

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-LOUIS KOSZUL

Relations d'équivalence sur les courbes algébriques ayant des points multiples

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 75, p. 247-254

http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__247_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RELATIONS D'ÉQUIVALENCE SUR LES COURBES ALGÈBRIQUES
AYANT DES POINTS MULTIPLES

par Jean-Louis KOSZUL
[d'après : Maxwell ROSENLICHT⁽¹⁾]

1. Systèmes complets de diviseurs.

Soit C une courbe algébrique ayant k pour corps de définition dans un espace projectif S^n . Son idéal p est un idéal premier homogène de l'algèbre de polynômes $k[X_0, X_1, \dots, X_n]$. Le corps des quotients de $k[X]/p$ qui est engendré par les images x_i des X_i sera noté $k(x)$. On désigne par K le corps des fonctions de C rationnelles sur k qui est constitué par les éléments de $k(x)$ de la forme $F(x)/G(x)$ où F et G sont des polynômes homogènes de même degré dans $k[X]$ et $G \notin p$.

A toute forme $F \in k[X]$ est associé un diviseur entier (F) du corps K . C'est le P.P.C.M. des diviseurs des fonctions $F(x)/G(x)$ où G est une forme de même degré que F et $G(x) \neq 0$. Supposons que tous les points de C soient simples relativement à k , on appelle alors système complet de diviseurs un ensemble Λ de diviseurs entiers de K vérifiant la condition suivante : si $A \in \Lambda$, pour tout $f \in K$ tel que $(f)A$ soit entier, $(f)A \in \Lambda$. Il est bien connu que, pour m assez grand, l'ensemble des diviseurs des formes de degré m est un système complet. Ce résultat subsiste pour des courbes ayant des points multiples, à condition d'affaiblir la notion de système complet.

Soit P un point de C . Son anneau local est constitué par les quotients $F(x)/G(x) \in K$, où F et G sont des formes de même degré dans $k[X]$ et $G(P) \neq 0$. Pour que le point P soit simple relativement à k , il faut et il suffit que son anneau local dans K soit l'anneau d'une valuation de K sur k . Soit $\mathcal{O}$ l'intersection des anneaux locaux des points multiples de C . Un ensemble Λ de diviseurs entiers de K sera appelé un système complet de diviseurs de C s'il vérifie la condition suivante : si $A \in \Lambda$, pour tout

⁽¹⁾ ROSENLICHT (Maxwell). - Equivalence relations on algebraic curves, *Annals of Math.*, Series 2, t. 56, 1952, p. 169-191.

$f \in \sigma$ tel que $(f)A$ soit entier, $(f)A \in \Lambda$. Avec cette définition, on a le

THÉOREME 1. - Pour m assez grand, l'ensemble des diviseurs des formes de degré m est un système complet.

Soit L_r le sous-espace des éléments de $k(x)$ de la forme $F(x)/G(x)$ où F et G sont des formes dans $k[X]$ vérifiant les conditions :

- 1° degré F - degré $G = r$;
- 2° (F) est multiple de (G) ;
- 3° $G(P) \neq 0$ pour tout point multiple P de C . L'espace L_r contient le sous-espace $k_r[x]$ des $F(x)$ où F est une forme de degré r .

Le théorème signifie que, pour r assez grand, $L_r = k_r[x]$ et sa démonstration diffère peu de celle que l'on donne dans le cas d'une courbe sans point multiple.

2. Anneaux semi-locaux.

On appellera anneau semi-local un anneau noëthérien n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux maximaux. Lorsqu'il sera question d'anneau dans $K \supset k$, on sous-entendra toujours qu'il s'agit d'un anneau contenant k et dont K est le corps des quotients.

THÉOREME 2. - Soit K un corps de fonctions algébriques d'une variable sur k . Pour les anneaux $\sigma \subset K$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1° σ est semi-local,
- 2° Il existe dans σ un élément y transcendant sur k et des éléments $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tels que $K = k(y, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ et que σ soit l'ensemble des éléments de la forme $a/G(y)$, où $a \in k[y, \xi_1, \dots, \xi_n]$ et G est un polynôme à coefficients dans k tel que $G(0) \neq 0$.
- 3° Il existe des valuations v_i ($i = 1, 2, \dots, p$) de K et un entier N tel que σ contienne tous les $x \in K$ pour lesquels $v_i(x) \geq N$ ($i = 1, 2, \dots, p$).
- 4° σ n'est contenu que dans un nombre fini d'anneaux de valuation de K .

Pour passer de 1° à 2°, on choisit y dans l'intersection des idéaux maximaux de σ . Si G est un polynôme à coefficients dans k tel que $G(0) \neq 0$, alors $1/G(y) \in \sigma$. On démontre alors, en utilisant l'hypothèse que σ est noëthérien, que σ est une algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments ξ sur l'anneau des $F(y)/G(y)$ avec $G(0) \neq 0$.

Supposant maintenant que σ vérifie la condition 2°, tout élément z de K étant algébrique sur $k(y)$ et contenu dans le corps des quotients de σ peut

se mettre sous la forme $z = a/F(y)$, où $a \in \mathcal{O}$ et où F est un polynôme à coefficients dans k . Il existe donc pour tout $z \in K$ un entier n tel que $z y^n \in \mathcal{O}$. La fermeture intégrale de $k[y]$ dans K étant un $k[y]$ module de type fini, il existe un entier r tels que $y^r \overline{k[y]} \subset \mathcal{O}$. Soient v_i ($i = 1, 2, \dots, p$) les valuations de K telles que $v_i(y) > 0$. Si N est le plus grand des entiers $r v_i(y)$, pour tout $x \in K$ tel que $v_i(x) \geq N$ ($i = 1, 2, \dots, p$), il existera un polynôme G à coefficients dans k tel que $G(0) \neq 0$ et $v(G(y)x/y^N) \geq 0$ pour toute valuation de K dont l'anneau contient $k[y]$. Par suite $G(y)x \in \mathcal{O}$ et donc $x \in \mathcal{O}$.

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$ et $4^\circ \Rightarrow 1^\circ$ sont immédiats.

On dira qu'une place de K sur k est une place de l'anneau semi-local $\mathcal{O}$ si son anneau de valuation contient $\mathcal{O}$. D'après 4° , un anneau semi-local n'a qu'un nombre fini de places. On observera que la condition 3° entraîne : K est le corps des quotients de $\mathcal{O}$. Elle montre donc que toute intersection d'un nombre fini d'anneaux semi-locaux (et en particulier d'anneaux locaux) dans K est un anneau semi-local dans K .

Inversement, si $\mathcal{O}$ est un anneau semi-local dans K , ses idéaux maximaux m_i ($i = 1, 2, \dots, p$) définissent des anneaux locaux $\mathcal{O}_{m_i}$ dans K qui n'ont pas de place commune deux à deux et qui contiennent tous $\mathcal{O}$. On a $\mathcal{O} = \bigcap \mathcal{O}_{m_i}$ car, $\mathcal{O}$ étant noethérien, $a, b \in \mathcal{O}$ et $a/b \in \bigcap \mathcal{O}_{m_i}$ entraînent $a \in b\mathcal{O}$.

Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux anneaux semi-locaux n'ayant pas de place commune. Tout anneau local $\mathcal{O}$ contenant $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ contient l'un des anneaux $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$. Choisissons en effet un $x \in K$ tel que $v(x)$ soit très grand pour toute valuation v dont l'anneau contient $\mathcal{O}_1$ et $v(x-1)$ très grand pour toute valuation v dont l'anneau contient $\mathcal{O}_2$. Alors, $x \in \mathcal{O}_1$, $x-1 \in \mathcal{O}_2$, donc $x \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}$. Si $1/x \in \mathcal{O}$, alors quel que soit $a \in \mathcal{O}_1$, on a $ax \in \mathcal{O}$ et donc $a \in \mathcal{O}$. Si $1/x$ n'est pas dans $\mathcal{O}$, alors $1/(x-1) \in \mathcal{O}$ et l'on démontre que $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}$. On déduit de là que si $\mathcal{O}$ est un anneau semi-local dans K et si $\mathcal{O} = \bigcap \mathcal{O}_i$ où les $\mathcal{O}_i$ sont des anneaux locaux sans place commune deux à deux, la famille des $\mathcal{O}_i$ est, à l'ordre près, la famille des anneaux locaux $\mathcal{O}_{m_i}$ associés aux idéaux maximaux de $\mathcal{O}$.

On démontre d'autre part que, si $\mathcal{O}_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) est une famille d'anneaux semi-locaux sans place commune deux à deux et si $\bar{\mathcal{O}}_i$ désigne la fermeture intégrale de $\mathcal{O}_i$ dans K , alors

$$\dim_k \cap \bar{\sigma}_i / \cap \sigma_i = \sum \dim_k \bar{\sigma}_i / \sigma_i .$$

L'intersection des anneaux locaux des points multiples d'une courbe est donc un anneau semi-local σ qui détermine ces anneaux locaux. La dimension sur k de $\bar{\sigma}/\sigma$ peut être appelée le "degré de singularité de la courbe".

THÉORÈME 3. - Soient $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ des anneaux locaux sans place commune deux à deux dans un corps de fonctions algébriques d'une variable K . Il existe un modèle projectif C de K tel que

- 1° chaque σ_i soit l'anneau local d'un point au moins de C
- 2° les points de C dont l'anneau local n'est pas un σ_i sont simples.

Utilisons en effet la description de l'anneau semi-local $\sigma = \cap \sigma_i$ donnée au théorème 2, 3°. La courbe C' ayant $(y, \xi_1, \dots, \xi_n)$ pour point générique non homogène sur k , est un modèle affine de K . L'intersection avec $k[y, \xi]$ d'un idéal maximal de σ est l'idéal d'un point de C' ayant l'un des σ_i pour anneau local. On passe de là à un modèle projectif, puis on fait disparaître au besoin les points multiples qui n'ont pas l'un des σ_i pour anneau local en effectuant des transformations quadratiques qui n'altèrent pas les σ_i .

3. Théorème de Riemann Roch relatif à un anneau semi-local.

Soit K un corps de fonctions algébriques d'une variable ayant k pour corps de constantes, et soit σ un anneau semi-local dans K . Pour tout diviseur A de K , on note $d(A)$ le degré de A et $L(A)$ l'espace sur k des $x \in K$ dont le diviseur (x) est multiple de A^{-1} . On désigne par $\ell(A)$ la dimension sur k de $L(A)$ et par $\ell_\sigma(A)$ celle de $L(A) \cap \sigma$. Les diviseurs premiers de K dont l'anneau de valuation contient σ seront notés $q_1, q_2, \dots, q_n$. Un diviseur A de K sera dit premier aux places de σ lorsque $v_{q_i}(A) = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Un diviseur A sera dit multiple mod σ d'un diviseur B lorsque $v_p(A) \geq v_p(B)$ pour tout diviseur premier p dont l'anneau de valuation ne contient pas σ .

D'après le théorème 2 du n° 2, il existe en entier $N > 0$ tel que, si $Q = q_1 q_2 \dots q_n$, $L(AQ^{-N}) \subset \sigma$ pour tout diviseur A premier aux places de σ . On a alors $d(A) - \ell_\sigma(A) \leq d(A) - \ell_\sigma(AQ^{-N}) = d(AQ^{-N}) - \ell(AQ^{-N}) + Nd(Q)$. Le théorème de Riemann montre donc que, pour les diviseurs A premiers aux places de σ , les entiers $d(A) - \ell_\sigma(A)$ sont bornés supérieurement. Cette borne supérieure sera notée $g_\sigma - 1$; l'entier g_σ est le "genre de K relatif à σ ".

On va maintenant associer à l'anneau $\mathcal{O}$ un $\mathcal{O}$ -module dans l'espace des différentielles de K dont on utilisera pour cela la définition reposant sur les répartitions. Soit R l'algèbre des répartitions de K (c'est-à-dire des applications t de l'ensemble des diviseurs premiers p de K dans K telles que $v_p(t.p) \geq 0$ sauf pour un nombre fini de p). On désigne par $L^*(A)$ la sous-algèbre des répartitions t telles que $v_p(t.p) \geq -v_p(A)$ pour tout p . L'algèbre R est la somme directe de deux idéaux : l'idéal R_0 des répartitions t telles que $t.q_i = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et l'idéal des répartitions nulles sur tout diviseur premier p qui n'est pas un q_i . Il y a donc une projection canonique $pr : R \rightarrow R_0$.

Le corps K étant identifié à une sous-algèbre de répartitions, les différentielles de K sont les fonctions k -linéaires sur R nulles sur une sous-algèbre $K + L^*(A)$, où A est un diviseur arbitraire. On dira qu'une différentielle ω de K est une $\mathcal{O}$ -différentielle si elle est nulle sur $pr(\mathcal{O})$. En s'appuyant sur le théorème de Riemann Roch classique, on démontre le

THÉORÈME 4. - Pour tout diviseur A premier aux places de $\mathcal{O}$,

$$i_0(A) = \ell_0(A) - d(A) + g_0 - 1$$

est la dimension sur k de l'espace des $\mathcal{O}$ -différentielles dont le diviseur est multiple de $A \bmod \mathcal{O}$.

Désignant par t_p la répartition définie par $t_p.p = 1$ et $t_p.p' = 0$ (p, p' diviseurs premiers distincts), le résidu d'une différentielle ω de K en p sera définie par $\text{res}_p \omega = \omega(t_p)$. Pour toute répartition t , on a alors $\omega(t) = \sum_p \text{res}_p(t.p)\omega$, la somme étant étendue à tous les diviseurs premiers p de K . Dire que ω est une $\mathcal{O}$ -différentielle signifie donc que

$$\sum_p \text{res}_p((pr \ x).p)\omega = \sum_{p \neq q_i} \text{res}_p x\omega = 0$$

pour tout $x \in \mathcal{O}$. On en déduit que les $\mathcal{O}$ -différentielles sont les différentielles ω de K telles que $\sum_i \text{res}_{q_i} x\omega = 0$ pour tout $x \in \mathcal{O}$.

Une différentielle ω de K sera dite finie aux places de $\mathcal{O}$ si $v_{q_i}((\omega)) \geq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Il est clair que les $\mathcal{O}$ -différentielles constituent un $\mathcal{O}$ -module $D_{\mathcal{O}}$ contenant toutes les différentielles finies aux places de $\mathcal{O}$, donc en particulier les différentielles de première espèce. Les différentielles finies aux places de $\mathcal{O}$ sont du reste les $\bar{\mathcal{O}}$ -différentielles ($\bar{\mathcal{O}}$ étant la fermeture

intégrale de σ dans K).

THÉOREME 5. - Il existe un isomorphisme canonique de $D_{\sigma}/D_{\bar{\sigma}}$ sur le dual du k -espace $\bar{\sigma}/\sigma$.

A toute σ -différentielle ω , associons en effet la fonction k -linéaire $x \rightarrow \sum_{i=1}^n \text{res}_{q_i} x\omega$ sur $\bar{\sigma}$. Elle est nulle sur $\bar{\sigma}$. On obtient ainsi une application k -linéaire de D_{σ} dans le dual de $\bar{\sigma}/\sigma$ dont le noyau est visiblement $D_{\bar{\sigma}}$. Pour vérifier que son image est $(\bar{\sigma}/\sigma)^*$, on utilise l'anneau semi-local σ'/σ des éléments de la forme $c + x$ où $c \in k$ et $v_{q_i}(x) \geq N$ ($i=1,2,\dots,n$; N grand). L'isomorphisme $D_{\sigma}/D_{\bar{\sigma}} \rightarrow (\bar{\sigma}/\sigma)^*$ défini comme plus haut a pour image $(\bar{\sigma}/\sigma)^*$ car on voit facilement que ces deux espaces ont tous deux la dimension $N \cdot d(q_1, q_2, \dots, q_n) - 1$. Toute fonction linéaire sur $\bar{\sigma}$ nulle sur σ est ainsi de la forme $\sum_{i=1}^n \text{res}_{q_i} x\omega$ où $\omega \in D_{\sigma}$. Si elle est nulle sur σ , c'est que $\omega \in D_{\bar{\sigma}}$.

Une σ -différentielle ω sera dite de première espèce si elle est multiple mod σ du diviseur unité. Les σ -différentielles de première espèce constituent un espace de dimension g_0 sur k (théorème 4) dont l'intersection avec $D_{\bar{\sigma}}$ est l'espace de dimension g des différentielles de première espèce de K .

THÉOREME 6. - Toute σ -différentielle est somme d'une différentielle finie aux places de σ et d'une différentielle de première espèce. La dimension de $\bar{\sigma}/\sigma$ est égale à $\delta = g_0 - g$.

Pour l'anneau σ' envisagé plus haut, les σ' -différentielles de première espèce sont les différentielles de K dont le diviseur est multiple de $q_1^{-N}, q_2^{-N}, \dots, q_n^{-N}$. Le théorème de Riemann-Roch montre donc qu'elles constituent un sous-espace de dimension $N \cdot d(q_1, q_2, \dots, q_n) + g - 1 = g + \dim D_{\sigma}/D_{\bar{\sigma}}$. Le théorème est donc vérifié pour σ' , et le résultat pour σ en résulte facilement.

Soit E le diviseur entier de plus bas degré tel que $v_{q_i}(\omega) \geq -v_{q_i}(E)$ pour toute σ -différentielle ω et tout i . Soient A un diviseur premier aux places de σ et ω une σ -différentielle. Si (ω) est multiple de A mod σ , alors (ω) est multiple de AE^{-1} , donc $2g - 2 = d((\omega)) \geq d(A) - d(E)$. Pour qu'il existe une σ -différentielle dont le diviseur est multiple de A mod σ , il est donc nécessaire que $d(A) \leq 2g - 2 + d(E)$. Si k est infini, on pourra effectivement trouver une σ -différentielle ω_0 dont le diviseur sera WE^{-1} avec W premier aux places de σ et l'égalité aura lieu pour $A = W$.

Soit c l'ensemble des $x \in K$ tels que $v_{q_i}(x) \geq v_{q_i}(E)$ pour tout i . C'est visiblement un idéal de $\mathcal{O}$; de plus, si $x \in c$ et $y \in \bar{\mathcal{O}}$, alors $\sum_i \text{res}_{q_i} xy\omega = 0$ pour toute $\mathcal{O}$ -différentielle ω ce qui entraîne $xy \in \mathcal{O}$ en vertu du théorème 5. L'idéal c est donc le plus grand idéal de $\mathcal{O}$ qui est un idéal de $\bar{\mathcal{O}}$. Puisque $d(E) = \dim \mathcal{O}/c = \dim \bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O} + \dim \mathcal{O}/c$, on a $d(E) \geq \delta$. Lorsque k est infini, on a $d(E) \leq 2\delta$, l'égalité ayant lieu lorsque $D_{\mathcal{O}}$ est un module de rang 1 sur $\mathcal{O}$. Reprenons en effet la différentielle ω_0 de diviseur WE^{-1} . L'isomorphisme $x \mapsto x\omega_0$ de $\mathcal{O}$ dans $D_{\mathcal{O}}$ composé avec $D_{\mathcal{O}} \rightarrow D_{\mathcal{O}}/D_{\bar{\mathcal{O}}}$ donne une application de noyau c . Donc $\dim \mathcal{O}/c \leq \delta$. Si $\dim \mathcal{O}/c = \delta$, alors $\mathcal{O}\omega_0$ contient un supplémentaire de $D_{\bar{\mathcal{O}}}$ dans $D_{\mathcal{O}}$. Comme $\mathcal{O}\omega_0$ contient trivialement $D_{\bar{\mathcal{O}}}$, on voit que $D_{\mathcal{O}} = \mathcal{O}\omega_0$. Inversement si $D_{\mathcal{O}} = \mathcal{O}\omega$, puisque $e\omega$ est alors dans $D_{\bar{\mathcal{O}}}$, on a $\dim \mathcal{O}/c \geq \delta$, donc $\dim \mathcal{O}/c = \delta$.

Lorsque $d(E) = 2\delta$, les $\mathcal{O}$ -différentielles qui sont multiples mod $\mathcal{O}$ d'un diviseur A premier aux places de $\mathcal{O}$ s'obtiennent en multipliant ω_0 par les $x \in K$ tels que $(x)W$ soit multiple de A . L'égalité de Riemann-Roch relative à $\mathcal{O}$ s'écrit dans ce cas : $\ell_0(A/W) = \ell_0(A) - d(A) + \delta_0 - 1$.

Pour que cette condition $d(E) = 2\delta$ soit vérifiée, il faut et il suffit que l'égalité analogue soit vérifiée pour chaque anneau local associé à $\mathcal{O}$. On démontre que les points multiples d'une courbe plane ainsi que ceux d'une intersection complète vérifient cette condition.

Si K est une extension régulière de k et si k' est une extension de k , alors $k'\mathcal{O}$ est un anneau semi-local dans le corps K' des quotients de $k' \otimes K$. Si K possède un modèle projectif dont tous les points sont absolument simples, on démontre que le genre de K' relativement à $k'\mathcal{O}$ est égal à g_0 et que E , considéré comme diviseur de K' sur k' est encore le diviseur associé à l'anneau semi-local $k'\mathcal{O}$.

4. Courbes quasi-hyperelliptiques.

On suppose dans ce qui suit que k est algébriquement clos et que l'anneau semi-local $\mathcal{O}$ est l'intersection des anneaux locaux des points multiples d'un modèle projectif C de K . Si $g_0 = 0$, alors $g = 0$, $\delta = 0$, donc C est une courbe rationnelle sans point multiple. Si $g_0 = 1$, ou bien $g = 0$ et $\delta = 1$, auquel cas C est une courbe rationnelle ayant un point double ou un point d'arrêt, ou bien $g = 1$ et $\delta = 0$, auquel cas C est elliptique sans point multiple.

Lorsque $g_0 > 1$, le choix d'une base $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{g_0}$ de $\mathcal{O}$ -différentielles de première espèce permettra d'associer à C la courbe C' ayant pour point générique homogène sur k : $(1, \omega_2/\omega_1, \dots, \omega_{g_0}/\omega_1)$. Lorsque $K = k(\omega/\omega_1)$, il y a correspondance birationnelle entre C et C' ; on dira que C est "non-quasi-hyperelliptique". Dans le cas contraire C sera "quasi-hyperelliptique". On peut préciser de ce point de vue les cas où $d(E) = 2g$:

THÉOREME 7. - Si C est quasi-hyperelliptique, alors $d(E) = 2g$. Dans le cas contraire, pour que $d(E) = 2g$, il faut et il suffit que la correspondance birationnelle entre C et C' soit birégulière. Lorsque $d(E) < 2g$, la correspondance est régulière en tout point de C' ainsi qu'en tout point simple de C .

On démontre également que, pour que C soit quasi-hyperelliptique, il faut et il suffit qu'il existe un élément x dans $\mathcal{O}$ tel que $[K : k(x)] = 2$.
