MARC KRASNER

Les travaux récents de R. Brauer en théorie des groupes

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 14, p. 83-88

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__83_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1949)

LES TRAVAUX RÉCENTS DE R. BRAUER EN THÉORIE DES GROUPES [1], [2]

par Marc KRASNER

1. Rappel de notations classiques sur les représentations des groupes finis.

On se borne aux représentations d'un groupe G sur le corps C des nombres complexes. On suppose connues les notions de représentations équivalentes, de caractère (trace de la matrice $R(s)$), de somme et de produit tensoriel de représentations, de représentations irréductibles. On rappelle :

a. La somme et le produit tensoriel des représentations correspondent à l'addition et à la multiplication ordinaire des caractères.

b. Le nombre h des caractères (et représentations) irréductibles du groupe fini G d'ordre N est égal au nombre des classes d'éléments conjugués de G.

c. Tout caractère φ de G est constant sur toute classe de conjugaison de G et peut donc être considéré comme une fonction définie sur l'ensemble $\mathfrak{K}(G)$ de ces classes.

d. Tout caractère (et toute représentation, théorème de Maschke) est complètement réductible, et est donc combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de caractères irréductibles. Cette représentation est unique en vertu de l'indépendance linéaire des caractères irréductibles. Si K est un corps de nombres algébriques contenant les valeurs de tous les caractères de G (par exemple le corps des racines N-ièmes de l'unité), l'espace vectoriel $X_K(G)$ des combinaisons linéaires à coefficients dans K des caractères (irréductibles) de G est identique (b) à l'espace $K^{\mathfrak{K}(G)}$ de toutes les fonctions définies sur $\mathfrak{K}(G)$ et à valeurs dans K ; il est de dimension h.

e. Relations d'orthogonalité ($\bar{\varphi}$: caractère complexe conjugué de φ). – Pour tout $g \in G$ on note $n(g)$ l'ordre du normalisateur de g dans G.

$$(1) \quad \sum_{g \in G} \varphi_1(g)\,\bar{\varphi}_2(g) = \begin{cases} N & \text{si } \varphi_1 = \varphi_2 \\ 0 & \text{si } \varphi_1 \neq \varphi_2 \end{cases} \quad (\varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ irréductibles})$$

$$(2) \quad \sum_{\varphi} \varphi(\mathfrak{K}_1)\,\bar{\varphi}(\mathfrak{K}_2) = \begin{cases} n(\mathfrak{K}_1) & \text{si } \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2 \\ 0 & \text{si } \mathfrak{K}_1 \neq \mathfrak{K}_2 \end{cases} \quad (\mathfrak{K}_1 \text{ et } \mathfrak{K}_2 \text{ : classes de conjugaison})$$

f. Soit H un sous-groupe de G, et soit $\mathfrak{M}$ un ensemble de m classes de conjugaison de H ; il existe m éléments $(\Psi_1, \ldots, \Psi_m)$ de $X_K(H)$ dont les restrictions à $\tilde{\mathfrak{M}}$ forment une base de $K^{\tilde{\mathfrak{M}}}$. Les classes de conjugaison de G contenant quelque classe de $\tilde{\mathfrak{M}}$ forment un ensemble $\tilde{\mathfrak{K}}$ de puissance $k \leq m$; les restrictions à $\tilde{\mathfrak{K}}$ des $\varphi \in X_K(G)$ s'identifient canoniquement aux restrictions des mêmes φ à $\tilde{\mathfrak{M}}$ et forment donc un espace vectoriel de dimension k. Comme elles s'expriment linéairement à partir des (Ψ_j), on peut écrire pour tout caractère irréductible φ de G, $\varphi = \sum_j \gamma_{ij} \Psi_j$, où (γ_{ij}) est une (k, m)-matrice de rang k sur K.

g. Si $G = G_1 \times G_2$ tout caractère irréductible de G est le produit d'un caractère irréductible de G_1 par un caractère irréductible de G_2 (étendre trivialement à G tout caractère de G_1), et inversement.

h. <u>Représentations et caractères induits</u>. <u>Théorème de Frobenius</u>. - Soit H un sous-groupe d'indice q de G, et soit $G = g_1 H + \ldots + g_q H$, les $g_i H$ étant des classes à droite distinctes de $G \bmod H$; pour tout $g \in G$ soit $g_{g(i)} H$ la classe à droite $gg_i H$; $i \longrightarrow g(i)$ représente donc G par des permutations ; soit $R_H(g)$ la matrice correspondante. Si $h \longrightarrow R(h)$ est une représentation de degré r de H, et si gg_i s'écrit $g_{g(i)} h_i$ $(h_i \in H)$, on remplace dans la matrice $R_H(g)$ tout élément nul par la matrice nulle (d'ordre r) et tout élément égal à 1 (i-ième ligne, $g(i)$-ième colonne) par la matrice $R(h_i)$. On obtient ainsi une matrice $R^*(g)$ (d'ordre qr), et $g \longrightarrow R^*(g)$ est une représentation de G qui, à l'équivalence près, ne dépend que de la classe de R et ne dépend pas du choix des représentants g_i ; R^* est dite la représentation induite par R dans G. Son caractère (dit caractère induit) est donné par $\chi_R^*(g) = \sum_i \chi_R(g_i\, g g_i^{-1})$, la sommation étant étendue aux indices i tels que $g_i\, g g_i^{-1} \in H$; ainsi χ_R^* n'est $\neq 0$ que sur les classes de conjugaison de G rencontrant H ; en particulier si χ_R est nul en dehors d'un ensemble $\tilde{\mathfrak{M}}$ de classes de conjugaison de H, χ_R^* l'est aussi en dehors de l'ensemble $\tilde{\mathfrak{K}}$ des classes de conjugaison de G obtenu par saturation de $\mathfrak{M}$. Les représentations induites par les représentations de degré 1 de R sont les représentations <u>monomiales</u> de G. Si $H \subset H' \subset G$, l'opération d'induction des caractères est <u>transitive</u> ; si $G = G_1 \times G_2$ et si $H_2 \subset G_2$ si φ_1 (resp. φ_2) est un caractère de G_1 (resp. H_2) et si φ_2^* est le caractère induit par φ_2 dans G_2, alors $\varphi_2^* \varphi_1$ est le caractère induit de $\varphi_2 \varphi_1$. Les restrictions à H des caractères irréductibles $(\varphi_1, \ldots, \varphi_h)$ de G sont caractères de H, et par suite des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs des caractères irréductibles de H, soit $\varphi_i = \sum_j a_{ij}\,\omega_j$; d'autre part les caractères induits ω_j^* des ω_j dans G sont combinaisons linéaires (coefficients entiers $\geqslant 0$) des φ_i, soit $\omega_j^* = \sum_i a_{ji}^*\,\varphi_i$; FROBENIUS a montré que les matrices $A = (a_{ij})$ et $A^* = (a_{ij}^*)$ sont <u>transposées</u>, c'est-à-dire que $a_{ji}^* = a_{ij}$.

2. <u>Enoncé de la conjecture d'Artin et du théorème de Brauer.</u>

p étant un nombre premier, un groupe H est dit p-<u>élémentaire</u> s'il est produit direct $\mathfrak{A} \times \Pi$ d'un p-groupe Π et d'un groupe cyclique $\mathfrak{A}$ d'ordre premier à p. Si H est un sous-groupe p-élémentaire de G, Π est un sous-groupe d'un certain p-groupe de Sylow du centralisateur de $\mathfrak{A}$ dans G ; si Π coïncide avec ce groupe de Sylow, H sera dit un sous-groupe p-spécial de G. H sera dit <u>élémentaire</u> (resp. <u>spécial</u>) s'il est p-élémentaire (resp. p-spécial) pour certain p.

E. ARTIN a démontré, à l'aide du théorème de Frobenius, que tout caractère de G est combinaison linéaire à coefficients <u>rationnels</u> de ses caractères <u>monomiaux</u>, et a conjecturé que ces coefficients sont entiers. R. BRAUER a démontré cette conjecture dans le mémoire analysé, et même montré qu'il suffit de prendre les caractères monomiaux de G induits par les caractères de degré 1 des sous-groupes <u>élémentaires</u> de G.

Etant donné que tout caractère irréductible d'un groupe p-élémentaire H y est induit par un caractère de degré 1 d'un sous-groupe p-élémentaire (démonstration facile), il suffira, en vertu de la transitivité de l'induction des caractères, de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME (A). - <u>Tout caractère irréductible</u> φ_i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ <u>de</u> G <u>est combinaison linéaire à coefficients entiers des caractères</u> λ_j^* $(1 \leqslant j \leqslant t)$ <u>induits dans</u> G <u>par des caractères</u> λ_j <u>de ses sous-groupes spéciaux.</u>

La démonstration de (A) se fait par une série de réductions ; le conférencier a apporté certaines simplifications à la méthode de R. BRAUER.

3. <u>Démonstration de (A) par réductions successives.</u>

<u>Réduction</u> 1 (passage du local au global). - Il suffira de montrer que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de K, les φ_i s'expriment comme combinaisons linéaires des λ_j^* à coefficients $\mathfrak{p}$-entiers (c'est-à-dire de dénominateur premier à $\mathfrak{p}$)

de K . En effet de $\lambda_j^* = \sum \gamma_{ji} \varphi_i$ (γ_{ji} : entiers rationnels) on déduit que les mineurs d'ordre h de (γ_{ji}) ont leur plus grand commun diviseur premier à $\mathfrak{P}$ pour tout $\mathfrak{P}$; c'est donc 1 , d'où facilement (A).

Réduction 2 (consistant à découper le groupe G en morceaux convenables et à montrer qu'il suffit de démontrer la proposition précédente dans chaque morceau).

Soit p un nombre premier ; dans chaque classe de conjugaison de G dont l'ordre des éléments est premier à p ("classe p-régulière"), on choisit un représentant α_q ; pour chaque α_q soit π_q un p-groupe de Sylow de son normalisateur $\mathfrak{N}(\alpha_q)$ dans G , et soit $\mathfrak{A}_q$ le groupe cyclique engendré par α_q ; soit $H^{(q)}$ le sous-groupe p-spécial $\mathfrak{A}_q \pi_q$, et soit $\tilde{\mathfrak{K}}^{(q)}$ l'ensemble des classes de conjugaison de G non disjointes de $S(\alpha_q) = \alpha_q \pi_q$. Si $\zeta_1^{(q)}, \ldots, \zeta_{a_q}^{(q)}$ sont les caractères irréductibles de $\mathfrak{A}_q$ (a_q : ordre de $\mathfrak{A}_q$) et $\theta_1^{(q)}, \ldots, \theta_{n_q}^{(q)}$ ceux de π_q , on pose

$$\Psi_j^{(q)} = \sum_{\alpha=1}^{a_q} \bar{\zeta}_\alpha^{(q)}(\alpha_q)\, \zeta_\alpha^{(q)}\, \theta_j^{(q)} \quad ;$$

c'est un caractère de $H^{(q)}$ nul en dehors de $S(\alpha_q)$ en vertu des relations d'orthogonalité appliquées aux ζ_α ; donc le caractère $\Psi_j^{(q)*}$ qu'il induit dans G est nul en dehors de $\tilde{\mathfrak{K}}^{(q)}$; si $\pi \in \pi_q$, on a

$$\Psi_j^{(q)}(\alpha_q \pi) = a_q\, \theta_j^{(q)}(\pi) \quad .$$

Si on prend pour p le nombre premier divisible par $\mathfrak{P}$, les $\Psi_j^{(q)*}$ sont combinaisons linéaires à coefficients $\mathfrak{P}$-entiers des caractères induits dans G par des caractères irréductibles du groupe p-spécial $H^{(q)}$. Etant donné que les $\tilde{\mathfrak{K}}^{(q)}$ forment une partition de G (démonstration facile), et que tout caractère φ_i est somme des $\varphi_i^{(q)}$ ($\varphi_i^{(q)}(\mathfrak{K}) = \varphi_i(\mathfrak{K})$ ou 0 selon que $\mathfrak{K} \in \tilde{\mathfrak{K}}^{(q)}$ ou non), il suffira de montrer que la <u>restriction</u> à $\tilde{\mathfrak{K}}^{(q)}$ <u>de tout</u> φ_i <u>est combinaison linéaire à coefficients</u> $\mathfrak{P}$<u>-entiers de</u> K <u>des</u> $\Psi_i^{(q)*}$.

Enlevons les indices $^{(q)}$ et considérons les matrices $\Phi = (\varphi_i(\mathfrak{K}_K))$ (h , k) et $\Psi = (\Psi_\mu(\mathfrak{K}_K))$ (m , k) (k : nombre de classes de $\tilde{\mathfrak{K}}$) ; soit V la matrice carrée (k , k) formée des k premières lignes de Ψ , il nous suffira de montrer que l'on peut numéroter les Ψ_μ de sorte que toute ligne de Φ soit combinaison linéaire à coefficients $\mathfrak{P}$-entiers des lignes de V , c'est-à-dire qu'il existe une (h, k)-matrice A à éléments $\mathfrak{p}$-entiers de K telle que $\Phi = AV$.

Réduction 3. – Nous allons montrer qu'il existe une telle matrice A qui peut se mettre sous la forme MY^{-1} où M est une (h, k)-matrice, et Y une (k, k)-matrice, toutes deux à éléments $\mathfrak{p}$-entiers de K ; A sera à éléments $\mathfrak{p}$-entiers si la valuation $\mathfrak{p}$-adique $|\det(Y)|$ est égale à 1. Cette réduction se fait en deux temps :

a. Posons $\alpha = \alpha_q$, $S = S(\alpha_q)$, $\Psi_\mu = \Psi_\mu^{(q)}$, $\theta_\mu = \theta_\mu^{(q)}$; soient $\mathfrak{L}_K^{(c)}, \ldots, \mathfrak{L}_K^{(c_K)}$ toutes les classes de conjugaison de $H = H^{(q)}$ en lesquelles se décompose $H \cap \mathfrak{K}_K$; alors l'ensemble des classes de conjugaison de $\Pi = \Pi_q$ est celui des $\mathfrak{H}_K^{(j)} = \alpha^{-1}\mathfrak{L}_K^{(j)}$ $(1 \leq K \leq k,\ 0 \leq j \leq c_K)$, donc $k + \sum_\ell c_\ell = m$. Soit Θ_0 la (m, k)-matrice

$$(\theta_\mu(\mathfrak{H}_K^{(0)})) = a^{-1}\Psi_\mu(\mathfrak{K}_K^{(0)})) \quad .$$

Du fait que la restriction à H d'un φ_i est une combinaison linéaire à coefficients entiers rationnels des $\zeta_\alpha\, \theta_\mu$, résulte que sa restriction à S (dont les éléments ont la projection constante α sur $\mathfrak{A}$) est combinaison **linéaire** des θ_μ, et il existe une (h, m)-matrice $W = (w_{i\mu})$ à éléments entiers de K telle que $\Phi = W\Theta_0$. Le rang de W est k d'après (1.f.). Si $i \to i'$ est la permutation des indices $1, \ldots, h$ telle que $\varphi_{i'} = \bar{\varphi}_i$ et si T est la matrice de permutation correspondante, on obtient, en appliquant le théorème de Frobenius aux expressions des $(\zeta_\alpha\ \Psi_\mu)^*$ à l'aide des φ_i, la relation $\Psi = W'\,T\,\Phi$ (W' : transposée de W). Si l'on met W sous la forme

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} k & m-k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ h-k \end{array} & \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

(les φ_i et les Ψ_μ étant numérotés de manière que $\det(W_1) \neq 0$) on a, si l'on pose $M = \binom{W_1}{W_3}$, $V = M'\,T\,\bar{\Phi}$.

b. On démontre aisément que si une matrice W de la forme considérée est de rang k, elle est égale à MX où X est une (k, m)-matrice. Si l'on pose $X\Theta_0 = R$, R est une matrice carrée de degré k, et on a $\Phi = MR$, d'où $V = M'\,TMR$; $Y = M'TM$ est aussi une matrice carrée de degré k dont les éléments sont des entiers de K ; et, si $\det(Y) \neq 0$, on a $R = Y^{-1} V$, d'où $\Phi = MY^{-1} V$.

Réduction 4. - Cette réduction consiste à ramener, à l'aide des raisonnements locaux qui se trouvent dans les travaux de l'auteur sur les caractères modulaires, la démonstration de $|\det(Y)| = 1$ à un problème de structure des p-groupes.

Travaux à consulter :

[1] BRAUER (Richard). - On the Cartan invariants of groups of finite order, Annals of Math., Series 2, t. 42, 1941, p. 53-61.

[2] BRAUER (Richard). - On Artin's L-series with general group characters, Annals of Math., Series 2, t. 48, 1947, p. 502-514.

[Texte revu en mars 1959]