

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LAURENT SCHWARTZ

**Sur un mémoire de Petrowsky : « Über das  
Cauchysche Problem für ein System linearer  
partieller Differentialgleichungen im Gebiete der  
nichtanalytischen Funktionen »**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1952, exp. n° 11, p. 65-69

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1948-1951\\_\\_1\\_\\_65\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__65_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UN MÉMOIRE DE PETROWSKY

"Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller  
Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen" [1]

par Laurent SCHWARTZ

1. Préliminaires sur les distributions.

$(\mathcal{D})$  = espace des fonctions  $\varphi$  indéfiniment dérivables à support compact sur l'espace numérique  $\mathbb{R}^n$ .

$(\mathcal{D}')$  = dual de  $(\mathcal{D})$  = espace des distributions.

Le produit de composition de plusieurs distributions est associatif et commutatif dès que toutes, sauf une au plus, ont des supports compacts.

Une distribution  $T$  est bornée sur  $\mathbb{R}^n$  si l'ensemble de ses translatées est un ensemble borné de l'espace vectoriel topologique  $(\mathcal{D}')$ ; ou encore si, quelle que soit  $\varphi \in (\mathcal{D})$ , fixée,  $T_x(\varphi(x-h))$  est borné quand  $h \in \mathbb{R}^n$ . Pour que  $T$  soit bornée, il faut et il suffit qu'elle soit une somme finie de dérivées de fonctions continues bornées sur  $\mathbb{R}^n$  au sens usuel.

$(\mathcal{S})$  = espace des fonctions  $\varphi$  indéfiniment dérivables, à décroissance rapide, c'est-à-dire décroissant, pour  $x \rightarrow \infty$ , plus vite que toute puissance  $< 0$  de la distance  $|x|$ , ainsi que chacune de leurs dérivées.

$(\mathcal{S}')$  = dual de  $(\mathcal{S})$  = espace des distributions tempérées. Pour qu'une distribution  $T \in (\mathcal{D}')$  soit dans  $(\mathcal{S}')$ , il faut et il suffit qu'il existe un entier  $k \geq 0$  tel que la distribution  $T/(1 + |x|^2)^k$  soit bornée sur  $\mathbb{R}^n$ .

La transformation de Fourier usuelle  $\mathcal{F}$  et sa conjuguée  $\overline{\mathcal{F}}$  sont 2 isomorphismes réciproques de  $(\mathcal{S})$  sur lui-même :

$$(1) \quad \begin{cases} u(x) \in (\mathcal{S}), & v(y) \in (\mathcal{S}), \\ v(y) = \iint \dots \int \exp(-2i\pi x \cdot y) u(x) dx, & v = \mathcal{F} u \\ u(x) = \iint \dots \int \exp(+2i\pi x \cdot y) v(y) dy, & u = \overline{\mathcal{F}} v \end{cases}$$

Ce sont aussi 2 isomorphismes réciproques de  $(\mathcal{S}')$  sur lui-même, par la formule de définition :

$$(2) \quad \begin{cases} v = \mathcal{F}U, & U = \overline{\mathcal{F}}v \\ \mathcal{F}U(v) = U(\mathcal{F}v) \\ \overline{\mathcal{F}}v(u) = v(\overline{\mathcal{F}}u) \end{cases}$$

$(\mathcal{O}_M)$  = espace des facteurs de multiplication dans  $(\mathcal{S}')$  = espace des fonctions indéfiniment dérivables, à croissance lente, c'est-à-dire croissant, pour  $|x| \rightarrow \infty$ , moins vite qu'une puissance  $\geq 0$  convenable de  $x$ , ainsi que chacune de leurs dérivées. Si  $T \in (\mathcal{S}')$ ,  $\alpha \in (\mathcal{O}_M)$ , le produit  $\alpha T$  est défini, et  $\in (\mathcal{S}')$ ; la multiplication par  $\alpha$  est une opération linéaire continue dans  $(\mathcal{S}')$ .

$(\mathcal{O}'_C)$  = espace des facteurs de composition dans  $(\mathcal{S}')$  = espace des distributions  $S$  "à décroissance rapide", c'est-à-dire telles que, quel que soit l'entier  $k \geq 0$ , la distribution  $S(1 + |x|^2)^k$  soit bornée sur  $R^n$ . Si  $T \in (\mathcal{S}')$ ,  $S \in (\mathcal{O}'_C)$ , le produit de composition  $S * T$  est défini, et  $\in (\mathcal{S}')$ ; la composition avec  $S$  est une opération linéaire continue dans  $(\mathcal{S}')$ . Si  $T$  est bornée sur  $R^n$ ,  $S \in (\mathcal{O}'_C)$ ,  $S * T$  est bornée sur  $R^n$ .

La transformation de Fourier échange isomorphiquement  $(\mathcal{O}_M)$  et  $(\mathcal{O}'_C)$ , et échange le produit de multiplication avec le produit de composition.

2. Position du problème de Cauchy pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles étudiés par Petrowsky.

Système de  $N$  équations aux dérivées partielles d'ordre fini par rapport à  $N$  fonctions inconnues  $U_i$  :

$$(3) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad \frac{\partial^{p_i} U_i}{\partial t^{p_i}} = \sum_{j=1}^{j=N} L_j(U_j) + f_i(t, x)$$

a.  $t$  est une variable temps,  $x$  une variable d'espace représentant un point de  $R^n$  de coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

b.  $f_i$  est une fonction connue (= second membre).

c.  $L_j$  est un opérateur linéaire différentiel (en  $t$  et  $x$ ) à coefficients fonctions du temps seul :

$$(4) \quad L_j(U_j) = \sum_{k_0 \dots k_n} A_{i,j}^{(k_0, k_1 \dots k_n)}(t) \frac{\partial^{k_0+k_1+\dots+k_n}}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} U_j$$

dans lequel la somme  $k_0 + k_1 + \dots + k_n$  est finie (mais quelconque),  $k_0 < p_j$ .

Le problème de Cauchy est dit bien posé pour un tel système dans un intervalle de temps  $t_1 \leq t \leq t_2$ , si,  $\ell$  étant donné, on peut trouver  $L$  tel que, lorsqu'on se donne des conditions initiales :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial^k U_i}{\partial t^k} = \varphi_i^{(k)}(x) \text{ pour } t = t_0, \quad t_1 \leq t_0 \leq t_2 ; \\ 0 \leq k \leq p_i - 1 ; \quad i = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

et des seconds membres  $f_i(t, x)$ , les fonctions  $f$  et  $\varphi$  étant bornées dans  $(t_1, t_2) \times \mathbb{R}^n$  ainsi que leurs dérivées d'ordre  $\leq L$ , le problème admet une solution unique, pour laquelle les  $U_i$  sont continues et bornées dans  $(t_1, t_2) \times \mathbb{R}^n$  ainsi que leurs dérivées d'ordre  $\leq \ell$ ; si de plus les bornes des  $U_i$  et de leurs dérivées ne dépendent que de celles des  $\varphi, f$  et de leurs dérivées. En général, pour  $\ell$  donné, il faut prendre  $L > \ell$  (pour les dérivées en  $x$ ) (et strictement plus grand que le degré des équations, même si  $\ell$  ne dépasse pas ce degré).

Soit  $(\mathcal{E})$  un espace vectoriel topologique de fonctions sur  $\mathbb{R}^n$ ; il y aura avantage à considérer les  $f_i$  et  $u_i$  comme des éléments de  $(\mathcal{E})$  dépendant du temps. Alors le système (3) devient un système d'équations différentielles où les fonctions inconnues de la variable  $t$  prennent leurs valeurs dans  $(\mathcal{E})$ . Au lieu de prendre pour  $(\mathcal{E})$  un espace de fonctions bornées ainsi que leurs dérivées, on peut prendre des  $L^p$ , ou des espaces de distributions (la solution est alors formée de distributions sur  $\mathbb{R}^n$  dépendant de  $t$ ).

EXEMPLE. - Problème de Cauchy bien posé si, à tout système de distributions  $\varphi, f$  bornées sur  $\mathbb{R}^n$  uniformément pour  $t_1 \leq t \leq t_2$  (respectivement tempérées), correspond une solution unique pour laquelle les  $U_i$  sont bornées sur  $\mathbb{R}^n$  (resp. tempérées) ainsi que leurs dérivées d'ordre  $\leq p_i$  en  $t$ , et dépendent continûment des données.

### 3. Condition pour que le problème de Cauchy soit bien posé.

Une transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  (par rapport aux  $x$  seuls) donne un nouveau système

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^{p_i} v_j}{\partial t^{p_i}} = \sum_{j=1}^{j=N} \mathcal{L}_j(v_j) + g_i(t, y) \\ \mathcal{L}_j(v_j) = \sum_{k_0, \dots, k_n} A_{ij}^{(k_0, \dots, k_n)}(t) (2i\pi y_1)^{k_1} \dots (2i\pi y_n)^{k_n} \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}} v_j \end{cases}$$

qu'on peut considérer comme système différentiel ordinaire dépendant des paramètres  $y$ . Ce système se résoud classiquement par une matrice de Green  $\mathcal{G}(t_0, t; y)$  (dépendant des paramètres  $y$ ), calculé sur le système homogène.

Condition nécessaire et suffisante (A) pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans  $(t_1, t_2)$  :

THÉORÈME. - Il faut et il suffit que  $\mathcal{G}(t_0, t; y)$  soit majorée, uniformément pour  $t_1 \leq t_0 \leq t \leq t_2$ , par une puissance de  $|y|$  quand  $|y| \rightarrow \infty$ .

On montre alors que cette matrice  $\mathcal{G}$  a aussi toutes ses dérivées en  $y$  à croissance lente, donc  $\in (\mathcal{O}_M)$ ; elle est alors la transformée de Fourier  $\mathcal{F}M$  d'une matrice  $M(t_0, t; x)$  qui en réalité est une distribution sur  $R^n$  dépendant de  $t_0$  et  $t$ ; cette distribution est à décroissance rapide ( $\in (\mathcal{O}'_0)$ ). Ses composées avec des distributions bornées sur  $R^n$  sont bornées sur  $R^n$  et c'est ce qui montre le théorème.

4. Systèmes paraboliques.

Un système est parabolique si d'une part il existe un entier pair  $s > 0$  tel que  $k_0 S + k_1 + \dots + k_n \leq p_j S$  dans l'opérateur  $L_j$ , si d'autre part les racines en  $\lambda$  du déterminant de la matrice

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} p_1 & & \\ \lambda & & \\ & p_2 & \\ & \lambda & \\ & & \dots \\ & & & p_N \\ & & & \lambda \end{array} \right) \\ b_{ij} \rightarrow \\ \\ b_{ij} = \sum_{k_0 + k_1 + \dots + k_n = p_j S} A_{ij}^{(k_0, k_1, \dots, k_n)} (t) \lambda^{k_0} (iy_1)^{k_1} \dots (iy_n)^{k_n} \end{array} \right.$$

sont, lorsque  $|y| = 1$ , de parties réelles majorées par  $-\delta < 0$  fixe.

Alors, on peut voir que la condition (A) est remplie, si  $t_0 = t_1$ . De plus la matrice de Green  $E(t, t_0; x)$  est cette fois une fonction analytique entière en  $x$  quel que soit  $t \geq t_0$ . Il en résulte que le système homogène et le système non homogène à seconds membres analytiques en  $x$  n'ont que des solutions analytiques en  $x$ .

Dans un système parabolique, on ne peut pas changer le sens du temps; parabolique pour  $t$  croissant, il ne l'est plus pour  $t$  décroissant.

5. Systèmes hyperboliques.

On suppose cette fois que dans  $L_j$ ,  $k_1 + \dots + k_n \leq p_j$ , (soit  $S = 1$ , avec la notation du cas parabolique). Le système est alors hyperbolique si les racines en  $\lambda$  du déterminant de la matrice (7) sont purement imaginaires et deux à deux distinctes ; extension immédiate au cas d'un système formé de la réunion de plusieurs systèmes hyperboliques ne contenant pas 2 à 2 les mêmes fonctions inconnues.

Alors la condition (A) est encore remplie. Cette fois la matrice de Green  $\overset{M}{\sim}$  est une distribution, mais son support est compact. Il en résulte que, sur un compact de  $\mathbb{R}^n$ , la solution ne dépend que des données  $\varphi$  et  $f$  sur un compact. Il y a "propagation des ondes" avec vitesse finie. On peut inverser le sens du temps.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] PETROWSKY (I.). - Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen, Bull. Univ. Etat Moscou, Série intern., Sect. A, t. 1, 1938, n° 7, 74 p.

J'ai détaillé le présent exposé dans l'article suivant :

SCHWARTZ (Laurent). - Les équations d'évolution liées au produit de composition, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 2, 1950, p. 19-49.