

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ANDRÉ NÉRON

Le lemme d'Enriques-Severi

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 94, p. 399-407

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__399_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE LEMME D'ENRIQUES-SEVERI

par André NÉRON

(d'après O. ZARISKI [3])

1. Preliminaires.

Toutes les variétés considérées sont algébriques et plongées dans un même espace projectif S^n . Soit V une variété et soit $P \in V$; on dit que V est normale en P si l'anneau local de V en P , relativement à tout corps de définition de V , est intégralement fermé. On dit que V est normale si elle est normale en tous ses points.

A toute fonction f sur V on sait associer son diviseur (f) . Si V est normale, on a $(f) = \sum_C v_C(f) C$, somme étendue à tous les V -diviseurs irréductibles C et dans laquelle v_C désigne la valuation attachée à l'anneau local de C dans V . Deux V -diviseurs C et C' sont linéairement équivalents (et on écrit $C \equiv C'$) s'il existe une fonction f sur V telle que $C - C' = (f)$.

Dans ce qui suit, V désignera toujours une variété normale. Soit Ω le domaine universel (qu'on identifie au corps des "constantes") et soit $\mathcal{L}$ un Ω -module de fonctions sur V de dimension finie. Alors il existe un V -diviseur positif D tel que $(f) + D$ soit positif pour toute $(f) \in \mathcal{L}$. L'ensemble L des diviseurs positifs $(f) + D$ est, par définition, un système linéaire sur V . Il a une structure d'espace projectif sur Ω . Tout corps de définition de V , de D et des éléments d'une base de $\mathcal{L}$ s'appelle un corps de définition de L . Pour $\mathcal{L}$ donné, il existe un D minimal et un seul, et le système L correspondant est sans composante fixe.

L est dit complet s'il n'est pas contenu dans un système linéaire plus grand. Soient L un système linéaire et C_0 un diviseur; l'ensemble des D tels que $C_0 + D \in L$ est un système linéaire, noté $L - C_0$. Il est complet si L est complet.

Les hypersurfaces d'ordre m découpent sur V un système linéaire, noté L_m

THÉOREME 1. - L_m est contenu dans un système linéaire complet $|L_m|$, et on a $L_m = |L_m|$ pour m assez grand.

En effet, soient R_m le Ω -module des classes (mod V) des formes homogènes de degré m dans S^n , et soit I_m sa fermeture intégrale. Soit $C_m \in L_m$ la trace sur V de l'hypersurface $f_m = 0$, et soit $\bar{F}_m$ la classe (mod V) de f_m . On montre facilement, compte tenu de la normalité de V , que pour tout $D \in C_m$, on a $D - C_m = (g/\bar{F}_m)$, avec $g \in I_m$. Le théorème résulte de ce que I_m est un R_m -module fini et est égal à R_m pour m assez grand.

COROLLAIRE. - Tout système linéaire est contenu dans un système linéaire complet.

Par $D \in L$ on peut en effet faire passer une hypersurface H_m ne contenant pas V . Posons $H_m.V = D + C$. Le système linéaire L est contenu dans le système linéaire complet $|L_m| - C$.

Le système complet contenant L sera dans la suite noté $|L|$. On montre que tout corps de définition de L est un corps de définition de $|L|$. Pour tout V -diviseur D , on posera $\ell(D) = \dim |D| + 1$. L'entier $\ell(D)$ est aussi la dimension du module des f telles que $(f) \geq -D$.

Le théorème de Bertini (que MATSUSAKA a étendu au cas abstrait) affirme que si L n'a pas de composante fixe et s'il n'est pas "composé avec un pinceau" (c'est-à-dire si tous les éléments de L ne sont pas composés d'un nombre fini de V -diviseurs appartenant à un système linéaire de dimension 1), L est irréductible (c'est-à-dire tout élément générique de L est irréductible).

Ce théorème s'applique en particulier à L_m . De plus, tout élément générique de L_m est normal ([2], cf. [1]).

Pour tout système linéaire L et pour toute sous-variété C de V , les C -diviseurs $D.C$ (avec $D \in L$ tel que $D.C$ soit défini) forment un système linéaire, appelé C -trace de L , et noté $L.C$. Lorsque $\dim C = \dim V - 1$, on a de plus

$$(1) \quad \dim (L.C) = \dim L - \dim (L - C) - 1$$

2. Le lemme d'Enriques-Severi.

En voici l'énoncé, sous la forme due à ZARISKI :

THÉORÈME 2. - Soit V^r une variété normale ($r \geq 2$) et soit D un V -diviseur. Alors, en désignant par C_m la trace sur V d'une hypersurface générique H_m de degré m , on a $|D.C_m| = |D|.C_m$ (autrement dit $|D|.C_m$ est complet) pour m assez grand.

Ce lemme joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème de Riemann-Roch pour les surfaces (voir plus loin). Il permet d'obtenir Riemann-Roch pour toute surface normale dans le cas abstrait et sans utiliser le théorème de réduction des singularités.

3. Réduction du problème.

Supposons le théorème démontré pour $|D| = L_s$ (s assez grand pour que L_s soit complet), et montrons qu'il est valable pour tout $|D|$.

Soit en effet $D_m \in |D.C_m|$. Il existe un j tel que $L_j - D$ soit irréductible (appliquer le théorème de Bertini) et complet. Soit donc $Y \in L_j - D$ irréductible. Pour m assez grand, on a $D_m + C_m.Y \in L_j.C_m$ puisque, par hypothèse $L_j.C_m$ est complet. Autrement dit, $D_m + C_m.Y = H_j^1.C_m$, où H_j^1 est une hypersurface d'ordre j . Prenons $m > j$. Alors $Y \subset H_j^1$, car sinon $H_j^1.Y$ serait défini, et on aurait

$$H_j^1.Y \geq C_m.Y = H_m.Y$$

ce qui est incompatible avec le théorème de Bezout. Donc on a

$$D_m = E.C_m \text{ avec } E = H_j^1.V - Y \in |D|.$$

4. Démonstration dans le cas $|D| = L_s$.

On va démontrer dans ce cas le théorème plus précis suivant :

THÉOREME 2'. - Soit (s, m) un couple d'entiers (s assez grand pour que L_s soit complet). Alors il existe un entier q ne dépendant que de V tel que $L_s.C_m$ soit complet dès que $m - s \geq q$.

Pour tout triplet d'entiers i, m, s ($i \geq m - s > 0$) et pour tout $D \in |L_s.C_m|$, posons

$$M_i(C_m, D) = (L_i.C_m) \cap ((L_{s+i}.C_m) - D).$$

Dans ce qui suit, s est supposé assez grand pour que L_s soit complet.

LEMME. - Soit $C_{m1} \in L_1.C_m$. Alors on a

$$\dim M_i(C_m, D + C_{m1}) - \dim M_i(C_m, D) \leq d_{s+i+1-m}(C_1)$$

où $d_{s+i+1-m}(C_1)$ désigne la déficiencia $\dim |N| - \dim N$ du système linéaire $N = L_{s+i+1-m}(C_1)$.

Il suffit de montrer qu'il existe une application linéaire projective u de $M_i(C_m, D + C_{m1})$ dans $|N|$ telle que $\bar{u}^{-1}(N) \subset M_i(C_m, D)$. Pour définir u , on procède comme suit. Soit $C_m = H_m.V$. A tout $A \in M_i(C_m, D + C_{m1})$ on peut associer une hypersurface H_{s+i+1} telle que $A + D + C_{m1} = H_{s+i+1}.C_m$ et supposer de plus que $A \rightarrow H_{s+i+1}$ est une application linéaire projective biunivoque. On pose

$$(2) \quad u(A) = (H_{s+i+1} - H_m).C_1.$$

Soit maintenant $A \in \bar{u}^{-1}(N)$. On a une relation de la forme

$$(3) \quad u(A) = H_{s+i+1-m}.C_1$$

La comparaison de (2) et (3) montre qu'il existe une hypersurface H'_{s+i+1} du pinceau linéaire défini par H_{s+i+1} et $H_{s+i+1-m} + H_m$ qui contient C_1 . Compte tenu de $H_m \supset C_m$, on a $H'_{s+i+1}.C_m = H_{s+i+1}.C_m = A + D + C_{m1}$. Or $H'_{s+i+1}.V - C_1$ appartient à $|L_{s+i}|$, donc à L_{s+i} qui est complet, donc est de la forme $H_{s+i}.V$. Donc $H_{s+i}.C_m = A + D$. Donc $A \in M_i(C_m, D)$.

COROLLAIRE. — On a

$$\dim L_i.C_m - \dim M_i(C_m, D) \leq \dim L_{i+1}.C_m - \dim M_{i+1}(C_m, D) + d_{s+i+1-m}(C_1)$$

En effet, considérons l'application linéaire projective biunivoque v de $L_i.C_m$ dans $L_{i+1}.C_m$ définie par $v(A) = A + C_{m1}$. On a évidemment

$$\dim L_{i+1}.C_m - \dim M_{i+1}(C_m, D) \geq \dim L_i.C_m - \dim \bar{v}^{-1}(M_{i+1}(C_m, D))$$

et le corollaire s'obtient en constatant que

$$M_i(C_m, D + C_{m1}) \supset \bar{v}^{-1}(M_{i+1}(C_m, D)) \supset M_i(C_m, D)$$

Du corollaire, on déduit par sommation

$$\dim L_{m-s}.C_m - \dim M_{m-s}(C_m, D) \leq d$$

où $d = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(C_1)$ est fini.

Or considérons L_{m-s} et son sous-système $M_{m-s}(D)$ dont la trace sur C_m est $M_{m-s}(C_m, D)$. D'après (1), (paragraphe 1), les deux systèmes ont mêmes dimensions que leurs traces. Donc

$$(4) \quad \dim L_{m-s} - \dim M_{m-s}(D) \leq d.$$

De (4) on déduit l'existence d'un q tel que $M_{m-s}(D)$ soit irréductible pour $m-s \geq q$.

Il suffit d'appliquer Bertini.

$M_{m-s}(D)$ n'a pas de composante fixe E dès que $(m-s)(r-1) \geq d$. En effet, le nombre de conditions imposées à une H_j par la condition de passer par E est $\geq j(r+1)$, car par $j(r-1)$ points génériques indépendants d'une composante de E passe une hypersurface dégénérée en j hyperplans.

$M_{m-s}(D)$ n'est pas composé avec un pinceau dès que $\dim_{m-s-1} \geq d$. En effet, pour tout $C_1 \in L_1$, on a alors d'après (4) $(L_{m-s-1} + C_1) \cap M_{m-s}(D) \neq \emptyset$. Comme L_1 est sans point fixe, il n'existe pas de point de V appartenant à toute composante de tout élément de $M_{m-s}(D)$.

Soit donc $m-s \geq q$ et soit $C_{m-s} \in M_{m-s}(D)$ irréductible.

Il existe $C'_m = H'_m \cdot V \in L_m$ telle que $C_{m-s} \cdot C_m + D = C'_m \cdot C_m$. Soient Y_i ($i = 0, \dots, n$) les coordonnées homogènes dans S^n . Soient $F_m(Y)$, $F'_m(Y)$ et $F_{m-s}(Y)$ les premiers membres des équations de H_m , H'_m et H_{m-s} . Prenant pour "hyperplan de l'infini" $Y_0 = 0$, posons $X_i = \frac{Y_i}{Y_0}$ ($i = 1, \dots, n$) et soient $f_m(X) = F_m(Y)/Y_0^m$, $f'_m(X) = F'_m(Y)/Y_0^m$ et $f_{m-s}(X) = F_{m-s}(Y)/Y_0^{m-s}$. Soient de plus $\bar{x}_1, x_1, x'_1$ les valeurs des X_i en des points génériques de V , C_m et C_{m-s} respectivement. La fonction g sur C_m telle que $g(x) = \frac{f'_m(x)}{f_{m-s}(x)}$ n'a de pôles qu'à l'infini. Donc $g(x)$ est entier par rapport à $k[x]$, donc puisque V est normale, $g(x) \in k[x]$. Donc il existe des polynômes G et H tels que

$$f'_m(\bar{x}) = G(\bar{x}) f_{m-s}(\bar{x}) + H(\bar{x}) f_m(\bar{x})$$

et la fonction sur C'_m ayant pour valeur en x'

$$\frac{f'_m(x')}{f_m(x')} = H(x') \in k[x']$$

n'a de pôles qu'à l'infini. Or cette fonction ne dépend pas du choix de l'indice de l'hyperplan de l'infini. Donc elle est constante. Donc le faisceau défini par H_m et H'_m contient une hypersurface H''_m passant par C_{m-s} . On a

$H_m'' \cdot C_m = H_m' \cdot C_m = C_{m-s} \cdot C_m + D$. Donc, en posant $H_m'' \cdot V - C_{m-s} = C_s$, il vient
 $D = C_s \cdot C_m$.

C.Q.F.D.

5. Le genre arithmétique.

Soit d'abord un cycle homogène de dimension r de S^n dont toutes les composantes ont pour coefficient $+1$ (et qu'on peut identifier à l'ensemble algébrique réunion de ces composantes). Le nombre des conditions imposées à une forme de degré m par la propriété de s'annuler sur W est, pour m assez grand, représenté par un polynôme en m , $\chi(W, m)$, appelé fonction caractéristique de W . $\chi(W, m)$ est aussi le rang du module R_m des formes de degré m dans S_n (mod W). Désignant par a_0 le terme constant au polynôme χ , on appelle genre arithmétique de W le nombre

$$p_a(W) = (-1)^r a_0.$$

Soit W_s^{r-1} l'intersection de W et de i hypersurfaces génériques indépendantes de degré s . On a, quels que soient m et s ,

$$\chi(W_s^r, ms) - \chi(W_s^r, ms - s) = \chi(W_s^{r-1}, ms).$$

On en déduit

$$\chi(W, m) = \sum_{i=0}^r (-1)^i p_a(W_m^i).$$

Dans le cas où W est une variété normale, on a $\chi(W, m) = \dim L_m + 1 = \ell(C_m)$ donc

$$(5) \quad \ell(C_m) = \sum_{i=0}^r (-1)^i p_a(W_m^i).$$

Sur une variété normale V , on définit le genre arithmétique de tout V -diviseur.

Pour cela, on démontre les deux propriétés suivantes

$$(A) \quad p_a(Z) = p_a(Z') \quad \text{pour } Z \equiv Z'$$

$$(B) \quad p_a(Z + Z') = p_a(Z) + p_a(Z') + p_a(Z \cdot Z')$$

pour les couples de V -diviseurs Z et Z' tels que les symboles figurant dans ces relations soient définis au sens précédent.

Pour démontrer (A), on remarque que

$$\chi(Z, m) = \dim L_m - \dim(L_m - Z)$$

et que L_m est complet, donc que $L_m - Z = L_m - Z'$ pour m assez grand.

La démonstration de (B) repose sur la relation

$$\chi(Z, m) + \chi(Z', m) = \chi(Z + Z', m) + \chi(Z \cdot Z', m)$$

On constate ensuite qu'il existe une et une seule façon d'étendre la définition de $p_a(Z)$ aux V -diviseurs de manière

1° que $p_a(0) = 0$ en toute dimension

2° que la propriété (A) soit valable quels que soient Z et Z'

3° qu'on ait la propriété

$$(B') \quad p_a(Z + C_m) = p_a(Z) + p_a(C_m) + p_a(Z \cdot C_m)$$

pour tout Z et pour $C_m \in L_m$ générique sur un corps de définition de Z , le cycle $Z \cdot C_m$ étant regardé comme un C_m -diviseur.

6. Expression de $\ell(D + C_m)$ pour m assez grand.

THÉOREME 3. - On a pour m assez grand

$$\ell(D + C_m) = (-1)^r (p_a(V) + p_a(-D - C_m))$$

On se ramène au cas $D = -E$ ($E \geq 0$ irréductible) en prenant pour E un élément générique de $|C_j - D|$, l'entier j étant assez grand.

On a

$$\ell(C_m - E) = \chi(V, m) - \chi(E, m)$$

D'où, compte tenu de (5)

$$(C_m - E) = (-1)^r p_a(V) + \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} (p_a(V_m^i) - p_a(E \cdot V_m^{i-1}))$$

Il suffit alors de remarquer qu'on a, d'après (B')

$$p_a(E \cdot V_m^{i-1}) = p_a(V_m^i) + p_a(E \cdot V_m^{i-1} - V_m^i) + p_a(E \cdot V_m^i - V_m^{i+1})$$

7. Le système canonique.

Soit ω une différentielle sur une variété normale V . A tout V -diviseur irréductible C , on associe l'ordre $v_C(\omega)$ de ω en C ainsi défini : on considère des coordonnées $x_1 \dots x_r$ uniformisantes et séparantes (c'est-à-dire telles que toute fonction sur C soit algébrique séparable sur le corps engendré par les traces des x_i sur C) de C , et si on a

$$\omega = A dx_1 \dots dx_n,$$

on pose $v_C(\omega) = v_C(A)$. Le diviseur (ω) de ω est le V -diviseur

$$(\omega) = \sum_C v_C(A) \cdot C.$$

Les (ω) appartiennent à une classe déterminée modulo l'équivalence linéaire, appelée classe canonique. Les éléments positifs de cette classe (associés aux différentielles de première espèce) forment un système complet, appelé système linéaire canonique, noté $K = K(V)$.

Soit $C_m \in L_m$ irréductible et normale et considérons le système canonique $K(C_m)$. Soit ω une différentielle sur V et soit t un paramètre uniformisant de C_m (c'est-à-dire une fonction sur V telle que $v_C(t) = 1$). On peut trouver $r-1$ fonctions $z_1, \dots, z_{r-1}$ formant avec t un système de coordonnées uniformisantes séparantes de C_m sur V . Soit $\omega = A dt dz_1 \dots dz_{r-1}$ et considérons sur C_m la différentielle $\omega_t = A_t dz_{1,t} \dots dz_{r-1,t}$ ($A_t, z_{i,t}$, fonctions induites par A et z_i respectivement sur C_m). On établit la relation

$$(\omega_t) = ((\omega) + C_m - (t)) \cdot C_m$$

(Δ désignant un C_m -diviseur irréductible, cette relation est facile à vérifier localement en Δ pour un t particulier : on prend t tel que $C_m - (t)$ n'admette pas Δ pour composante ; on montre ensuite que $(\omega_t) + (t)C_m$ ne dépend pas de t).

Il en résulte $|K + C_m| \cdot C_m \subset K(C_m)$.

Plus généralement, si D est un V -diviseur irréductible d'un système linéaire de la forme $|E + C_m|$, on a encore $|D + K| \cdot D \subset K(D)$ (on se ramène au cas précédent par une transformation birationnelle). $|D + K|$ s'appelle le système adjoint de D sur V .

8. Application au théorème de Riemann-Roch.

Soit V une surface normale et soit D un V -diviseur. Posons $D + C_m = E_m$. On a

$$\ell(D) = \ell(E_m) - \dim(|E_m| \cdot C_m) - 1.$$

Or d'après Riemann-Roch pour C_m

$$\dim |E_m| \cdot C_m + 1 \leq \ell(E_m \cdot C_m) = -p_a(-E_m \cdot C_m) - p_a(C_m) + j_m - 1$$

où j_m est l'indice de spécialité de $E_m \cdot C_m$ sur C_m , défini par

$$j_m = \ell(K_m - E_m \cdot C_m), \text{ avec } K_m \in (K(C_m)).$$

Le théorème 3 et les propriétés du symbole p_a entraînent donc

$$\ell(D) \geq p_a(V) + p_a(-D) - j_m$$

Or d'après le paragraphe précédent

$$\begin{aligned} j_m &= \dim \left| K + C_m \cdot C_m - E_m \cdot C_m \right| + 1 \\ &= \dim \left| (K - D) \cdot C_m \right| + 1 \end{aligned}$$

Pour m assez grand, le lemme d'Enriques-Severi donne

$$j_m = \dim(K - D) \cdot C_m + 1$$

et comme de plus

$$\dim(K - D) \cdot C_m = \dim(K - D),$$

il vient

$$\ell(D) \geq p_a(V) + p_a(-D) - i(D)$$

où $i(D) = \dim(K - D) + 1 = \ell(K_0 - D)$ (avec $K_0 \in K$) s'appelle l'indice de spécialité de D . C'est le théorème de Riemann-Roch pour les surfaces normales.

Si V est non singulière, on a

$$p_a(-D) = 2 + p_a(D^2) - p_a(D).$$

D'où la forme habituelle

$$\dim D \geq \nu(D) - p_a(D) + p_a + 2 - i(D)$$

où $\nu(D) = p_a(D^2)$ est le degré de D .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SAMUEL (Pierre). - Sections hyperplanes des variétés normales, Séminaire Bourbaki, t. 3, 1950/51.
- [2] SEIDENBERG (A.). - The hyperplane sections of normal varieties, Trans. Amer. math. Soc., t. 69, 1950, p. 357-386.
- [3] ZARISKI (Oscar). - Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi, Annals of Math., Series 2, t. 55, 1952, p. 552-592.