

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

FRANÇOIS BRUHAT

Représentations induites des groupes localement compacts

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 68, p. 185-192

http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__185_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS INDUITES DES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

par François BRUHAT

1. Mesures quasi-invariantes.

On dit qu'une mesure positive μ sur un espace localement compact M est "quasi-invariante" (en abrégé q.i.) pour un groupe Γ d'homéomorphismes de M , si les transformées de μ par les éléments de Γ sont équivalentes entre elles.

Soient G un groupe localement compact séparable, g un sous-groupe fermé de G , M l'espace homogène G/g des classes à droite modulo g , h l'application canonique de G sur M : soit α (resp. ν) une mesure de Haar à droite sur G (resp. g), $\Delta(x)$ (resp. $\delta(\xi)$) la dérivée de Radon-Nikodym de la translatée à gauche de α (resp. ν) par l'élément x (resp. ξ) de G (resp. g) : on appellera "fonction ρ " (pour le couple G, g) une fonction $\rho(x)$ sur G , réelle > 0 , borélienne, bornée sur tout compact et telle que :

$$(1) \quad \rho(\xi x) = \frac{\delta(\xi)}{\Delta(\xi)} \rho(x)$$

LEMME 1. - a. Il existe des fonctions ρ . A l'une d'elles correspond une mesure μ q.i. pour G sur M , telle que, pour toute fonction f continue à support compact sur G on ait :

$$(2) \quad \int_G f(x) \rho(x) d\alpha(x) = \int_M d\mu \int_g f(\xi x) d\nu(\xi)$$

b. La dérivée de Radon-Nikodym par rapport à μ de la transformée de μ par un élément y de G est la fonction de $z \in M$, $\lambda(z; y)$ définie par :

$$(3) \quad \lambda(h(x); y) = \rho(xy) / \rho(x) \quad \text{pour } x, y \in G$$

c. Réciproquement, à toute mesure q.i. correspond une fonction ρ telle que (2) et (3) soient valables.

d. Deux mesures q.i. sont équivalentes entre elles, un sous-ensemble E de M étant de mesure nulle pour une mesure q.i. pour G si et seulement si $h^{-1}(E)$ est de mesure nulle pour α .

DÉMONSTRATION. - Soit Ψ une section borélienne de G fibré par g (existence par Federer-Morse) ; on pose :

$$(4) \quad \rho(x) = \delta(x(\Psi \circ h(x))^{-1}) / \Delta(x(\Psi \circ h(x))^{-1})$$

Il suffit ensuite d'adapter les raisonnements de WEIL sur les mesures relativement invariantes.

Décomposition d'une mesure q.i. Soient M un espace localement compact séparable, μ une mesure finie sur M , R une relation d'équivalence sur M , Y l'espace quotient M/R , k l'application canonique de M sur Y : on dit que R est "mesurable" pour μ , s'il existe une famille dénombrable de sous-ensembles E_i de Y , tels que $k^{-1}(E_i)$ soit μ -mesurable et que tout point y de Y soit l'intersection des E_i qui le contiennent. Soit $\tilde{\mu}$ la mesure quotient sur Y . On a le :

LEMME 2. - a. Pour tout $y \in Y$, il existe une mesure borélienne finie sur M , μ_y telle que $\mu_y(M - k^{-1}(y)) = 0$ et que, pour toute $f \in \mathcal{L}^1(Y, \tilde{\mu})$ et toute $g \in \mathcal{L}^\infty(M, \mu)$, on ait :

$$(5) \quad \int_Y f(y) d\tilde{\mu}(y) \int_M g(x) d\mu_y(x) = \int_M f(k(x)) g(x) d\mu(x)$$

b. De plus, si Γ est un groupe localement compact séparable d'homéomorphismes de M , compatibles avec R et tel que μ soit q.i. pour Γ , les mesures μ_y sont, pour presque tout y , q.i. pour Γ .

2. Représentations induites.

On ne considère dans toute la suite que des représentations unitaires U ($x \rightarrow U_x$), continues, dans des espaces de Hilbert séparables notés $H(U)$.

Soit L une telle représentation de g , μ une mesure q.i. pour G sur M : on notera M_H^L l'espace des fonctions $f(x)$, définies sur G , à valeurs dans $H(L)$, telles que :

a. pour tout $v \in H(L)$, $x \rightarrow \langle f(x), v \rangle$ est une fonction numérique borélienne sur G (on dira que $f(x)$ est borélienne)

b. pour tout $\xi \in g$,

$$(6) \quad f(\xi x) = L_\xi f(x)$$

c. $\|f(x)\|^2$ qui, L_ξ étant unitaire, est définie sur M , est intégrable pour μ .

On montre facilement qu'après identification des fonctions égales μ -presque partout, M_H^L est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(7) \quad (f(x); g(x)) = \int_M \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(h(x))$$

Soit $\rho(x)$ une fonction ρ associée à μ : pour $f \in \mathcal{M}_H^L$ et $y \in G$, on pose :

$$(8) \quad \mu_y^L f(x) = (\rho(xy)/\rho(x))^{1/2} f(xy) = \lambda(h(x); y)^{1/2} f(xy)$$

$y \rightarrow \mu_y^L$ est une représentation unitaire de G dans $\mathcal{M}_H^L$, notée μ^L , car $\rho(xy)/\rho(x)$ est un multiplicateur sur $M \times G$, donc (8) définit une représentation qui est unitaire puisque λ est la dérivée de la transformée de μ par y (cf. lemme 1).

PROPOSITION 1. - Soient μ et μ' deux mesures q.i. pour G sur M . Les représentations μ^L et μ'^L sont unitairement équivalentes.

Soit $\mathcal{F}$ la dérivée de μ' par rapport à μ : $f \rightarrow \sqrt{\mathcal{F} \circ h(x)} f(x)$ définit l'isomorphisme cherché grâce à l'égalité $\rho'(x) = \mathcal{F} \circ h(x) \rho(x)$.

On ne fera donc plus intervenir μ explicitement par la suite, on notera U^L et on appellera "représentation induite" par la représentation L la classe de représentations unitaires de G ainsi définie.

EXEMPLE. - Prenons $g = \{e\}$ et pour L la représentation triviale : alors U^L est la représentation régulière de G .

On a un certain nombre de théorème vraisemblables, mais pénibles à démontrer :

THÉOREME 1. - Soient $g_1 \subset g_2$ deux sous-groupes fermés de G , L une représentation de g_1 , M la représentation de g_2 induite par L . Les représentations de G induites par L et M sont unitairement équivalentes.

COROLLAIRE. - Si L est la représentation régulière de g , U^L est la représentation régulière de G .

On appelle "représentation conjuguée" (notée $\bar{U}$) de U la représentation $x \rightarrow U_{x^{-1}}^*$. On a la :

PROPOSITION 2. - Les représentations $\bar{U}^L$ et $\overline{U^L}$ sont équivalentes.

THÉOREME 2. - Soit M une représentation de g somme continue des représentations y^L pour $y \in Y$ et une mesure borélienne m sur Y : U^M est équivalente à la somme continue des U^{yL} sur Y pour m .

3. Produits de Kronecker.

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert : on sait que l'espace des applications linéaires continues T de H_2 dans H_1 telles que T^*T soit un opérateur de

trace finie dans H_2 , forme un espace de Hilbert pour la norme $\sqrt{\text{Tr}(T^*T)}$, appelé "produit de Kronecker" $H_1 \otimes H_2$ de H_1 et H_2 . Si U (resp. V) est une représentation de G_1 (resp. G_2) dans H_1 (resp. H_2), $T \rightarrow U_{x_1} T V_{x_2}^*$ définit $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$ un opérateur unitaire $(U \circ V)_{x_1, x_2}$ dans $H_1 \otimes H_2$ et $(x_1, x_2) \rightarrow (U \circ V)_{x_1, x_2}$ est une représentation $U \circ V$ de $G_1 \times G_2$.

THEOREME 3. - Soit L (resp. M) une représentation unitaire d'un sous-groupe fermé g_1 (resp. g_2) d'un groupe localement compact séparable G_1 (resp. G_2). Les représentations U^{LoM} et $U^L \circ U^M$ de $G_1 \times G_2$ sont équivalentes.

Si $G_1 = G_2 = G$, le sous-groupe "diagonal" $\tilde{G}$ de $G \times G$ est isomorphe à G : en restreignant la représentation $U \circ V$ de $G \times G$ à $\tilde{G}$, on obtient une représentation notée $U \otimes V$ de G , appelée produit de Kronecker des représentations U et V de G .

4. Décomposition du produit de Kronecker de deux représentations induites.

On obtient $U^L \otimes U^M$ par restriction à $\tilde{G}$ de $U^L \circ U^M$ ou encore de U^{LoM} : on est donc amené à étudier la restriction à un sous-groupe fermé g_2 de la représentation U^L , induite par la représentation L d'un sous-groupe g_1 .

g_2 opère sur $M = G/g_1$, mais en général n'est pas transitif: les "orbites" (i.e. classes d'intransitivité) sont les images canoniques des doubles classes $g_1 x g_2$ pour tout $x \in G$. Si $G = S_1 \cup S_2$, S_1 étant borélien de mesure de Haar non nulle, réunion de telles doubles classes, les sous-espaces H_{S_1} de $H(U^L)$ formés des fonctions s'annulant en dehors de S_1 , sont orthogonaux, supplémentaires, et invariants par U^L restreinte à g_2 (notée $U^{L_1 G_2}$). D'où, si G se décompose en un ensemble de mesure nulle N et une réunion dénombrable de doubles classes $E_i = g_1 x_i g_2$, de mesure non nulle (autrement dit, si G/g_1 se décompose en un ensemble de μ -mesure nulle et une réunion dénombrable d'orbites de μ -mesure non nulle), nous dirons que g_1 et g_2 sont "en rapport discret", une décomposition de $U^{L_1 G_2}$ en somme discrète de représentations indécomposables par le même procédé dans les espaces H_{E_i} . Pour étudier ces représentations, nous allons transformer la définition de H_E : soit H_E^1 l'espace des fonctions $f(x)$ sur $E = g_1 x_0 g_2$, à valeurs dans $H(L)$, boréliennes, telles que $f(\xi x) = L_\xi f(x)$ pour tout $\xi \in g_1$ et tout $x \in E$, et que $\|f(x)\|^2$ (qui est défini sur $h(E)$) soit intégrable pour une mesure μ_E q.i. pour g_2 sur $h(E)$ (une telle mesure existe d'après le lemme 1: $h(E)$ n'est pas un espace homogène de g_2 et n'est peut être même pas localement compact, mais l'application $x \rightarrow h(x_0, x)$ donne une application biunivoque conservant les boréliens de $g_2/g_2 \cap \bar{x}_0^{-1} g_1 x_0$ sur $h(E)$...). H_E^1

n'est jamais réduit à 0 (alors que H_E l'est, si $\kappa(E) = 0$) et si $\kappa(E) \neq 0$, H_E^1 est isomorphe à H_E (prendre pour μ_E la restriction de μ).

On a une représentation de g_2 dans H_E^1 en posant :

$${}^E U_s f(x) = (\rho_E(xs) / \rho_E(x))^{1/2} f(xs)$$

pour $s \in g_2$ et ρ_E fonction ρ associée à μ_E . On vérifie que si $\kappa(E) \neq 0$ ${}^E U$ transportée de H_E est la représentation de g_2 introduite plus haut et on démontre le lemme :

LEMME 3. - ${}^E U$ est équivalente à la représentation ${}^x V$ de g_2 induite par la représentation $\eta \rightarrow L_{x_0 \eta x_0^{-1}}$ du sous-groupe $g_x = g_2 \cap x_0^{-1} g_1 x_0$ de g_2 .

D'où immédiatement le

THEOREME 4. - a. ${}^x V$ ne dépend que de la double classe $D = g_1 x g_2$ à laquelle appartient x et on peut parler de ${}^D V$.

b. si g_1 et g_2 sont en rapport discret, $U^{L_1 G_2}$ est la somme directe discrète des ${}^D V$ correspondant aux doubles classes D de mesure non nulle pour la mesure de Haar sur G .

On déduit du théorème 4 une décomposition de $U^L \otimes U^M$ (notations du paragraphe 3) : l'application $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$ de $G \times G$ sur G établit une correspondance biunivoque entre les doubles classes $(g_1 \times g_2)(x, y) \tilde{G}$ et les doubles classes $g_1 z g_2$, qui conserve les classes de mesure nulle (car elle donne une correspondance biunivoque entre G et $G \times G/\tilde{G}$ ce qui permet d'appliquer le lemme 1 d., la mesure de Haar devenant une mesure q.i.). Par suite $g_1 \times g_2$ et $\tilde{G}$ sont en rapport discret si g_1 et g_2 le sont. D'autre part, l'isomorphisme canonique de $\tilde{G}$ sur G transporte le sous-groupe $(x, y)^{-1}(g_1 \times g_2)(x, y) \cap \tilde{G}$ sur $g_{x,y} = (x^{-1} g_1 x) \cap (y^{-1} g_2 y)$ et transforme la représentation

$$(s, s) \rightarrow (L \circ M)_{(x,y)(s,s)(x,y)^{-1}} \text{ en } s \rightarrow {}^{x,y} N_s = L_{xsx^{-1}} \otimes M_{ysy^{-1}}. \text{ D'où}$$

THEOREME 5. - a. $U^{x,y N}$ ne dépend que de la double classe $g_1 x y^{-1} g_2$.

b. Si g_1 et g_2 sont en rapport discret, $U^L \otimes U^M$ est la somme directe des $U^{x,y N}$ sur les doubles classes $g_1 z g_2$ de mesure non nulle pour la mesure de Haar.

Dans le cas général, au lieu de décomposer μ en somme discrète, on va la

décomposer en somme continue en utilisant le lemme 2. Il faut nous donner une suite e_i de réunions boréliennes d'orbites qui engendre la tribu des réunions boréliennes d'orbites : la relation d'équivalence R sera " x et y appartiennent aux mêmes e_i " et on obtiendra une décomposition en somme continue des représentations, mais on ne sait pas grand'chose des composantes si g_2 n'est pas transitif sur les classes suivant R .

DÉFINITION. - Nous dirons que les sous-groupes g_1 et g_2 sont "en rapport régulier" si l'on peut trouver dans G une suite $e_0, e_1, \dots$ de réunions mesurables de doubles classes $g_1 x g_2$, telle que e_0 soit de mesure de Haar nulle et que toute double classe non contenue dans e_0 soit l'intersection des e_i qui la contiennent.

On peut alors démontrer :

THÉOREME 4 bis. - Si g_1 et g_2 sont en rapport régulier, U^{L, g_2} est la somme continue sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ des orbites D de G/g_1 par g_2 des représentations D_V par rapport à la mesure quotient $\tilde{\mu}$ d'une mesure q.i. finie sur G/g_1 (qui existe puisque G est séparable).

THÉOREME 5 bis. - Comme le théorème 5 en remplaçant "en rapport discret" par "en rapport régulier" et "somme directe" par "somme continue par rapport à $\tilde{\mu}$ ".

5 Opérateurs et nombres d'entrelacement.

Soient U et V deux représentations de G , T un opérateur borné de $H(V)$ dans $H(U)$: T sera dit opérateur d'entrelacement pour U et V si $T \circ V_x = U_x \circ T$ pour tout $x \in G$; opérateur d'entrelacement fort si T est de plus du type d'Hilbert-Schmidt. On appellera nombre d'entrelacement (resp. d'entrelacement fort) de U et V et on notera $I(U, V)$ (resp. $J(U, V)$) la dimension de l'espace des opérateurs d'entrelacement (resp. d'entrelacement fort).

LEMME 4. - $J(U, V) =$ nombre de fois que $U \otimes \bar{V}$ contient la représentation unitaire comme composante directe discrète (noté $n_I(U \otimes \bar{V})$).

En effet : $T V_x = U_x T$ est équivalent à $U_x T V_x^* = T$, c'est-à-dire à $(U \otimes \bar{V}) T = T$ si l'opérateur $T \in H(U) \otimes H(V)$, cf paragraphe 3. D'autre part, on peut montrer que $J(U, V) = J(U^0, V^0) = I(U^0, V^0)$, où U^0 désigne la restriction de U au sous-espace de $H(U)$ engendré par les sous-espaces de dimension finie invariants par U : autrement dit, J ne fait intervenir que les "parties

finies" de U et V .

LEMME 5. - $n_I(U^L)$ est égal à $n_I(L)$ ou à 0 suivant que G/g admet une mesure invariante finie ou non.

DÉMONSTRATION. - Soit $f \in H(U^L)$, invariant par U^L : on a

$$(\rho(xs)/\rho(x))^{1/2} f(xs) = f(x) \quad \text{pour tout } s,$$

presque partout en x , donc $\rho(x)^{1/2} f(x)$ est presque partout égal à un élément fixe v de $H(L)$. De (5), on déduit que $\rho(\xi x) = \rho(x)$, donc que ρ est définie sur G/g et que la mesure $1/\rho \, d\mu$ est invariante, finie car $\int 1/\rho \, d\mu = \|f\|^2 / \|v\|^2$. De plus, $L_\xi v = v$.

Réciproquement, si v est invariant par L et s'il existe une mesure invariante finie, la fonction $f(x) = v$ appartient à $H(U^L)$ et est invariante par U^L .

THÉORÈME 6 (hypothèses et notations du théorème 4 bis). - a. pour tout x et $y \in G$, le nombre d'entrelacement fort des représentations $s \rightarrow L_{xsx}^{-1}$ et $s \rightarrow N_{ysy}^{-1}$ de $g_{x,y}$ et l'existence d'une mesure invariante finie sur $G/g_{x,y}$, ne dépendent que de la double classe $D = g_1 x y^{-1} g_2$ d'où la notation $J(L, M, D)$.

b. Soit $\mathcal{D}_f$ (resp. $\mathcal{D}'_f$) l'ensemble des doubles classes D de mesure non nulle (resp. de mesure nulle et telles que $J(L, M, D) \neq 0$) pour lesquelles une telle mesure invariante existe : si $\alpha(\bigcup_{D \in \mathcal{D}_f} D) = 0$, $J(U^L, U^M) = \sum_{D \in \mathcal{D}_f} J(L, M, D)$.
Si $\alpha(\bigcup_{D \in \mathcal{D}'_f} D) \neq 0$, $J(U^L, U^M) = \infty$.

Le théorème 4 bis et les lemmes 4 et 5 donnent rapidement a. et ramènent b. au :

LEMME 6.n- Soit m une mesure borélienne sans masses ponctuelles sur Y ; soit $U = \int_Y U \, dm(y)$ une somme continue de représentations de G .

a. l'ensemble Z des $y \in Y$ tels que $n_I({}^yU) \neq 0$ est mesurable.

b. $n_I(U) = 0$ ou ∞ suivant que $m(Z) = 0$ ou non.

DÉMONSTRATION. - On se ramène au cas où les yU ont lieu dans le même Hilbert H . Soit yE le projecteur sur le sous-espace maximal de H sur lequel yU est l'identité : $n_I({}^yU) = \dim {}^yE(H)$. Soit s_j une suite partout dense dans G : d'après le théorème ergodique, $1 + {}^yU_{s_j} + \dots + {}^yU_{s_j}^n / n + 1 \rightarrow {}^yE_{s_j}$ projecteur

sur le sous-espace maximal sur lequel $\chi_{U_{s_j}} = 1$: donc $y \rightarrow \chi_{E_{s_j}}$ est mesurable et aussi $y \rightarrow \chi_E = \prod \chi_{E_{s_j}}$: d'où a.

Si $m(Z) = 0$, soit $f \in H(U)$ invariante par U : on a $\chi_{U_x} f(y) = f(y)$ pour tout x presque partout en y , donc (séparabilité de G et continuité de U) presque partout en y pour tout x : d'où $\chi_E f(y) = f(y)$ presque partout $f(y) = 0$ presque partout et par suite $n_I(U) = 0$.

Si $m(Z) \neq 0$, on peut trouver (m sans masses ponctuelles) une infinité dénombrable d'ensembles mesurables disjoints $Z_j \subset Z$, avec $m(Z_j) \neq 0$; posons $\chi_{E_j} = \chi_E$ si $y \in Z_j$ et $\chi_{E_j} = 0$ si $y \notin Z_j$: les $E_j(H)$ forment une infinité dénombrable de sous-espaces linéairement indépendants sur lesquels U est l'identité : d'où $n_I(U) = \infty$.

Prenons $g_1 = g$ et $g_2 = G$: il y a une seule double classe, et on peut prendre dans le théorème 6, a., $x = y = e$. D'autre part, si L ou M est irréductible de dimension finie, $J(L, M) = I(L, M) =$ nombre de fois que M (resp. L) contient L (resp. M) comme composante directe discrète. D'où :

THÉOREME 7 (Théorème de réciprocité de Frobenius). - Soient L une représentation irréductible de g , M une représentation irréductible de dimension finie de G . Si G/g admet une mesure invariante finie, $U^\perp$ contient M comme composante directe discrète exactement autant de fois que la restriction de M à g contient L . Si G/g n'admet pas de mesure invariante finie, $U^\perp$ ne contient aucune composante directe discrète de dimension finie.

COROLLAIRE. - Si G n'est pas compact, sa représentation régulière ne contient pas de composante directe de dimension finie.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MACKEY (George W.). - Imprimitivity for representations of locally compact groups, I., Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 35, 1949, p. 537-545.
- [2] MACKEY (George W.). - On induced representations of groups, Amer. J. Math., t. 73, 1951, p. 576-592.
- [3] MACKEY (George W.). - Induced representations of locally compact groups, I., Annals of Math., t. 55, 1952, p. 101-139.