HENRI CARTAN

Les travaux de Koszul, III

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 12, p. 71-74
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__71_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1949)

LES TRAVAUX DE KOSZUL, III.

par Henri CARTAN.

Les notations de l'exposé précédent sont conservées. Toutefois, on écrit désormais $\Lambda^*(\mathfrak{a})$ au lieu de $\Lambda(\mathfrak{a}')$, pour désigner l'algèbre extérieure de l'espace dual de $\mathfrak{a}$, algèbre qui est en dualité avec $\Lambda(\mathfrak{a})$, algèbre extérieure de $\mathfrak{a}$. On notera $H^*(\mathfrak{a})$ (au lieu de $H(\mathfrak{a}')$) l'*algèbre de cohomologie* de $\mathfrak{a}$, $H^p(\mathfrak{a})$ le sous-espace des éléments homogènes de degré p de $H^*(\mathfrak{a})$. On conserve la notation $H(\mathfrak{a})$ pour l'*espace* d'homologie de $\mathfrak{a}$, et $H_p(\mathfrak{a})$ pour le sous-espace des éléments de degré p de $H(\mathfrak{a})$. Lorsque $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie *réductive*, on a vu que $H(\mathfrak{a})$ est muni d'une *structure multiplicative* : nous désignerons par $H_*(\mathfrak{a})$ l'*algèbre d'homologie* de $\mathfrak{a}$ (espace $H(\mathfrak{a})$ muni de sa structure multiplicative).

Rappelons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ (sur un corps K) est *réductive* si la représentation $x \longrightarrow \theta(x)$ de $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\Lambda(\mathfrak{a})$ est complètement réductible ; une telle algèbre $\mathfrak{a}$ est composée directe d'une algèbre de Lie semi-simple et d'une algèbre abélienne, et la réciproque est exacte si K est de *caractéristique nulle*. Plus généralement, soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$; on dira que $\mathfrak{b}$ est *réductive dans* $\mathfrak{a}$ si la représentation $x \longrightarrow \theta(x)$ de $\mathfrak{b}$ dans l'algèbre des endomorphismes de $\Lambda(\mathfrak{a})$ est complètement réductible ; alors $\mathfrak{b}$ est "réductive" tout court (i.e : réductive dans elle-même).

Si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe *compact* (algèbre sur le corps réel), toute sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$.

1. Chaînes et cochaînes relatives.

Sous-algèbre $\mathfrak{b}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$; d'où homomorphisme (biunivoque) $\varphi : \Lambda(\mathfrak{b}) \longrightarrow \Lambda(\mathfrak{a})$, et son transposé φ^* : $\Lambda^*(\mathfrak{a}) \longrightarrow \Lambda^*(\mathfrak{b})$ (qui est *sur*). Un sous-espace de $\Lambda(\mathfrak{a})$ (resp. de $\Lambda^*(\mathfrak{a})$) est dit $\mathfrak{b}$-*stable* s'il est stable pour les endomorphismes $\theta(x)$ (resp. $\theta^*(x)$), où x parcourt $\mathfrak{b}$. On notera $I(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ le sous-espace des chaînes de $\mathfrak{a}$ *invariantes par* $\mathfrak{b}$, c'est-à-dire des $\alpha \in \Lambda(\mathfrak{a})$ tels que $\theta(x).\alpha = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{b}$. Définition analogue du sous-espace $I^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ des cochaînes invariantes par $\mathfrak{b}$.

Soit $N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ l'<u>idéal</u> de $\Lambda(\mathfrak{a})$ engendré par $\varphi(\mathfrak{b})$; le sous-espace de $\Lambda^*(\mathfrak{a})$ orthogonal à $N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est la <u>sous-algèbre</u> $N^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ engendrée par l'unité et les cochaînes de degré 1 orthogonales à $\mathfrak{b}$. Notation $N^p(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ pour le sous-espace des éléments de degré p de $N^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Les sous-espaces $N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ et $N^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sont $\mathfrak{b}$-stables.

Examinons d'abord le cas particulier où $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre <u>invariante</u> (idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$), c'est-à-dire où $\mathfrak{b}$ est $\mathfrak{a}$-stable, auquel cas l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ est définie. Alors $N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est <u>stable pour</u> ∂ , et $\Lambda(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, muni de l'opérateur ∂ par passage au quotient, s'identifie à $\Lambda(\mathfrak{a}/\mathfrak{b})$; par dualité, $N^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ muni de δ (par rapport auquel il est stable), s'identifie à $\Lambda^*(\mathfrak{a}/\mathfrak{b})$, et est contenu dans $I^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Dans le cas général d'une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ quelconque, le sous-espace $N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + \partial . N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est stable pour ∂ , et est engendré par $N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ et les $\theta(x).\alpha$ (où $\alpha \in \Lambda(\mathfrak{a})$ et $x \in \mathfrak{b}$) ; ∂ opère dans le quotient $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de $\Lambda(\mathfrak{a})$ par $N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + \partial . N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, qu'on appelle l'espace des <u>chaînes relatives</u>. Par dualité, l'intersection $N^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cap I^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) =$ $= L^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ se compose des cochaînes α' de $N^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ telles que $\delta . \alpha' \in N^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$; c'est une <u>sous-algèbre</u> de $\Lambda^*(\mathfrak{a})$: <u>algèbre des cochaînes relatives</u>.

$L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ muni de ∂ définit un <u>espace d'homologie relative</u> $H(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$; il est gradué. L'algèbre $L^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ munie de δ définit une <u>algèbre de cohomologie relative</u> $H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$; c'est une algèbre graduée. Dans le cas particulier où $\mathfrak{b}$ est sous-algèbre invariante de $\mathfrak{a}$, $H(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ et $H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ s'identifient à $H(\mathfrak{a}/\mathfrak{b})$ et $H^*(\mathfrak{a}/\mathfrak{b})$ respectivement.

Cas où $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un <u>groupe compact connexe</u> G , et $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre d'un <u>sous-groupe fermé</u> U : alors $L^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ s'identifie à l'algèbre des formes différentielles extérieures de l'<u>espace homogène</u> $W = G/U$, invariantes par G , et $H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ à l'algèbre de cohomologie de l'espace topologique (compact) W . Les résultats qui suivent donnent des relations (en partie nouvelles) entre les algèbres de cohomologie des espaces G , U et $W = G/U$. On notera que G est espace fibré de fibre U et de base W .

2. <u>Homomorphismes canoniques</u>.

$$\Lambda(\mathfrak{b}) \xrightarrow[\varphi]{} \Lambda(\mathfrak{a}) \xrightarrow[\pi]{} L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \quad \text{et} \quad L^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \xrightarrow[\pi^*]{} \Lambda^*(\mathfrak{a}) \xrightarrow[\varphi^*]{} \Lambda^*(\mathfrak{b}) .$$

Ils définissent

$$H(\mathfrak{b}) \xrightarrow[\tilde{\varphi}]{} H(\mathfrak{a}) \xrightarrow[\tilde{\pi}]{} H(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \quad \text{et} \quad H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \xrightarrow[\tilde{\pi}^*]{} H^*(\mathfrak{a}) \xrightarrow[\tilde{\varphi}^*]{} H^*(\mathfrak{b}) .$$

Les homomorphismes π^* , φ^* , $\tilde{\pi}^*$, $\tilde{\varphi}^*$ sont des homomorphismes d'algèbres. L'image de $\tilde{\varphi}$ est contenue dans le noyau de $\tilde{\pi}$; l'image de $\tilde{\pi}^*$ est contenue dans le noyau de $\tilde{\varphi}^*$.

Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre réductive, le noyau de $H(\mathfrak{a}) \longrightarrow H(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est un idéal bilatère de l'algèbre $H_*(\mathfrak{a})$. Si en outre K est de caractéristique nulle, le théorème de Hopf s'applique à $H^*(\mathfrak{a})$ qui s'identifie à l'algèbre extérieure du sous-espace de ses éléments primitifs ; alors : l'image de $H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \longrightarrow H^*(\mathfrak{a})$ est une sous-algèbre de $H^*(\mathfrak{a})$, engendrée par l'unité et des éléments primitifs de $H^*(\mathfrak{a})$.

Si $\mathfrak{b}$ est sous-algèbre réductive dans $\mathfrak{a}$, on a une algèbre d'homologie $H_*(\mathfrak{b})$, et le noyau de $H(\mathfrak{b}) \longrightarrow H(\mathfrak{a})$ est un idéal bilatère de $H_*(\mathfrak{b})$. Si en outre K est de caractéristique nulle, l'image de $H^*(\mathfrak{a}) \longrightarrow H^*(\mathfrak{b})$ est une sous-algèbre de $H^*(\mathfrak{b})$, engendrée par l'unité et des éléments primitifs de $H^*(\mathfrak{b})$.

3. La dualité de Poincaré pour l'homologie et la cohomologie relatives.

Soient n et m les dimensions respectives de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. Soit ω l'image, dans $\Lambda(\mathfrak{a})$, de la chaîne de dimension m de $\Lambda(\mathfrak{b})$ (définie à un facteur constant près). $N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est le noyau de l'endomorphisme $\alpha \longrightarrow \omega \wedge \alpha$ de $\Lambda(\mathfrak{a})$. Soit $\tau \in \Lambda^{n-m}(\mathfrak{a})$ tel que $\omega \wedge \tau \neq 0$; dans $\Lambda(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, tous les éléments de degré $> n-m$ sont nuls, et les éléments de degré $n-m$ sont proportionnels à la classe $\dot{\tau}$ de τ . Alors $\alpha' \longrightarrow i(\alpha').\tau$ définit un isomorphisme de $N^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sur $\Lambda(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, isomorphisme qui ne dépend que de $\dot{\tau}$.

Supposons désormais $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ unimodulaires ; alors $\dot{\tau}$ est un élément $\mathfrak{b}$ invariant de $\Lambda(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, donc $\alpha' \longrightarrow i(\alpha').\lambda$ définit un isomorphisme de $N^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cap I^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = L^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sur le sous-espace des éléments $\mathfrak{b}$-invariants de $\Lambda(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Si en outre $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$, ce sous-espace s'identifie à $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \Lambda(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + \partial.N(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}))$. D'où un isomorphisme f de $L^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sur $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. De plus

$$\partial\, i(\alpha').\tau = i(\delta . \bar{\alpha}').\tau + i(\bar{\alpha}')\,\partial.\tau \quad .$$

Mais le fait que $\mathfrak{b}$ est réductive dans $\mathfrak{a}$ entraîne que $\partial.\tau \in N + \partial.N$, et comme $i(\bar{\alpha}').(N + \partial.N) \subset N + \partial.N$, on a $\partial.f(\alpha') = f(\delta . \bar{\alpha}')$. Par passage aux quotients, f définit donc un isomorphisme de $H(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sur $H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, qui transforme les éléments de degré p en éléments de degré $n-m-p$. On en déduit que les nombres de Betti "relatifs" sont égaux pour les dimensions p et $n-m-p$ ("dualité de Poincaré"), et que tout idéal non nul de $H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ contient $H^{n-m}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

4. Sous-algèbres non homologues à zéro.

La sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{a}$ est désormais supposée réductive dans $\mathfrak{a}$. Soit m la dimension de $\mathfrak{b}$.

Pour que $H(\mathfrak{b}) \underset{\tilde{\varphi}}{\rightarrow} H(\mathfrak{a})$ soit biunivoque, il suffit que $H_m(\mathfrak{b})$ (qui se compose des multiples d'un élément) ne soit pas dans le noyau de $\tilde{\varphi}$ (car tout idéal bilatère de $H_*(\mathfrak{b})$ qui ne contient pas $H_m(\mathfrak{b})$ est nul). On dit alors que $\mathfrak{b}$ est non homologue à zéro dans $\mathfrak{a}$.

Si $\mathfrak{b}$ est non homologue à zéro dans $\mathfrak{a}$, $H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \rightarrow H^*(\mathfrak{a})$ est biunivoque (et réciproquement). Donc, si en outre $\mathfrak{a}$ est réductive et le corps est de caractéristique nulle, $H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ possède un sous-espace dont les composantes homogènes sont de degrés impairs, et s'identifie à l'algèbre extérieure de ce sous-espace.

Si $\mathfrak{b}$ non homologue à zéro dans $\mathfrak{a}$, $H^*(\mathfrak{a}) \rightarrow H^*(\mathfrak{b})$ est évidemment sur. Si en outre le corps est de caractéristique nulle, on peut définir un isomorphisme de l'algèbre $H^*(\mathfrak{b})$ dans l'algèbre $H^*(\mathfrak{a})$, qui, composé avec l'application canonique $H^*(\mathfrak{a}) \rightarrow H^*(\mathfrak{b})$, donne l'automorphisme identique de $H^*(\mathfrak{b})$. Cette application $H^*(\mathfrak{b}) \rightarrow H^*(\mathfrak{a})$, et l'homomorphisme canonique $H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \rightarrow H^*(\mathfrak{a})$, définissent un homomorphisme d'algèbres (graduées)

$$H^*(\mathfrak{b}) \otimes H^*(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \rightarrow H^*(\mathfrak{a}) \quad ,$$

et on montre que c'est un isomorphisme sur (théorème de Samelson).

Le cas des sous-algèbres homologues à zéro ne sera pas examiné ici (Voir la Thèse de KOSZUL, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 65-127).

[Mai 1957]