\sim \iff b \in B \text{ et } b^\sim \in (L' \cap B)^\sim .$$

Soit M l'ensemble des $a \in A$ tels que $ab_0 \in L$; M est un idéal à gauche maximal de A contenant I et J donc K , donc $M \in \Omega$, et ν_L est équivalente à ν_M . Enfin :

$$\begin{aligned} a \in M \cap B &\iff a \in B \text{ et } ab_0 \in L \iff a \in B \text{ et } (ab_0)^\sim \in (L \cap B)^\sim \\ &\iff a \in B \text{ et } a^\sim \in (L' \cap B)^\sim \iff a \in L' \cap B . \end{aligned}$$

Donc $L' \cap B = M \cap B$ et par suite $L' = M$, de sorte que ν_L est équivalente à $\nu_{L'}$. Ceci démontre la première assertion.

Si maintenant $z \in Z$, on a $z \in B$, et $z^\sim$ appartient au centre de B . Donc $\nu_L^\sim(z^\sim)$ permute aux opérateurs de $\nu_L^\sim$, qui est irréductible et s'effectue dans un espace de dimension finie. Donc il existe un scalaire $\xi(z)$ tel que $z^\sim \nu_L^\sim \equiv \xi(z) \nu_L^\sim \pmod{(L \cap B)^\sim}$, d'où $z - \xi(z) \in L$. Alors, pour tout $a \in A$, on a modulo L : $za = az \equiv a \xi(z) = \xi(z)a$, donc $\nu_L(z) = \xi(z) \cdot 1$.

5. Le théorème d'Harish-Chandra.

1. - Comme plus haut, soient α une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}$ un idéal de α , $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre semi-simple de α , tels que $\alpha = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = 0$. Soient A l'algèbre enveloppante de α , $G \subset A$ et $H \subset A$ les algèbres enveloppantes de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$. Soient Z le centre de A , et Y l'ensemble des éléments de G permutable à $\mathfrak{h}$. Soit enfin Δ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{h}$. Une fois pour toutes, nous choisirons, pour tout $\delta \in \Delta$:

- 1° Une représentation ν_δ de classe δ de $\mathfrak{h}$, s'effectuant dans un espace U_δ ;
- 2° Un sous-espace U'_δ de U_δ de dimension 1 ; l'ensemble des $h \in H$ tels que $\nu_\delta(h)U'_\delta = 0$ est un idéal à gauche maximal I_δ de H ; H/I_δ est de dimension finie ;
- 3° Un élément $h_\delta \in H$ tel que $\nu_\delta(h_\delta)$ soit un projecteur sur U'_δ (théorème de Burnside).

Soit ν une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un espace V . Soit V^δ l'ensemble des $v \in V$ tels que $\nu(I) v = 0$. On a : $V^\delta \subset V$. En outre, $\nu(h_\delta)$ se réduit, sur V_δ , à un projecteur sur V^δ . En effet :

- α) si $v \in V_\delta$, $\nu(h_\delta) v \in V^\delta$; car il suffit de le montrer quand v appartient à un sous-espace stable W de V_δ dans lequel ν induit une représentation de classe δ ; et $\nu(h_\delta)$ se réduit dans W à un projecteur sur un sous-espace W' de dimension 1 de W qui est tel que $\nu(I_\delta) W' = 0$, donc tel que $W' \subset V^\delta$.
- β) si $v \in V^\delta$, $v \neq 0$, il existe un isomorphisme entre $\nu(H) v$ muni de la représentation induite par ν , et U_δ muni de ν_δ , et cet isomorphisme transforme U'_δ en la variété à une dimension engendrée par v ; donc $\nu(h_\delta) v = v$.

Ceci posé, soient $v_1, v_2, \dots, v_n$ des éléments de $\sum V_\delta$, $v'_1, v'_2, \dots, v'_p$ des éléments de V^δ . Il existe $h \in H$ tel que $\nu(h) v_1 \in V^\delta$, $\nu(h) v'_j = v'_j$: en effet, on peut se ramener au cas où $v_1 \in V_{\delta_1}$; soit $h' \in H$ tel que $\nu(h')$ se réduise à 1 dans V_δ , à 0 dans les $V_{\delta_i} \neq V_\delta$. ; alors $h = h_\delta h'$ répond à la question.

2. - Si π est une représentation de $\mathcal{A}$ dans un espace V , et si $\delta \in \Delta$, les notations V_δ , V^δ concernent la restriction de π à $\mathfrak{n}$.

THÉOREME. - Soient $\delta_1 \in \Delta$, et χ un homomorphisme de Y dans le corps complexe.

- a. Il existe seulement un nombre fini de représentations irréductibles inéquivalentes π de A telles que, V étant l'espace de π , on ait $V_{\delta_1} \neq 0$ et $\pi(y) = \chi(y)1$ pour $y \in Y$.
- b. Si π est une telle représentation, on a $V = \sum V_\delta$, et $\dim V_\delta < \infty$ pour tout δ .
- c. $\pi(z)$ est scalaire pour $z \in Z$.

En effet, soit J l'idéal bilatère de A engendré par les $y - \chi(y)$, $y \in Y$. Le noyau de π contient J .

Soit I l'idéal à gauche de A engendré par I_{δ_1} . Puisque $V_{\delta_1} \neq 0$, il existe un $v \in V_{\delta_1}$, $v \neq 0$; on a $\pi(I_{\delta_1})v = 0$, donc $\pi(I)v = 0$. Soit L l'idéal à gauche maximal de A formé des $a \in A$ tels que $\pi(a)v = 0$. On a $L \supset I$ et $L \supset J$ donc $L \supset I + J = K$, et π est équivalente à ν_L .

Soient $a \rightarrow a^*$, $a \rightarrow a^+$ et $a \rightarrow a^\wedge$ les applications canoniques de A sur $A^* = A/I$, $A^+ = A/K$ et $A^\wedge = A/L$; ν_K est un quotient de ν_I , ν_L est un quotient de ν_K .

Comme H/I_{δ_1} est de dimension finie, le corollaire du paragraphe 3 prouve que $A^* = \sum (A^*)_{\delta}$ et que chaque $(A^*)_{\delta}$ est un Y -module de type fini. En passant au quotient, et observant que tout élément de Y est congru modulo J à un scalaire, on voit que $A^+ = \sum (A^+)_{\delta}$ et que chaque $(A^+)_{\delta}$ est de dimension finie. On en déduit enfin que $A^\wedge = \sum (A^\wedge)_{\delta}$ et que chaque $(A^\wedge)_{\delta}$ est de dimension finie, ce qui est le b du théorème.

Pour prouver le a et le c du théorème, nous allons prouver que nous sommes dans les conditions du lemme 4 (avec les mêmes notations). Introduisons l'algèbre B de ce lemme, on a, si $a \in A$:

$a^* \in B^* \iff a \in B \iff Ia \subset I \iff (Ia)^* = 0 \iff \nu_I(I)a^* = 0 \iff (I_{\delta_1})a^* = 0 \iff a^* \in (A^*)_{\delta_1}^*$
donc $B^* = (A^*)_{\delta_1}^*$. Donc $B^+ \subset (A^+)_{\delta_1}$ est de dimension finie, ce qui est la condition (C_2) . Enfin, soient a_1, a_2 des éléments de A . Comme $A^* = \sum (A^*)_{\delta}$, il existe un $a \in A$ tel que $\nu_I(a)a_1^* \in (A^*)_{\delta_1}^*$, $\nu_I(a)a_2^* \in (A^*)_{\delta_1}^*$, $\nu_I(a)1^* = 1^*$ c'est-à-dire $aa_1 \in B$, $aa_2 \in B$, $a \equiv 1 \pmod{I}$, ce qui prouve (C_1) , et achève la démonstration du théorème.

EXEMPLE. - Partons d'une algèbre de Lie semi-simple réelle $\mathfrak{h}_0$; soient α_0 sa complexification, Γ l'homothétie de rapport i dans α_0 . On ne conserve sur α_0 que la structure d'algèbre de Lie réelle. Soient α la complexification de α_0 , et $\mathfrak{h} \subset \alpha$ la complexification de $\mathfrak{h}_0$. On étend Γ à α par linéarité et on pose : $\gamma(h) = \frac{1}{2}(h + i \Gamma(h))$ pour $h \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g} = \gamma(\mathfrak{h})$. On voit alors aisément que $\mathfrak{g}$ est un idéal de α , et que $\alpha = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = 0$. En outre, Y est le centre de G .
