

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-PIERRE SERRE

Cohomologie et fonctions de variables complexes

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 71, p. 213-218

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__213_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COHOMOLOGIE ET FONCTIONS DE VARIABLES COMPLEXES

par Jean-Pierre SERRE

On s'est aperçu récemment que les théorèmes principaux de la théorie des idéaux de fonctions analytiques de CARTAN-OKA pouvaient s'énoncer et se démontrer plus simplement dans le langage de la théorie des faisceaux ; du même coup, on a été conduit à les généraliser, ce qui a permis d'obtenir un assez grand nombre de résultats nouveaux. Nous allons donner ici un bref résumé de ces résultats, renvoyant pour plus de détails au Séminaire H. CARTAN [1].

1. Théorèmes généraux.

Une variété analytique complexe X est dite variété de Stein si elle est paracompacte et si :

(α). Pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble des $x \in X$ tels que l'on ait

$$|f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| \quad \text{pour toute fonction } f \text{ holomorphe sur } X, \text{ est compact.}$$

(β). Si x et y sont deux points distincts de X , il existe f , holomorphe sur X , telle que $f(x) \neq f(y)$.

(γ). Pour tout $x \in X$, il existe des fonctions $f_1, \dots, f_n$ holomorphes sur X qui forment un système de coordonnées locales en x .

(En gros, il y a assez de fonctions holomorphes pour séparer les points, les points infiniment voisins et le point à l'infini).

EXEMPLE.- $\mathbb{C}^n$ et, plus généralement, tout domaine d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$ à un nombre fini de feuillets ; une sous-variété sans singularités d'une variété de Stein (et en particulier toute variété algébrique affine) ; un produit, une intersection de variétés de Stein. Par contre, une variété compacte de dimension $n > 0$ n'est jamais une variété de Stein.

Rappelons d'autre part (cf. LERAY, ainsi que le Séminaire CARTAN [2]) qu'un faisceau $\mathcal{F}$ sur un espace X est la donnée pour tout $x \in X$ d'un groupe abélien $\mathcal{F}_x$ et d'une topologie sur la réunion des $\mathcal{F}_x$ telle que la projection $\mathcal{F} \rightarrow X$ soit un homéomorphisme local et que la loi de groupe soit continue. Par exemple, si X est une variété analytique complexe, on peut prendre pour $\mathcal{F}_x$ les germes de fonctions holomorphes au point x ; soit $\mathcal{O}_X = \bigcup \mathcal{O}_x$ ce faisceau.

Rappelons également que la donnée d'un espace X et d'un faisceau $\mathcal{F}$ au-dessus de X définit sans ambiguïté les groupes de cohomologie de X à coefficients dans

$\mathcal{F}$, notés $H^i(X, \mathcal{F})$, $i = 0, 1, \dots$. Le groupe $H^0(X, \mathcal{F})$ est simplement le groupe des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de X tout entier ; par exemple, $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ est le groupe de toutes les fonctions holomorphes définies sur X . Les groupes $H^i(X, \mathcal{F})$, i arbitraire, peuvent être définies par le procédé classique de Čech, avec des recouvrements ouverts localement finis (cf. [2]).

On notera que nous ne faisons aucune restriction sur les supports ; autrement dit, il s'agit de groupes de cohomologie à supports fermés arbitraires.

Un faisceau $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_x\}$ est dit analytique sur X (X étant de nouveau une variété analytique complexe), si chaque $\mathcal{F}_x$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_x$ -module, compatible avec la structure de faisceau. Un faisceau analytique $\mathcal{F}$ est dit cohérent si tout $x \in X$ possède un voisinage U tel que la restriction de $\mathcal{F}$ à U soit analytiquement isomorphe à un faisceau de la forme $(\mathcal{O}_U)^p / \mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est un sous-faisceau analytique de $(\mathcal{O}_U)^p$ engendré par un nombre fini de sections, C'est une notion locale.

EXEMPLES.- Le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes est analytique cohérent. Il en est de même du faisceau des relations entre des fonctions holomorphes données, ainsi que du faisceau des germes de fonctions holomorphes nulles sur une sous-variété analytique donnée. (Vérification triviale pour le premier exemple, difficile pour les deux derniers).

Ces définitions étant posées, nous pouvons énoncer les deux théorèmes fondamentaux de la théorie :

THÉORÈME A.- Soient X une variété de Stein, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X . Pour tout $x \in X$, $H^0(X, \mathcal{F})$ engendre $\mathcal{F}_x$ pour sa structure de $\mathcal{O}_x$ -module.

THÉORÈME B.- Soient X une variété de Stein, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X . On a $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $i > 0$.

En utilisant les deux théorèmes précédents (avec $i = 1$ dans le théorème B) pour un sous-faisceau cohérent $\mathcal{F}$ de $(\mathcal{O}_X)^p$, on retrouve les résultats de l'article de CARTAN [3].

2. Applications.

(Dans tout ce numéro, X désigne une variété de Stein).

La plupart s'appuient uniquement sur la suite exacte de cohomologie qui dit que, si l'on a une suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ de faisceaux on a une suite exacte :

$$\dots \rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{K}) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{G}) \rightarrow \dots$$

En particulier, si $\mathcal{F}$ est analytique cohérent, on voit (en prenant $i = 0$) que $H^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{K}) \rightarrow 0$ est une suite exacte, c'est-à-dire que toute section de $\mathcal{K}$ s'obtient par passage au quotient à partir d'une section de $\mathcal{G}$. Par exemple, prenant pour $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{F}$) le faisceau des germes de fonctions méromorphes (resp. holomorphes), une section du faisceau $\mathcal{K} = \mathcal{G}/\mathcal{F}$ est une donnée de parties principales sur X (au sens de MITTAG-LEFFLER), et dire que c'est l'image d'une section de $\mathcal{G}$ (i.e. d'une fonction méromorphe), c'est dire que le 1er problème de Cousin est résoluble dans X . On trouve ainsi un résultat connu, dû à OKA (dans le cas où X est un domaine d'holomorphie).

On démontre par le même raisonnement que toute fonction holomorphe sur une sous-variété régulièrement plongée dans X est la trace d'une fonction holomorphe sur tout X (prendre pour $\mathcal{G}$ le faisceau de toutes les fonctions holomorphes, pour $\mathcal{F}$ le sous-faisceau des fonctions nulles sur la sous-variété). Idem pour les formes différentielles, et plus généralement tout champ de tenseurs holomorphe.

Les résultats qui précèdent n'utilisaient que la nullité de H^1 et, de ce fait étaient connus. En voici d'autres qui utilisent la nullité de H^i pour $i \geq 1$:

2.1. Théorème de de Rham.

Les formes différentielles extérieures holomorphes sur X ("formes de 1^{re} espèce") forment, avec l'opération de différentiation extérieure, un complexe. Les groupes de cohomologie de ce complexe sont isomorphes aux groupes de cohomologie de X (à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$). En d'autres termes, il y a toujours une forme différentielle holomorphe fermée de périodes complexes données, et si une forme différentielle holomorphe fermée a toutes ses périodes nulles, c'est le cobord d'une forme holomorphe.

La démonstration procède comme celle du théorème de de Rham classique (relatif aux formes différentiables), le théorème B remplaçant les partitions de l'unité.

2.2. Espaces fibrés à groupe structural abélien.

Soit G un groupe de Lie complexe abélien. Soit $\mathcal{A}_G$ le faisceau des germes d'applications analytiques de X dans G . Les éléments du groupe $H^1(X, \mathcal{A}_G)$ correspondent biunivoquement, comme on le voit tout de suite, aux classes d'espaces fibrés principaux analytiques de base X et de groupe G . Supposons G connexe, soit H son revêtement universel, π son groupe fondamental ; on a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \Pi \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow \mathcal{O}_G \longrightarrow 0 ,$$

où Π désigne le faisceau constant égal à Π . En outre $\mathcal{O}_H$ est un faisceau analytique cohérent. D'où, en appliquant le théorème B et la suite exacte de cohomologie :

$$H^1(X, \mathcal{O}_G) \approx H^2(X, \Pi) .$$

On a ainsi obtenu la classification des espaces fibrés principaux analytiques de base X et de groupe G , et on voit qu'elle coïncide avec la classification topologique.

2.3. Diviseurs.

Rappelons qu'un diviseur est dit linéairement équivalent à 0 si c'est le diviseur d'une fonction méromorphe sur X . On démontre alors que le groupe des diviseurs modulo l'équivalence linéaire est isomorphe à $H^2(X, \mathbb{Z})$, et que tout diviseur est linéairement équivalent à un diviseur positif.

(On utilise 2.2 dans le cas particulier où $G = C^*$; tout revient alors à prouver qu'un espace fibré de fibre C^* est défini par un diviseur (au sens expliqué dans l'exposé de CARTAN [4], ce qui se voit en appliquant le théorème A au faisceau des germes de sections de l'espace fibré de fibre C associé canoniquement à l'espace fibré donné).

Des cas particuliers du résultat précédent avaient été démontrés par K. STEIN [5].

3. Compléments.

On peut certainement élargir le domaine de validité des théorèmes A et B; il serait particulièrement désirable de les démontrer pour des faisceaux plus généraux que les faisceaux cohérents (par exemple, pour des faisceaux de fonctions holomorphes à valeurs dans certains espaces vectoriels topologiques): ce serait très utile pour étudier les espaces fibrés.

On ignore si les théorèmes A et B sont vrais pour une variété analytique réelle X qui vérifie (α) , (β) , (γ) ; on sait le démontrer seulement lorsque la variété peut être plongée sans singularité dans $\mathbb{R}^n$, donc en particulier lorsque la variété est compacte (et vérifie (β) et (γ)). Dans ce cas, le groupe des classes de diviseurs est isomorphe à $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$.

Dans tout ce qui précède, il n'a été question que de cohomologie à supports fermés arbitraires. Le seul résultat connu sur la cohomologie à supports compacts est

le suivant (dû à plusieurs auteurs) :

Soient X une variété de Stein de dimension complexe n , Ω^p le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré p sur X . On a $H^{*i}(X, \Omega^p) = 0$ pour $i \neq n$, p arbitraire, H^* désignant la cohomologie à supports compacts.

EXEMPLE d'application du théorème précédent.- Soient B la boule unité de $\mathbb{C}^n$, X l'intérieur de B , S la frontière de B , $\mathcal{F} = \Omega^0$ le faisceau des fonctions holomorphes. En appliquant alors la suite exacte de cohomologie :

$$\dots \rightarrow H^{*i}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(B, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(S, \mathcal{F}) \rightarrow H^{*i+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^{i+1}(B, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

avec $i = 0$, on voit que, si $n \geq 2$, $H^0(B, \mathcal{F})$ s'applique sur $H^0(S, \mathcal{F})$, c'est-à-dire que toute fonction holomorphe au voisinage de S se prolonge dans B (théorème de Hartogs) ; avec $i = 1$, et $n \geq 3$, on voit que $H^1(S, \mathcal{F}) = 0$, ce qui montre que le premier problème de Cousin (donc aussi le second) est résolvable sur S (théorème de Rothstein) ; on en conclut avec ROTHSTEIN que tout diviseur défini au voisinage de S se prolonge à l'intérieur de B .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Séminaire Henri Cartan, t. 4, 1951/52 (cf. notamment les exposés 18, 19, 20).
- [2] Séminaire Henri Cartan, t. 3, 1950/51.
- [3] CARTAN (Henri). - Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 29-64.
- [4] CARTAN (Henri). - Espaces fibrés analytiques complexes, Séminaire Bourbaki, t. 3, 1950/51.
- [5] STEIN (Karl). - Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen, Math. Annalen, t. 117, 1941, p. 727-757 ; Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem, Math. Annalen, t. 123, 1951, p. 201-222.

ADDITIF

Pour un exposé plus détaillé des résultats ci-dessus, voir le

Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953. - Liège, Thone, Paris, Masson, 1953.

Parmi les résultats plus récents sur les variétés de Stein, voir en particulier :

CARTAN (Henri). - Espaces fibrés analytiques [d'après H. Grauert], Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57.

CARTAN (Henri). - Mémoire de H. Grauert : Zur Theorie der analytisch vollständigen Räume, Séminaire Bourbaki, t. 7, 1954/55.

GRAUERT (Hans). - Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, Math. Annalen, t. 129, 1955, p. 233-259.

GRAUERT (Hans). - Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige kählersche Metrik, Math. Annalen, t. 131, 1956, p. 38-75.

[Avril 1957]
