

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES DIXMIER

Fonction sphériques

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 79, p. 279-286

[<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__279_0>](http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__279_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS SPHÉRIQUES

par Jacques DIXMIER

[d'après R. GODEMENT ⁽¹⁾]

1. Notations.

G : groupe localement compact unimodulaire ; $M(G)$ (resp. $L(G)$) : algèbre des mesures (resp. fonctions continues) complexes à support compact (le produit de composition de α et β est noté $\alpha\beta$) ; représentation continue de G dans un espace de Banach H = représentation fortement continue de G par des opérateurs continus de H ; H^* : dual de H . Toute représentation $g \rightarrow T_g$ de G se prolonge en une représentation $\alpha \rightarrow T_\alpha$ de $M(G)$ par $T_\alpha = \int T_g d\alpha(g)$.

L'irréductibilité de $g \rightarrow T_g$ signifie classiquement : pas de sous-espace fermé stable pour les T_g (sauf 0 et H). Ici, il faut une définition plus stricte (équivalente en dimension finie et pour les représentations unitaires dans les espaces hilbertiens) : tout opérateur continu sur H est limite forte de combinaisons linéaires des T_g .

dg : mesure de Haar sur G . Toute fonction continue $\theta(g)$ sur G est identifiée à la mesure $\theta(g)dg$. Si f est une fonction continue à support compact sur G , $\theta(f)$ désigne donc $\int \theta(g)f(g)dg$.

K : sous-groupe compact de G . L'injection de K dans G définit une injection de $M(K)$ dans $M(G)$ par laquelle on identifie $M(K)$ à une sous-algèbre de $M(G)$. Toute fonction continue sur K s'identifie à une mesure sur K donc sur G . Un élément variable de K sera toujours désigné par k .

2. Définition des fonctions sphériques.

Soit $g \rightarrow T_g$ une représentation irréductible de G dans H . Soit d une classe de représentations irréductibles de K , χ_d son caractère (normalisé de façon que $\chi_d \chi_d = \chi_d$). Soit $H(d)$ le sous-espace des $x \in H$ qui, par $k \rightarrow T_k$, se transforment suivant d ($x \in H(d) \Leftrightarrow$ les $T_k x$ engendrent un

⁽¹⁾ GODEMENT (Roger). - A theory of spherical functions, I, Trans. Amer. math. Soc., t. 73, 1952, p. 496-556.

sous-espace de dimension finie dans lequel $k \rightarrow T_k$ induit une représentation dont toutes les composantes irréductibles sont de classe d).

$H(d)$ est fermé dans H , et même il existe un projecteur continu de H sur $H(d)$, à savoir $E(d) = \frac{T_d}{\chi_d}$. Les $E(d)$ s'annulent 2 à 2. Si $\dim H(d) = p \dim(d)$, on dit que d est contenue p fois dans $g \rightarrow T_g$.

Si $H(d)$ est de dimension finie, $E(d)T_g$ est de rang fini, donc on peut former $\varphi_d(g) = \text{Tr}(E(d)T_g)$. Alors, φ_d s'appelle la fonction sphérique de type d de la représentation. On dit qu'elle est de hauteur p .

Une fonction sphérique est continue, et "quasi-bornée" (i.e. $|\varphi_d(g)| \leq a \rho(g)$, où ρ est une fonction ≥ 0 semi-continue inférieurement sur G , bornée sur tout compact, telle que $\rho(gg') \leq \rho(g) \rho(g')$); en effet, $|\varphi_d(g)| \leq a \|T_g\|$.

3. Exemples de fonctions sphériques.

a. Prenons $K = e$. Il n'y a qu'une classe d , et $H(d) = H$. En général, pas de fonction sphérique. Mais, si G est compact, les fonctions sphériques existent et ne sont autres que les caractères de G . De même, si G est abélien, les caractères de G apparaissent comme fonctions sphériques (de hauteur 1).

b. Si G est compact, et si $K = G$, les caractères de G apparaissent encore comme fonctions sphériques, cette fois de hauteur 1.

c. Soient G le groupe des déplacements du plan $R^2 = C$, K le sous-groupe compact des rotations autour de 0, N le sous-groupe abélien des translations, qu'on peut identifier à C . Tout élément de G est de la forme $z' \rightarrow e^{i\theta} z' + z$, ce qui permet de l'identifier à un couple (θ, z) , $0 < \theta < 2\pi$, $z \in C$. Soit χ un caractère de N , qu'on peut identifier à un nombre complexe ζ . Soit $g \rightarrow T_g$ la représentation unitaire de G induite par χ qui opère dans $L^2(K)$. Elle est irréductible si $\zeta \neq 0$. Restreinte à K , cette représentation s'identifie à la représentation régulière de K . Pour tout caractère $e^{in\theta}$ de K (n entier rationnel), il existe donc une fonction sphérique correspondante, de hauteur 1.

Elle vaut, à un facteur constant près : $e^{in\theta} J_0(|\zeta z|)$.

d. Soient G le groupe hyperbolique, ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, \dots, d \text{ réels}, \quad ad - bc = 1,$$

et K le sous-groupe compact (maximal et abélien) des

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

En vertu du théorème 1 ci-dessous, les fonctions sphériques sont toutes de hauteur 1; si d est la représentation $\theta \rightarrow e^{i\theta}$ de K les fonctions sphériques de type d vérifient donc

$$(1) \quad \varphi_d(kgk') = \chi_d(k) \varphi_d(g) \chi_d(k'),$$

parce que d est de dimension 1. En outre elles vérifient (théorème 3 ci-dessous) l'équation fonctionnelle

$$(2) \quad \varphi_d(e) \int \varphi_d(kgk^{-1}g') dk = \varphi_d(g) \varphi_d(g').$$

et aussi (théorème 5) des équations différentielles. La propriété (1) montre qu'il suffit de les déterminer sur les matrices

$$\delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix};$$

prenant $x = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda^{-2})$ comme paramètre, on trouve comme solution générale de (2) les fonctions

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + \cos \theta \sqrt{x^2 - 1})^\rho A_m^n (1 + e^{i\theta} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}) d\theta$$

où ρ est un paramètre ∞ complexe arbitraire.

Pour $n = 0$ on obtient donc toutes les fonctions de Legendre $P_\rho(x)$. L'équation fonctionnelle (2) est une partie du "théorème d'addition" pour ces fonctions.

Ces formules intégrales ont été généralisées comme suit par HARISH-CHANDRA. Soient G de Lie semi-simple connexe et $K \subset G$ compact maximal; si le centre de G est fini on a (IWASAWA) $G = K.N$ où N est un sous-groupe résoluble de G ; soit alors $n \rightarrow \alpha(n)$ une représentation de dimension 1 de N ; posons

$$\alpha(kn) = \alpha(n), \quad \text{d'où } \alpha(g) \text{ sur } G$$

et

$$\varphi_\alpha(g) = \int \alpha(gk) dk$$

alors φ_α est la fonction sphérique la plus générale de type d_0 (représentation $k \rightarrow 1$ de K).

4. Existence des fonctions sphériques.

THÉOREME 1. - Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe admettant une représentation linéaire fidèle. Soient K un sous-groupe compact maximal de G , d une représentation irréductible de K . Alors, d est contenu au plus $\dim(d)$ fois dans chaque représentation irréductible $g \rightarrow T_g$ de G .

a. Construction de certaines représentations induites : d'après IWASAWA, il existe un sous-groupe N connexe résoluble de G tel que tout $g \in G$ ait une représentation unique $g = nk$, $n \in N$, $k \in K$, n et k dépendant continuellement de g (ce qu'on écrit $G = N.K$). Soit $n \rightarrow \alpha(n)$ une représentation continue de dimension 1 de N . Soit H l'espace des fonctions continues $\theta(g)$ satisfaisant à $\theta(ng) = \alpha(n)\theta(g)$. Soit θ' la restriction de θ à K . Alors, $\theta \rightarrow \theta'$ est une application linéaire biunivoque de H sur $L(K)$, espace de Banach des fonctions continues sur K , de sorte qu'on peut identifier H et $L(K)$. Définissons une représentation (non irréductible) $g \rightarrow V_g$ de G sur H par $V_g\theta(g') = \theta(g'g)$. Sa restriction à K est la représentation régulière droite de K sur $L(K)$, donc contient d exactement $\dim(d)$ fois.

b. Toute représentation irréductible de dimension finie $g \rightarrow U_g$ de G dans un espace H_1 est contenue dans une des représentations précédentes (donc le théorème est vrai pour une telle représentation) : soit $g \rightarrow U_g^1$ la représentation contragrédiente dans l'espace dual H_1^* . Il existe un $a' \in H_1^*$, $a' \neq 0$, tel que $U_n^1 a' = \alpha(n)^{-1} a'$ pour $n \in N$ (théorème de Lie). Pour $a \in H_1$, posons $\theta_a(g) = (U_g a, a')$. On a $\theta_a(ng) = \alpha(n)\theta_a(g)$, et $a \rightarrow \theta_a$ est une application linéaire biunivoque de H_1 dans H . Enfin, $\theta_{U_g a}(g') = \theta_a(g'g)$.

c. Les représentations irréductibles de dimension finie $g \rightarrow U_g$ de G forment un système complet de représentations de $L(G)$, i.e. $U_f = 0$ pour toute $g \rightarrow U_g$ entraîne $f = 0$. On pense alors à un lemme dû en partie à KAPLANSKY : soit A une algèbre associative sur le corps complexe, ayant suffisamment de représentations de dimension $\leq n$; alors, toute représentation irréductible de A sur un espace de Banach est de dimension $\leq n$ (on utilise l'existence d'un polynôme non commutatif $P(x_1, \dots, x_r)$ linéaire en chaque x_i , tel que $P(A_1, \dots, A_r) = 0$ quels que soient $A_1, \dots, A_r \in M_n$ (algèbre des matrices carrées de degré n), et tel que $P(A_1, \dots, A_r) \neq 0$ pour certains $A_1, \dots, A_r \in M_{n+1}$).

d. Le lemme s'applique à la situation du théorème de la manière suivante : soit $L(d)$ la sous-algèbre de $L(G)$ formée des $f \in L(G)$ telles que $\overline{\bigwedge_d} f = f \overline{\bigwedge_d} = f$. Pour $f \in L(d)$, on a $E(d)T_f = T_f E(d) = T_f$, donc, si $\tilde{T}_f$ désigne l'opérateur

induit par T_f dans $H(d)$, $T_f = 0 \Leftrightarrow \tilde{T}_f = 0$. D'autre part, $g \rightarrow T_g$ irréductible $\Rightarrow f \rightarrow \tilde{T}_f$ irréductible ($f \in L(d)$). Alors, $L(d)$ admet suffisamment de représentations irréductibles de dimension $\leq \dim(d)$ d'après b., donc toute représentation irréductible de $L(d)$ est de dimension $\leq \dim(d)$, d'où le théorème.

Une légère modification de la démonstration montre que le théorème reste valable si G est localement compact, K sous-groupe compact, et s'il existe un sous-groupe abélien N tel que $G = N.K$.

5. Caractérisation d'une représentation par ses fonctions sphériques.

THÉOREME 2. - Deux représentations unitaires irréductibles $g \rightarrow T_g$ et $g \rightarrow T'_g$ de G sont unitairement équivalentes si, pour une d , leurs fonctions sphériques de type d sont égales (et $\neq 0$).

L'hypothèse entraîne que les représentations irréductibles $f \rightarrow \tilde{T}_f$ et $f \rightarrow \tilde{T}'_f$ de $L(d)$ ont même caractère, donc sont algébriquement équivalentes : il existe un isomorphisme de $H(d)$ sur $H'(d)$ qui transforme $\tilde{T}_f$ en $\tilde{T}'_f$. Comme ici il s'agit de représentations unitaires, la correspondance $\tilde{T}_f \leftrightarrow \tilde{T}'_f$ est compatible avec l'opération d'adjonction, de sorte que l'isomorphisme de $H(d)$ sur $H'(d)$ est unitaire. Il existe donc $a \in H(d)$, $a' \in H'(d)$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, avec $(\tilde{T}_f a, a) = (\tilde{T}'_f a', a')$ pour $f \in L(d)$. Soient $\theta(g) = (T_g a, a)$, $\theta'(g) = (T'_g a', a')$. Pour $f \in L(G)$, on a :

$$\theta(f) = (T_f a, a) = (T_f E(d) a, E(d) a) = \left(\int_{\chi_d} T_f \int_{\chi_d} a, a \right) = \left(\int_{\chi_d} \int_{\chi_d} a, a \right) = \theta(f)$$

parce que $\int_{\chi_d} \int_{\chi_d} \in L(d)$. Donc $\theta = \theta'$, ce qui achève la démonstration.

6. Equation fonctionnelle des fonctions sphériques.

THÉOREME 3. - Soit $\varphi \neq 0$ une fonction continue quasi-bornée. Alors, φ est proportionnelle à une fonction sphérique de hauteur 1 si et seulement si

$$(*) \quad \varphi(e) \int \varphi(kg k^{-1} g') dk = \varphi(g) \varphi(g')$$

a. L'opération $^\circ$: soit μ une mesure sur G . On pose : $\mu^\circ = \int \varepsilon_k \mu \varepsilon_k^{-1} dk$; μ° permute avec les ε_k , donc avec toute mesure portée par K . Une opération analogue se définit sur les fonctions continues, les mesures à support compact, etc.

b. (*) signifie (pour $\varphi(e) = 1$) que $\varphi(\varepsilon_g^\circ \varepsilon_{g'}) = \varphi(\varepsilon_g) \varphi(\varepsilon_{g'})$, donc équivaut à $\varphi(\alpha^\circ \beta) = \varphi(\alpha) \varphi(\beta)$ pour $\alpha, \beta \in M(G)$, ou encore à $\varphi(f^\circ f') = \varphi(f) \varphi(f')$ pour $f, f' \in L(G)$.

LEMME. - (1) $\varphi(f^0 f) = \varphi(f) \varphi(f')$ pour $f, f' \in L(G)$ équivaut à l'ensemble des conditions suivantes : (2) $\varphi = \varphi^0$; (3) $\chi_d \varphi = \varphi$ pour une d ; (4) $\varphi(ff') = \varphi(f) \varphi(f')$ pour $f, f' \in L^0(d)$.

$$(1) \Rightarrow (2) \text{ parce que } (*) \Rightarrow \varphi(f) \varphi(e) = \varphi(e) \int \varphi(kgk^{-1}) dk = \varphi(e) \varphi^0(g) ;$$

(1) $\Rightarrow$ (4) est clair ;

(1) $\Rightarrow$ (3) : soit d telle que $\chi_d \varphi = 0$; comme $\chi_d \in M^0(G)$, on a $\varphi(\overline{\chi_d} \alpha) = \varphi(\overline{\chi_d}) \varphi(\alpha)$ pour $\alpha \in M(G)$, donc $\chi_d \varphi = \varphi(\overline{\chi_d}) \varphi$; comme $\chi_d \overline{\chi_d} = \chi_d$, on en déduit $\varphi(\overline{\chi_d})^2 = \varphi(\overline{\chi_d})$, d'où $\varphi(\overline{\chi_d}) = 1$, et $\chi_d \varphi = \varphi$.

(2) et (3) et (4) $\Rightarrow$ (1) : pour $f, f' \in L(G)$, on a

$$\varphi(f^0 f') = (\chi_d \varphi^0)(f^0 f') = \varphi(\overline{\chi_d} f^0 \overline{\chi_d}) = \varphi(\overline{\chi_d} f^0 \overline{\chi_d} f'^0) = \varphi(\overline{\chi_d} f^0) \varphi(\overline{\chi_d} f'^0) = \varphi(f) \varphi(f').$$

c. Si φ est une fonction sphérique de type d et de poids 1, on a (2), (3), (4) :

$$\varphi(kgk^{-1}) = \text{Tr}(E(d) T_k T_g T_k^{-1}) = \text{Tr}(E(d) T_g) = \varphi(g)$$

d'où $\varphi = \varphi^0$. Puis :

$$\chi_d \varphi(g) = \text{Tr}(E(d) T_{\frac{1}{\chi_d}} T_g) = \text{Tr}(E(d) T_g) = \varphi(g),$$

d'où $\varphi = \chi_d \varphi$. Enfin

$$\varphi(ff') = \text{Tr}(E(d) T_f T_{f'}) ;$$

mais, si $f \in L^0(G)$, $\tilde{T}_f$ est un scalaire, d'où $\varphi(ff') = \varphi(f) \varphi(f')$.

d. Si $\varphi = \varphi^0$, $\chi_d \varphi = \varphi$, $\varphi(ff') = \varphi(f) \varphi(f')$ pour $f, f' \in L^0(d)$, φ est fonction sphérique de type d et de hauteur 1 : la démonstration, trop longue, ne peut être donnée ici. (Lorsque φ est bornée, on prend la représentation régulière de $L^1(G)$ sur $L^1(G)/m$, m désignant un idéal à gauche maximal de $L^1(G)$ construit à partir de φ ; cette représentation est algébriquement irréductible, et définit une représentation irréductible de G).

7. Propriétés différentielles des fonctions sphériques.

Pour pouvoir en parler, on suppose que G est un groupe de Lie connexe, et on démontre le théorème suivant :

THÉOREME 4. - Toute fonction sphérique est analytique. (Il s'agit de structures analytiques réelles).

Il suffit de montrer que si $\dim H(d) < +\infty$, $a \in H(d)$, $b \in H^*$, alors $g \rightarrow (T_g a, b)$ est analytique, autrement dit que a est un "vecteur analytique" pour $g \rightarrow T_g$. Pour cela, on considère les distributions à support compact sur G , qui forment une algèbre $D(G)$ pour le produit de composition. Soit $U(G)$ la sous-algèbre de $D(G)$ formée des $\alpha \in D(G)$ dont le support est e . Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un système de coordonnées au voisinage de e , toute $\alpha \in U(G)$ est combinaison linéaire finie de distributions

$$f \rightarrow \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} f(e)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}.$$

Soit $\alpha \in U(G)$; si f est une fonction indéfiniment différentiable sur G , αf l'est aussi, et $f \rightarrow \alpha f$ est un "opérateur différentiel" X_α , au sens classique, permutable aux translations à droite; et $\alpha \rightarrow X_\alpha$ est un isomorphisme de $U(G)$ sur l'algèbre des opérateurs différentiels permutables aux translations à droite. L'opération $\alpha \rightarrow \alpha^0$ existe dans $D(G)$ et dans $U(G)$.

On peut définir T_α , pour $\alpha \in D(G)$, mais c'est un peu plus délicat que pour $\alpha \in M(G)$. On pose $(T_\alpha a, b) = \int (T_g a, b) d\alpha(g)$ pour $a \in H$, $b \in H^*$. Mais il faut que $(T_\alpha a, b)$ soit indéfiniment différentiable, autrement dit que a soit un "vecteur différentiable". Le sous-espace H_∞ de ces a est partout dense dans H d'après GÄRDING. On obtient ainsi une représentation $\alpha \rightarrow T_\alpha$ de $D(G)$ dans H_∞ . Alors, $E(d)(H_\infty) = \bigcap_d (H_\infty) \subset H_\infty$ est partout dense dans $H(d)$, donc égal à $H(d)$ si $H(d)$ est de dimension finie. Soit $\alpha \in D^0(G)$; T_α est permutable aux T_k , donc à $E(d)$, donc T_α conserve $H(d)$, donc tout a d'une base de $H(d)$ vérifie une équation $(T_\alpha - \lambda)^n a = 0$. Posant $\theta(g) = (T_g a, b)$, ceci se traduit, si $\alpha \in U^0(G)$, par $(X_\alpha - \lambda)^n \theta = 0$. Si X_α est elliptique, un théorème de Bernstein entraîne que θ est analytique. Pour obtenir un tel α , on part d'un $\alpha \in U(G)$ elliptique, et on forme α^0 qui est encore elliptique.

THÉORÈME 5. - Soit φ une fonction analytique quasi-bornée sur G , telle que $\varphi = \varphi^0$. Alors, φ est proportionnelle à une fonction sphérique de hauteur 1 si et seulement si φ est fonction propre de tout opérateur différentiel X_α , $\alpha \in U^0(G)$.

Si φ est une fonction sphérique de poids 1, on voit comme pour le théorème 3 que $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ pour $\alpha \in D^0(G)$, $\beta \in D^0(G)$. Fixons $\alpha \in U^0(G)$.

On a $\alpha' \varphi(\beta) = C \varphi(\beta)$ pour $\beta \in D^0(G)$ (on pose $d\alpha(g^{-1}) = d\alpha'(g)$), donc aussi pour $\beta \in D(G)$ puisque $(\alpha' \varphi)^0 = \alpha' \varphi$ et $\varphi^0 = \varphi$. D'où $\alpha' \varphi = C \varphi$, ce qui montre que φ est fonction propre de $X_{\alpha'}$.

Réciproquement, supposons $\alpha \varphi = \lambda(\alpha) \varphi$ pour $\alpha \in U^0(G)$. Fixons $g' \in G$, et posons $\theta(g) = \int \varphi(gkg'k^{-1}) dk$. On a : $\alpha \theta(g) = \int \alpha \varphi(gkg'k^{-1}) dk = \lambda(\alpha) \theta(g)$ pour $\alpha \in U^0(G)$. Donc $\theta(\alpha) = \alpha' \theta(e) = \lambda(\alpha') \theta(e)$. De même $\varphi(\alpha) = \lambda(\alpha') \varphi(e)$, d'où $\theta(\alpha) = C \varphi(\alpha)$ pour toute $\alpha \in U^0(G)$, donc pour toute $\alpha \in U(G)$ puisque $\varphi = \varphi^0$ et $\theta = \theta^0$. Donc $\theta = C \varphi$ puisque φ et 0 sont analytiques. Alors, $C \varphi(g) = \int \varphi(gkg'k^{-1}) dk$, et, faisant $g = e$, on trouve $C \varphi(e) = \varphi(g')$; d'où $\varphi(g) \varphi(g') = \varphi(e) \int \varphi(gkg'k^{-1}) dk$, ce qui est l'équation fonctionnelle des fonctions sphériques de hauteur 1.
