

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LAURENT SCHWARTZ

## **Les travaux de L. Gårding sur les équations aux dérivées partielles elliptiques**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1954, exp. n° 67, p. 175-182

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1951-1954\\_\\_2\\_\\_175\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__175_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES TRAVAUX DE L. GÅRDING  
SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ELLIPTIQUES

par Laurent SCHWARTZ

1. Les espaces de distributions liés à un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ .

1°  $\mathcal{C}_{L^2}^m(\Omega)$  espace des fonctions sur  $\Omega$ , dont les dérivées (au sens distributions) d'ordre  $\leq m$  sont dans  $L^2(\Omega)$  : topologie évidente.

Si  $m \leq [\frac{n}{2}]$ , les fonctions de  $\mathcal{C}_{L^2}^m(\Omega)$  ne sont pas nécessairement continues.

2°  $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$  : adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\mathcal{C}_{L^2}^m(\Omega)$ .

PROPOSITION 1. - Si  $f \in \mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$ , la fonction  $\tilde{f}$ , égale à  $f$  dans  $\Omega$  et à 0 ailleurs, appartient à  $\mathcal{D}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ , et pour  $|p| \leq m$ ,  $(D^p f)^\sim = D^p \tilde{f}$

(évident).

En appliquant alors aux dérivées d'ordre  $\leq m - 1$  de  $\tilde{f}$ ,  $f \in \mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$ ,

les résultats de Deny :

PROPOSITION 2. - Il est possible de modifier sur un ensemble de mesure nulle les dérivées d'ordre  $\leq m - 1$  de  $f \in \mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$  de façon qu'elles aient la pseudo-limite 0 en tous les points de  $\hat{\Omega}$ , sauf peut-être ceux d'un ensemble de capacité nulle.

REMARQUE. - Si  $\hat{\Omega}$  est de capacité nulle,  $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega) = \mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$ .

3°  $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$  dual fort de  $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$ . C'est un espace de distributions sur  $\Omega$ .

$\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$  est réflexif.

PROPOSITION 3. - Pour que  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  soit dans  $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$ , il faut et il suffit qu'elle soit une somme de dérivées d'ordre  $\leq m$  de fonctions  $\in L^2(\Omega)$ .

COROLLAIRE. -  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ .

REMARQUE. -  $\mathcal{D}(\Omega)$  n'est pas dense dans  $\mathcal{C}^m_{L^2}(\Omega)$  donc on ne peut pas identifier

$\mathcal{C}^m_{L^2}(\Omega)$  à un espace de distributions.

4°  $\mathcal{C}^m_{L^2}(\Omega)$  a, d'une infinité de manières, une structure hilbertienne. Nous

poserons

$$\begin{cases} \text{pour } \ell \leq m, \|\varphi\|_{\ell}^2 = \sum_{|p|=\ell} \int_{\Omega} |D^p \varphi|^2 dx \\ \|\varphi\|^2 = \sum_{\ell \leq m} \|\varphi\|_{\ell}^2 \end{cases}$$

PROPOSITION 4. - Si  $\Omega$  est borné et  $\varphi \in \mathcal{C}^m_{L^2}(\Omega)$ ,  $\|\varphi\| \leq C(m, \Omega) \|\varphi\|_m$ .

DÉMONSTRATION. - Evident, car pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  :

$$\tilde{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi_1}(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1.$$

PROPOSITION 5. - Si  $\Omega$  est borné, l'immersion de  $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$  dans  $\mathcal{D}^{m-1}_{L^2}(\Omega)$  et de  $\mathcal{D}^{m-1}_{L^2}(\Omega)$  dans  $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$  sont complètement continues.

DÉMONSTRATION. - Un ouvert borné de  $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$  est relativement compact dans  $\mathcal{D}^{m-1}_{L^2}(\Omega)$  (ASCOLI) d'où la première conclusion ; la deuxième par transposition.

## 2. Opérateurs différentiels à coefficients constants.

Soit  $E$  un Banach muni d'une involution  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ . Une application linéaire continue  $D$  de  $E$  dans  $E'$  est dite hermitienne si  $\langle D\varphi, \bar{\psi} \rangle = \langle \varphi, D\bar{\psi} \rangle$  ; il suffit pour cela que  $\langle D\varphi, \bar{\varphi} \rangle$  soit réel. Le lemme fondamental de la théorie des Hilberts dit que si  $\langle D\varphi, \bar{\varphi} \rangle$  est une norme sur  $E$ , équivalente à sa norme initiale,  $D$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $E'$ . Il suffit pour cela que l'on ait

$\langle D\varphi, \bar{\varphi} \rangle \geq C \|\varphi\|^2$  sur un sous-espace dense de  $E$ .

Soit alors  $D$  un opérateur différentiel à coefficients constants homogène d'ordre  $2m$ .

$$(1) \quad D = \sum_{\substack{|p|=m \\ |q|=m}} g_{p,q} D^{p+q}$$

$D$  sera dit elliptique si la forme

$$(-1)^m \sum_{p,q} g_{p,q} (2\pi x)^{p+q} = \hat{D}(x) = \mathcal{F}(D\delta)$$

est définie  $\geq 0$ . Exemple :  $-\Delta$ .

PROPOSITION 6. - Si  $D$  est elliptique, c'est un isomorphisme de  $\mathcal{D}'_{L^2}(\Omega)$  sur  $\mathcal{D}'_{L^2}(\Omega)$ , si  $\Omega$  est borné.

DÉMONSTRATION. - Pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  (d'où par passage à la limite pour  $\varphi \in \mathcal{D}'_{L^2}(\Omega)$ ) :

$$(2) \quad \langle D\varphi, \bar{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{D}(x) |\hat{\varphi}(x)|^2 dx \geq A \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|p|=m} (2\pi x)^{2p} |\hat{\varphi}(x)|^2 dx = A \|\varphi\|_m^2 \geq C \|\varphi\|^2 \quad (\text{proposition 4}).$$

REMARQUES. -

1° Si  $D$  n'est pas homogène, mais si l'ensemble des termes d'ordre  $2m$  est elliptique, et si  $\hat{D}(x) = \mathcal{F}(D\delta)$  est  $\geq 0$ , la conclusion subsiste ; elle subsiste même pour  $\Omega$  non borné si  $\hat{D}(x) > 0$ . Exemple :  $-\Delta + k^2$ .

2° Pour  $\varphi \in \mathcal{E}'_{L^2}(\Omega)$ , on peut avoir  $\langle D\varphi, \bar{\varphi} \rangle < 0$ .

### 3. Etude d'un opérateur différentiel particulier à coefficients variables.

Nous étudierons  $D$  défini par

$$(3) \quad D\varphi = \sum_{\substack{|p|=m \\ |q|=m}} D^q(g_{p,q}(x) D^p \varphi(x)) + \lambda \varphi,$$

$g_{p,q}$  réels,  $g_{p,q} = g_{q,p}$ ,  $\lambda > 0$ .

1° D envoie  $\mathcal{C}_L^m(\Omega)$  dans  $\mathcal{O}_L^m(\Omega)$  si  $g_{p,q} \in L^\infty(\Omega)$  ; nous supposons

les  $g_{p,q}$  uniformément continus dans  $\Omega$ .

2° D est hermitien sur  $\mathcal{O}_L^m(\Omega)$  :

$$(4) \quad \langle D\varphi, \bar{\Psi} \rangle = \langle \varphi, D\bar{\Psi} \rangle = (-1)^m \int_{\Omega} \left[ \sum_{p,q} g_{p,q} (D^p \varphi) (D^q \bar{\Psi}) + \lambda \varphi \bar{\Psi} \right] dx$$

3° Nous supposons D uniformément elliptique :

$$(5) \quad D(x, \hat{x}) = (-1)^m \sum_{p,q} g_{p,q}(x) (2\pi \hat{x})^{p+q} \geq A \sum_{|p|=m} (2\pi \hat{x})^{2p}, \quad x \in \Omega, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^n.$$

PROPOSITION 7. - L'opérateur D ainsi défini est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_L^m(\Omega)$  sur  $\mathcal{O}_L^m(\Omega)$ , si  $\Omega$  est borné et  $\lambda$  assez grand.

DÉMONSTRATION. -

1° Soit  $a \in \Omega$ ,  $D_{(a)}$  l'opérateur à coefficient constant obtenu en remplaçant les  $g_{p,q}(x)$  par  $g_{p,q}(a)$  ; si  $\varphi$  a son support assez petit pour que les  $g_{p,q}$  oscillent d'au plus  $\varepsilon$ , on a, en calculant

$$\langle D_a \varphi, \bar{\varphi} \rangle \text{ (proposition 6) et } \langle (D - D_{(a)}) \varphi, \bar{\varphi} \rangle :$$

$$(6) \quad \langle D\varphi, \bar{\varphi} \rangle \geq c_1 \|\varphi\|_m^2 + \lambda \|\varphi\|_0^2 \text{ si } \varepsilon \text{ assez petit.}$$

2° Recouvrons  $\Omega$  par un nombre fini d'ouverts  $\Omega_j$  assez petits pour que  $g_{p,q}$  y oscille d'au plus  $\varepsilon$ , et soit  $\alpha_j^2$  une partition de l'unité subordonnée,  $\sum_j \alpha_j^2 \equiv 1$  (si  $\beta_j$  est la partition usuelle,  $\alpha_j = \beta_j / \sqrt{\sum \beta_j^2}$ ).

$$(7) \quad \langle D\varphi, \bar{\varphi} \rangle = \sum_j \langle D(\alpha_j \varphi), \overline{\alpha_j \varphi} \rangle + \langle D_1 \varphi, \bar{\varphi} \rangle$$

où  $D_1$  est d'ordre  $\leq 2m - 1$ , donc  $|\langle D_1 \varphi, \bar{\varphi} \rangle| \leq c_2 \|\varphi\|_m \|\varphi\|_{m-1}$ .

On applique alors (6), et comme  $\sum_j \|\alpha_j \varphi\|_m^2$  est lui-même  $\geq \|\varphi\|_m^2 - c_3 \|\varphi\|_m \|\varphi\|_{m-1}$ , il vient

$$(8) \quad \langle D\varphi, \bar{\varphi} \rangle \geq a \|\varphi\|_m^2 - b \|\varphi\|_m \|\varphi\|_{m-1} + \lambda \|\varphi\|_0^2$$

Mais, pour  $c$  assez grand,  $b \|\varphi\|_m \|\varphi\|_{m-1} \leq \frac{a}{2} \|\varphi\|_m^2 + c \|\varphi\|_{m-1}^2$

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \langle D\psi, \bar{\psi} \rangle &\geq \frac{a}{2} \|\varphi\|_m^2 - c \|\varphi\|_{m-1}^2 + \lambda \|\varphi\|_0^2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{a}{2} \sum_{|p|=m} (2\pi \hat{x})^{2p} - c \sum_{|q|=m-1} (2\pi \hat{x})^{2q} + \lambda \right) |\hat{\varphi}(\hat{x})|^2 d\hat{x} \\
 &\geq \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|p|=m} (2\pi \hat{x})^{2p} |\hat{\varphi}(\hat{x})|^2 d\hat{x} \quad (\text{si } \lambda \text{ assez grand}) = \frac{a}{4} \|\varphi\|_m^2,
 \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Si les  $g_{p,q}$  sont constants, on peut prendre  $\lambda = 0$ .

Impossible autrement (contre-exemple).

#### 4. Opérateurs elliptiques quelconques.

Soit  $D$  un opérateur différentiel quelconque d'ordre  $2m$ , dont les coefficients ont des dérivées d'ordre  $\leq m$  continues bornées sur  $\Omega$  supposé borné.  $D$  sera dit uniformément elliptique si les parties réelles  $g_{p,q}$  des coefficients des termes d'ordre  $2m$  sont symétriques, uniformément continues et vérifient (5). Alors

$$(10) \quad D = D_0 + i D_1 + D_2$$

$D_0$  est l'opérateur hermitien  $\geq 0$  inversible du paragraphe 3,  $D_1$  un opérateur hermitien (non nécessairement elliptique), de sorte que  $A = D_0 + iD_1$  est inversible.  $D_2$  est un opérateur différentiel d'ordre  $\leq 2m - 1$ , donc continu de  $\mathcal{C}_{L^2}^m(\Omega)$  dans  $\mathcal{O}_{L^2}^{m-1}(\Omega)$ , donc (proposition 5) complètement continu de

$\mathcal{C}_{L^2}^m(\Omega)$  dans  $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$ . Alors

$$(11) \quad D = A(I + A^{-1} D_2),$$

$A^{-1} D_2$  complètement continu dans  $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$ . D'après la théorie classique :

THÉORÈME fondamental. - Si  $D$  est l'opérateur différentiel (10) et si  $\Omega$  est borné :

1° Si  $D$  opère biunivoquement sur  $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$ , c'est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$  sur  $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$ .

2° Si  $D$  n'opère pas biunivoquement, son noyau  $D^{-1} \{0\}$  est de dimension finie  $N$ , et  $D$  est un homomorphisme de  $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$  sur un sous-espace fermé

de  $\mathcal{D}'_L^m(\Omega)$ , de codimension  $N$ .

REMARQUES. -

1° On peut montrer que  $D + \mu$  est un isomorphisme, sauf pour un ensemble discret de valeurs de  $\mu$ .

2° On peut remplacer  $D_0$  par n'importe quel isomorphisme hermitien  $\geq 0$  de  $\mathcal{D}'_L^m(\Omega)$  sur  $\mathcal{D}'_L^m(\Omega)$ ,  $D_1$  par n'importe quel opérateur hermitien de  $\mathcal{D}'_L^m(\Omega)$  dans  $\mathcal{D}'_L^m(\Omega)$ ,  $D_2$  par n'importe quel opérateur de  $\mathcal{D}'_L^m(\Omega)$  dans  $\mathcal{D}'_L^{m-1}(\Omega)$ , non nécessairement du type différentiel.

### 5. Le problème de Dirichlet.

Soit  $D$  un opérateur elliptique (formule (10)) dans  $\Omega$  borné. Le problème de Dirichlet usuel consiste à trouver une fonction  $f$ , solution de  $Df = g$  dans  $\Omega$ , et dont les dérivées d'ordre  $\leq m-1$  ont des limites données sur  $\dot{\Omega}$ . Soit  $f_1$  une fonction quelconque dont les dérivées ont les mêmes limites sur  $\dot{\Omega}$ , alors  $X = f - f_1$  vérifie  $DX = g - Df_1 = B$ , et ses dérivées d'ordre  $\leq m-1$  tendent vers 0 sur  $\dot{\Omega}$ .

Nous modifierons ce problème comme suit :

1° On imposera  $f \in \mathcal{C}_L^m(\Omega)$ , on supposera donnée  $f_1 \in \mathcal{C}_L^m(\Omega)$ , et on remplacera alors les conditions au bord relatives à  $f$  par  $X \in \mathcal{D}'_L^m(\Omega)$ , ou  $f \equiv f_1 \pmod{\mathcal{D}'_L^m(\Omega)}$ .

2° On supposera  $g \in \mathcal{D}'_L^m(\Omega)$ , alors  $B \in \mathcal{D}'_L^m(\Omega)$ , et le problème de Dirichlet se ramène à l'équation du premier degré à une inconnue (programme de 3e de l'enseignement secondaire)

$$(13) \quad DX = B, \quad X \in \mathcal{D}'_L^m(\Omega), \quad B \in \mathcal{D}'_L^m(\Omega).$$

PROPOSITION 8. - Si  $D$  est biunivoque dans  $\mathcal{D}'_L^m(\Omega)$ , le problème de Dirichlet a une solution et une seule

$$(14) \quad \begin{cases} X = GB \\ f = (f_1 - GD f_1) + Gg \end{cases}$$

Sinon,  $D^{-1} \{0\}$  est de dimension finie  $N$ , il y a  $N$  conditions de compatibilité indépendantes pour  $f_1$  et  $g$  et la solution  $f$  est déterminée à une combinaison près de  $N$  solutions indépendantes de l'équation homogène.

REMARQUES. -

1°  $f_1 - G D f_1 \neq 0$  parce  $f_1 \notin \mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$ . Mais  $f_1 - G D f_1$  ne dépend évidemment que de la classe de  $f_1$  mod  $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$ .

2°  $GD$  est un projecteur de  $\mathcal{E}_{L^2}^m$  sur  $\mathcal{O}_{L^2}^m$ .  $(I - GD)\mathcal{E}_{L^2}^m$ , supplémentaire de  $\mathcal{O}_{L^2}^m$  dans  $\mathcal{E}_{L^2}^m$ , est l'espace des solutions de l'équation homogène c'est-à-dire le noyau  $D^{-1}(0)$ ;  $(I - GD)f_1$  est donc la projection de  $f_1$  sur l'espace de ces solutions.

#### 6. Pour les lecteurs sérieux : le noyau de Green.

Soit  $G = D^{-1}$  dans le cas d'isomorphisme.  $G$  peut être défini par un noyau  $G_{x,\xi}$ , noyau de Green.

En utilisant le caractère hypoelliptique de  $D$  (voir, par exemple, MALGRANGE [5]), on peut montrer que  $G$  est très régulier : il envoie  $\mathcal{O}(\Omega)$  dans  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\mathcal{C}'(\Omega)$  dans  $\mathcal{O}'(\Omega)$ ; (de plus si  $T$  est  $\mathcal{O}'_L^m(\Omega)$  "au voisinage de  $\dot{\Omega}$ ",  $GT$  est  $\mathcal{O}_L^m(\Omega)$  au voisinage de  $\dot{\Omega}$ ). Les singularités de  $GT$  sont celles de  $T$ , et  $G$  est une fonction indéfiniment différentiable pour  $x \neq \xi$ .

On peut donc poser le problème de Dirichlet avec un 2e membre  $g$ , qui soit  $\mathcal{O}'_L^m(\Omega)$  au voisinage de  $\dot{\Omega}$ , alors  $f$  est  $\mathcal{O}'_L^m(\Omega)$  au voisinage de  $\dot{\Omega}$ ; là

où  $g$  est une fonction indéfiniment différentiable il en est de même de  $f$ , et  $f$  est alors une solution au sens usuel de  $Df = g$ .  $G_{x,\xi}$  peut s'écrire  $G_x(\xi)$  ou  $(G(x))_\xi$ .  $G_x(\xi)$  n'est autre que  $G \cdot \delta_x(\xi)$ , c'est, pour  $\xi$  fixé, une distribution qui est, en dehors de  $\xi$ , une fonction indéfiniment différentiable et  $\mathcal{O}'_L^m(\Omega)$  au voisinage de  $\Omega$ .

Si  $m > \frac{n}{2}$ , les fonctions de  $\mathcal{O}'_L^m(\Omega)$  sont continues,  $G_x(\xi)$  est dans

$\mathcal{O}'_L^m(\Omega)$ , donc  $G(x, \xi)$  est une fonction continue en  $x, \xi$ . Dans ce cas,

et en supposant  $D_1 = 0$ , GÅRDING donne [2] la valeur asymptotique de  $G_\lambda(x, \xi)$ , noyau de Green de  $D + \lambda$  (qui existe toujours pour  $\lambda > 0$  assez grand) pour  $\lambda \rightarrow +\infty$  :

$$(15) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{1-\frac{n}{2m}} G_\lambda(x, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \neq \xi \\ 1 & \text{pour } x = \xi \end{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{D_0(x, \xi) + 1} .$$

Si on suppose en outre  $D_2$ , donc  $D$  lui-même, hermitien, les  $\lambda$  pour lesquels  $D + \lambda$  n'est pas inversible sont réels et tendent vers  $-\infty$ , et le nombre  $N(\Lambda)$  de ceux dont le module est  $\leq \Lambda$  est donné par

$$(16) \quad N(\Lambda) \underset{\Lambda \rightarrow \infty}{\sim} \left( \iint_{\substack{x \in \Omega \\ D_0(x, \xi) < 1}} dx d\xi \right) \Lambda^{\frac{n}{2m}}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] GÅRDING (Lars). - Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires dans des domaines bornés, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 233, 1951, p. 1554-1556.
- [2] GÅRDING (Lars). - The asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of a general vibration problem, Kungl. Fysiogr. Sällskap. Lund Forhandl., t. 21, 1951, 10 p.
- [3] GÅRDING (Lars). - Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scand., t. 1, 1953, p. 55-72.

Les résultats de GÅRDING sont à l'origine de nombreux et importants travaux de J.-L. LIONS. Voir notamment :

- [4] LIONS (J.-L.). - Problèmes aux limites en théorie des distributions, Acta Math., t. 94, 1955, p. 13-153 (Thèse Sc. math. Paris. 1954).

Additif à la bibliographie :

- [5] MALGRANGE (Bernard). - Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 283-306.

[Avril 1959]