

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LAURENT SCHWARTZ

Solution élémentaire d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 87, p. 345-350

http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__345_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A COEFFICIENTS CONSTANTS

[d'après B. MALGRANGE ⁽¹⁾]

par Laurent SCHWARTZ

1. Première recherche d'une solution élémentaire.

Soit D un opérateur différentiel à coefficients constants dans $X^n = \mathbb{R}^n$. Une solution élémentaire est une distribution E telle que

$$(1) \quad D.E = D\delta * E = \delta$$

L'idée naturelle est de chercher une telle solution par transformation de Fourier. Si E est tempérée, et si on désigne par P le polynôme en y transformé de Fourier de $D\delta_x$, et par F_y l'image de Fourier de E_x , (1) équivaut à

$$(2) \quad P(y)F_y = 1$$

de sorte que la recherche de F_y est la résolution d'un problème de division, dont on ne sait pas s'il a des solutions quand la variété d'équation $P(y) = 0$ a des singularités trop affreuses ⁽²⁾.

Supposons trouvée une solution élémentaire E , on peut se poser le problème suivant : Résoudre l'équation avec second membre

$$(3) \quad D.T = A .$$

Pour cela, la connaissance d'une solution élémentaire n'est pas suffisante. Si $E \in \mathcal{S}'$, on pourra résoudre (3) par

$$(4) \quad T = E * A + \text{solution de l'équation homogène, pour } A \in \mathcal{O}'_e .$$

Si $E \in \mathcal{O}'_e$, cette formule sera valable pour $A \in \mathcal{S}'$. De toute façon, une telle formule ne serait valable pour toute $A \in \mathcal{O}'$ que si $E \in \mathcal{E}'$, ce qui n'arrive jamais (sauf pour $D = \text{identité}$).

⁽¹⁾ L'ouvrage de MALGRANGE est paru depuis le présent exposé [3]. Les notations sont celles de la théorie des distributions.

⁽²⁾ Ce problème de division vient d'être résolu par HÖRMANDER, et, dans un cas plus général, par LOJASIEWICZ (démonstration non encore publiée).

2. L'espace $S(\Gamma)$.

Soit Γ un ensemble non vide du dual Y^n de R^n . $S(\Gamma)$ est l'ensemble des φ , fonctions indéfiniment différentiables sur X^n , telles que, pour tout $y \in \Gamma$, la fonction $\exp(-2\pi\langle x, y \rangle) \varphi(x)$ soit dans S_x . On mettra sur $S(\Gamma)$ la topologie la moins fine rendant continues les applications $\varphi \rightarrow \exp(-2\pi\langle x, y \rangle)$ de $S(\Gamma)$ dans S . Si $\hat{\Gamma}$ est l'enveloppe convexe de Γ , $S(\hat{\Gamma})$ est algébriquement et topologiquement identique à $S(\Gamma)$, on peut donc supposer Γ convexe; les dérivations, les translations ou convolutions avec \mathcal{E}' , les multiplications par des polynômes ou par \mathcal{O}_M , sont des opérateurs continus dans $S(\Gamma)$. A défaut de pouvoir montrer que D est un monomorphisme de S dans lui-même, on a le théorème suivant

THÉORÈME 1. - D est un monomorphisme ⁽³⁾ de $S(\Gamma)$ dans lui-même, dès que Γ est ouvert.

Autrement dit, si $\varphi \in S(\Gamma)$ est telle que $D.\varphi$ converge vers 0 dans $S(\Gamma)$, alors φ converge vers 0 dans $S(\Gamma)$. On peut toujours choisir un système d'axes tel que

$$(5) \quad D = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^p + \sum_{k=p-1}^0 D^k \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k$$

où les D^k sont des dérivations en $\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Il suffira alors de démontrer que D est un monomorphisme dans $S(\Gamma)$, lorsque Γ est un segment ouvert (a, b) situé sur l'axe des y_1 .

La démonstration repose alors sur la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe. Soit $\varphi \in S(a, b)$. $\mathcal{F}_\varphi = \psi$ est une fonction de y qui, pour tout système $(y_2, y_3 \dots y_n)$ se prolonge en une fonction holomorphe de $y_1 + i\gamma_1$ pour $\gamma_1 \in (-b, -a)$. Mais la formule de Jensen montre que, si Q est un polynôme unitaire en Z de degré p , G une fonction holomorphe de Z dans le disque $|Z| < R$, on a

$$(6) \quad |G(0)| \leq \left(\sup_{|Z| < R} |Q(Z) \cdot G(Z)| \right) / R^p$$

L'intérêt de cette majoration est que son coefficient (le meilleur possible) est indépendant des coefficients du polynôme Q . On en déduit que si

⁽³⁾ Monomorphisme = homomorphisme (au sens de Bourbaki) biunivoque, épimorphisme = homomorphisme sur.

$a < c - R < c < c + R < b$, on aura

$$(7) \quad |\Psi(y_1 - ic, y_2, \dots, y_n)| \leq \frac{1}{R^p} \sup_{\substack{y_1, y_2, \dots, y_n, \gamma \\ \gamma = c - R}} |\Psi(y_1 - i\gamma, y_2, \dots, y_n) P(y_1 - i\gamma, y_2, \dots, y_n)|$$

En écrivant des inégalités analogues pour les produits de polynômes par des dérivées de Ψ , et compte tenu de ce que $\Psi(y_1 - ic, y_2, \dots, y_n)$ est l'image de Fourier de $\exp(-2\pi cx_1) \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on a bien montré que si $\exp(-2\pi(c + R)x_1) D\varphi$ converge vers 0 dans \mathcal{S} , alors $\exp(-2\pi cx_1) \varphi$ converge vers 0 dans \mathcal{S} ,

C.Q.F.D.

En appliquant le théorème 1 à $t_D = \check{D}$, on en déduit par dualité :

COROLLAIRE. - D applique $(\mathcal{S}(\Gamma))'$ sur $(\mathcal{S}(\Gamma))'$ ⁽⁴⁾

3. Existence d'une solution élémentaire.

Un élément de $(\mathcal{S}(\Gamma))'$ est une distribution d'ordre fini dont la croissance est sûrement majorée à l'infini par $e^{2\pi Cr}$, C borne supérieure de la distance d'un point de Γ à l'origine. $(\mathcal{S}(\Gamma_1))' \supset (\mathcal{S}(\Gamma_2))'$ si $\Gamma_1 \supset \Gamma_2$; en particulier si $\Gamma \supset \{0\}$, $(\mathcal{S}(\Gamma))' \supset \mathcal{S}'$. Donc, d'après le corollaire :

THÉORÈME 2. - Il existe une solution élémentaire E de l'opérateur D ; quelle que soit $A \in \mathcal{S}'$, et $\varepsilon > 0$, il existe $T \in (\mathcal{S}(B_\varepsilon))'$ ($B_\varepsilon =$ boule de centre 0 et de rayon ε), donc d'ordre fini et majorée à l'infini par $\exp(2\pi \varepsilon r)$, telle que $D.T = A$. (On ne sait pas s'il existe $T \in \mathcal{S}'$, ni si $E \in \mathcal{S}'$ (4bis).

4. Opérateur D dans les espaces \mathcal{E} et \mathcal{E}' .

THÉORÈME 3. - D est un monomorphisme (fort ou faible) de \mathcal{E}' dans \mathcal{E}' et un épimorphisme (fort ou faible) de \mathcal{E} sur \mathcal{E} .

Si $T \in \mathcal{E}'_K$ (K compact de X^n), et si $D.T \rightarrow 0$ dans \mathcal{E}'_K la formule $T = E * DT$ montre que T converge vers 0 dans \mathcal{E}'_K . Donc D , restreint à \mathcal{E}'_K est un monomorphisme, donc $D.\mathcal{E}'_K$ est complet donc fermé dans \mathcal{E}' , où il est aussi faiblement fermé (\mathcal{E} étant réflexif).

D'après le théorème de LIONS [2] sur le support d'un produit de convolution [2] si K est convexe, $D.\mathcal{E}'_K = (D.\mathcal{E}') \cap \mathcal{E}'_K$; alors $D.\mathcal{E}'$ est un sous-espace

⁽⁴⁾ Le transposé d'un monomorphisme d'un espace de Fréchet dans un espace de Fréchet est une surjection.

(4bis) On le sait maintenant grâce à la solution du problème de la division, voir note 2.

vectoriel de \mathcal{E}' dont l'intersection avec chaque \mathcal{E}'_K et par suite avec chaque ensemble borné faiblement fermé de \mathcal{E}' est faiblement fermée ; d'après un théorème de Banach, $D \cdot \mathcal{E}'$ est faiblement fermé dans \mathcal{E}' . Cela prouve que ${}^t D$ est un homomorphisme faible ou fort de \mathcal{E} dans \mathcal{E} , donc un épimorphisme puisque D est biunivoque ; alors D est un monomorphisme faible (et on peut démontrer qu'il est un monomorphisme fort, parce que \mathcal{E} est un espace de Fréchet-Schwartz) ⁽⁵⁾. En substituant ensuite \check{D} à D , on démontre bien le théorème.

COROLLAIRE. - Quelle que soit $\alpha \in \mathcal{E}$, il existe $\beta \in \mathcal{E}$ telle que $D \cdot \beta = \alpha$. (Propriété entièrement nouvelle ; même pour $D = \Delta$, non triviale).

5. L'opérateur D dans les espaces \mathcal{O} et \mathcal{O} .

Soit k l'ordre de la solution élémentaire E .

Soit $\varphi \in \mathcal{E}'$; si $D \cdot \varphi \in \mathcal{O}_K^{m+k}$, K convexe compact, alors $\varphi = E * D \cdot \varphi \in \mathcal{O}^m$ et même $\in \mathcal{O}_K^m$ (théorème de Lions). De plus si $D\varphi \rightarrow 0$ dans \mathcal{O}_K^{m+k} , alors $\varphi \rightarrow 0$ dans \mathcal{O}_K^m . Soit $V = (D \cdot \mathcal{O}^m) \cap \mathcal{O}^{m+k}$. Nous venons de montrer que si $D \cdot \varphi \rightarrow 0$ dans V muni de la topologie limite inductive θ des $V \cap \mathcal{O}_K^{m+k}$, $\varphi \rightarrow 0$ dans \mathcal{O}^m ; mais cette topologie limite inductive θ est plus fine que la topologie induite par \mathcal{O}^{m+k} , de sorte que nous ne savons pas si, lorsque $D\varphi \rightarrow 0$ dans \mathcal{O}^{m+k} , $\varphi \rightarrow 0$ dans \mathcal{O}^m .

Nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME. - Si E est limite inductive stricte d'une suite d'espaces E_ν , et si H est une partie convexe de E tel que chacun des $H \cap E_\nu$ soit compact dans E_ν , alors la topologie induite par E sur H est identique à la limite inductive localement convexe des topologies des $H \cap E_\nu$.

Nous prendrons ici $E = \mathcal{O}^{m+k}$, $E_\nu = \mathcal{O}_K^{m+k}$, $H =$ sous-ensemble de V formé des $\varphi \in V$ dont les dérivées (au sens distributions) d'ordre $\leq m+k+1$ sont des fonctions majorées par 1. Sur H , la topologie limite inductive des $H \cap \mathcal{O}_K^{m+k}$ est plus fine que θ ; elle doit d'après le lemme être identique à la topologie induite par \mathcal{O}^{m+k} , donc sur H la topologie θ est identique à la topologie induite par \mathcal{O}^{m+k} . Mais si $D \cdot \varphi \in \mathcal{O}^{m+k+1}$ et $\rightarrow 0$ dans \mathcal{O}^{m+k+1} , elle fini par être dans H et $\rightarrow 0$ dans \mathcal{O}^{m+k} , donc $\varphi \rightarrow 0$ dans \mathcal{O}^m . D'où

⁽⁵⁾ \mathcal{E} a été appelé par GROTHENDIECK "espace de Schwartz" si, quel que soit le voisinage \mathcal{U} de 0, disqué, il existe un autre voisinage \mathcal{V} de 0, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tel que l'image de \mathcal{V} dans l'espace normé séparé $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ soit précompacte.

THÉORÈME 4. - Si l'on munit \mathcal{D} de la topologie \mathcal{T} la moins fine rendant continues toutes les immersions de \mathcal{D} dans les \mathcal{D}^m , D est un monomorphisme.

REMARQUE. - $D.\mathcal{D} = (D.\mathcal{E}') \cap \mathcal{D}$ est fermé dans \mathcal{D} .

Le dual de $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$ est l'espace \mathcal{D}'_F des distributions d'ordre fini sur \mathbb{R}^n . D'où en raisonnant sur tD , le théorème 4 donne par dualité.

THÉORÈME 5. - D applique \mathcal{D}'_F sur \mathcal{D}'_F .

Quelle que soit A , distribution d'ordre fini, il existe T , distribution d'ordre fini, telle que $D.T = A$. Plus précisément si $A \in \mathcal{D}'^m$, il existe $T \in \mathcal{D}'^{m+k+1}$, telle que $D.T = A$.

Cela ne permet pas d'affirmer que $D.\mathcal{D}' = \mathcal{D}'$ ⁽⁶⁾.

6. Cas des opérateurs hypoelliptiques.

L'opérateur D est dit hypoelliptique si $T \in \mathcal{D}'$ est une fonction indéfiniment dérivable dans tout ouvert Ω où $D.T$ est une fonction indéfiniment dérivable.

THÉORÈME 6. - Si D est hypoelliptique, il applique \mathcal{D}' sur \mathcal{D}' .

Car soit E la solution élémentaire. Dans le complémentaire de l'origine c'est une fonction indéfiniment dérivable. Donc, si $\alpha \in \mathcal{D}$ est égale à 1 sur un voisinage de 0 de \mathbb{R}^n , $\varpi = \alpha E$ est une paramétrix c'est-à-dire $\varpi \in \mathcal{E}'$ et

$$(6) \quad D.\varpi = \delta - L, \quad L \in \mathcal{D}.$$

Alors, si $A \in \mathcal{D}'$:

$$A = \underbrace{L * A}_{\in \mathcal{E} = D.\mathcal{E}} + \underbrace{D.(\varpi * A)}_{\in D.\mathcal{D}'} \in D.\mathcal{D}'.$$

REMARQUE. - Comme $D.\mathcal{D}$ est fermé dans \mathcal{D} , D est un homomorphisme faible de \mathcal{D}' dans \mathcal{D}' , et comme il est épijectif, c'est un épimorphisme faible.

REMARQUE. - On démontre sans difficulté que le quotient $\mathcal{E}/D.\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{D}'/D.\mathcal{D}'$) est l'espace vectoriel de cohomologie de \mathbb{R}^n , $H^1(\mathbb{R}^n; \mathcal{F})$, où \mathcal{F} est le faisceau des germes de fonctions indéfiniment différentiables (resp. des germes de distributions) solutions de $DT = 0$. Cela prouve par une autre méthode que,

⁽⁶⁾ Ce théorème a été démontré depuis par EHRENPREIS [1]. EHRENPREIS a publié beaucoup de travaux dans cette direction, et a retrouvé indépendamment plusieurs des théorèmes énoncés ici.

si D est hypoelliptique,

$$\mathcal{O}'/D\mathcal{O}' = \mathcal{E}/D\mathcal{E} = \{0\} ,$$

donc, $D\mathcal{O}' = \mathcal{O}'$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] EHRENPREIS (Léon). - The division problem for distributions, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 41, 1955, p. 756-758.
- [2] LIONS (Jacques-Louis). - Supports de produits de composition, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 1530-1532.
- [3] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions aux équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 271-356 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).

[Juin 1958]

