LUC GAUTHIER

Théorie des correspondances birationnelles selon Zariski

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 10, p. 57-64

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__57_0>

THÉORIE DES CORRESPONDANCES BIRATIONNELLES SELON ZARISKI

par Luc GAUTHIER [1]

1. Rappel de définitions.

1° Deux variétés algébriques irréductibles à r dimensions V, V' birationnellement équivalentes sont deux modèles projectifs d'un même corps Σ de fractions rationnelles liées algébriquement : deux sous-variétés irréductibles $W \subset V$ et $W' \subset V'$ sont correspondantes $W\,T\,W'$ s'il existe une valuation v du corps Σ dont le centre sur V est W et dont le centre sur V' est W' (P. SAMUEL [1], paragraphe 5, page 6-03).

Toute W a au moins une transformée W' mais la transformation n'est pas en général strictement biunivoque, c'est-à-dire qu'il existe des W qui admettent plusieurs transformées (et de même dans la réciproque T^{-1} de T) ; nous verrons que ces variétés sont exceptionnelles en ce sens qu'elles appartiennent toutes à une vraie sous-variété F de V.

C'est précisément l'étude de ces exceptions au caractère biunivoque qui est la difficulté importante dans l'examen d'une transformation T.

2° L'anneau quotient $Q(W)$ d'une variété W (anneau local) est le sous-anneau du corps Σ composé des quotients $f(\eta)/g(\eta)$: f, g formes de même degré avec $g \notin \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ étant l'idéal premier de W.

$Q(W) \subset Q(W_1)$ est équivalent à $W \subset W_1$ (P. SAMUEL [1], paragraphe 1, page 6-01)

V est localement normale le long de W si $Q(W)$ est intégralement fermé (sur Σ).

V est localement normale si ceci a lieu pour toutes ses sous-variétés

V est un modèle normal si l'anneau des coordonnées homogènes $K[\eta_0 \ldots \eta_n]$ est intégralement fermé.

3° Théorème de transitivité : si $V\,T\,V'$ et $W\,T\,W'$, pour toute $W_1 \subset W$, il existe au moins une des transformées de W_1, soit W_1', qui est contenue dans W'. En particulier si W' est un point P', tout point de W admet pour transformé P'.

---

[1] Cet exposé fait suite à celui de P. SAMUEL [1].

Critère d'unicité : si $W\ T\ W'$ et $Q(W') \subseteq Q(W)$, W' est la seule transformée de W dans V' .

2. Correspondance entre V et un modèle normal $\overline{V}$.

Si $W \subset V$, $W' \subset \overline{V}$ et $W\ T\ W'$, on a $Q(W) \subseteq Q(W')$. W , W' ont la même dimension.

W' étant donnée, il lui correspond W unique.

W étant donnée, il lui correspond un nombre fini h de variétés W' .

Ce nombre h est aussi celui des idéaux premiers de la fermeture intégrale $\overline{Q}(W)$ qui se réduisent dans $Q(W)$ à l'idéal des non-unités.

Si V est localement normale le long de W , il ne correspond à W qu'une seule W' et $Q(W) = Q(W')$ (P. SAMUEL [1], fin du paragraphe 6, page 6-04).

Si V est elle-même un modèle normal, ou simplement est localement normale, T est régulière (biunivoque sans exception, avec conservation des anneaux locaux).

3. Correspondance entre deux variétés V , V' localement normales.

Si $W \subset V$, $W' \subset V'$, et $W\ T\ W'$, alors W est dite :

régulière si $Q(W) = Q(W')$,

irrégulière si $Q(W) \supset Q(W')$ et $Q(W) \neq Q(W')$,

fondamentale si $Q(W) \not\supset Q(W')$.

A toute W régulière ou irrégulière correspond W' unique et ceci est caractéristique.

Si W est régulière, W' a la même dimension que W et est régulière pour la réciproque T^{-1} .

Si W est irrégulière, W' est fondamentale pour T^{-1} et la dimension de W' est $\leqslant$ à celle de W .

Si W est fondamentale il y a une infinité de variétés W' sur V' qui lui correspondent et la relation $Q(W) \not\supset Q(W')$ est vérifiée pour toute W' qui correspond à W .

La dimension d'une variété fondamentale ne peut pas excéder $r - 2$.

Si T est régulière, toute W est régulière pour T .

4. Définitions relatives au cas général.

Si V et V' ne sont pas localement normales, on leur associe des modèles normaux $\overline{V}\,\overline{V}'$; à $W \subset V$ irréductible correspondent $\overline{W}_1 \ldots \overline{W}_h$. A la transformation : $V\,T\,V'$, on associe $\overline{V}\,\overline{T}\,\overline{V}'$. W est dite :

régulière pour T si toute $\overline{W}_i$ est régulière pour $\overline{T}$.

fondamentale pour T si au moins une $\overline{W}_i$ est fondamentale pour $\overline{T}$.

irrégulière pour T si elle n'est ni régulière ni fondamentale.

Si W est fondamentale, il lui correspond encore une infinité de W'.

Si W a parmi ses transformées W', et si l'on a $W\,T\,W'$ avec $Q(W') \subseteq Q(W)$, on peut encore assurer que W n'est pas fondamentale. Mais les réciproques ne sont plus exactes, et si W n'est pas fondamentale, il ne faut pas croire qu'il existera toujours W' vérifiant $W\,T\,W'$ avec $Q(W') \subseteq Q(W)$.

Cette relation d'inclusion qui était nécessaire et suffisante dans le cas où $V\,V'$ sont localement normales, est encore suffisante mais non plus nécessaire, dans le cas général.

5. La variété de jonction de V et V'.

Considérons la variété des couples de points de $V\,V'$ (dont le point générique est $X_{ij} = \eta_i\ \eta'_j$; $i = 0, \ldots, n$; $j = 0, \ldots, n'$) et sur celle-ci la variété J des couples de points associés par T, dont le point générique est $\xi_{ij} = \eta_i\ \varphi_j(\eta)$ [où $\eta'_j = \varphi_j(\eta)$ représente T].

J est birationnellement équivalente à V et V', et la correspondance T^* dans laquelle VT^*J (resp. T'^* dans laquelle $V'\,T'^*\,J$) a les propriétés remarquables suivantes :

Toute variété irréductible $W^* \subset J$ correspond à une seule sous-variété W de V.

Si $W \subset V$ n'est pas fondamentale pour T elle est régulière pour T^*.

En conséquence, si P et P' sont deux points correspondants $P\,T\,P'$, il n'y a qu'un nombre fini de points P^* sur J tels que $P\,T^*\,P^*$ et $P'\,T'^{*-1}\,P^*$. Si V est localement normale, ce nombre n'est $\neq 1$ que si P est fondamental pour T.

On a ainsi un procédé qui substitue à $V\,T\,V'$ le produit $V\,T^*\,J.J\,T'^{*-1}\,V'$ où chacun des deux facteurs est une transformation qui n'a pas d'éléments fondamentaux sur J.

6. Transformées d'une variété.

La transformée $T[W]$ d'une variété irréductible $W \subset V$ est la sous-variété algébrique de V' caractérisée par les deux propriétés suivantes :

Toute composante irréductible W' de $T[W]$ correspond à W : $W\,T\,W'$.

Toute sous-variété irréductible W' de V' qui correspond à W appartient à $T[W]$.

La transformée totale $T\{W\}$ est le lieu des points $P' \subset V'$ qui correspondent aux points de W : $P\,T\,P'$ et $P \subset W$.

Si une variété irréductible W' appartient à $T\{W\}$ sans appartenir à $T[W]$, il existe $W_1 \subset W$ tel que $W_1\,T\,W'$. Pour les variétés V localement normales, $T\{W\}$ coïncide avec $T[W]$ toutes les fois que W n'admet aucune sous-variété fondamentale.

La considération de $T[W]$ permet de caractériser les variétés fondamentales. La condition nécessaire et suffisante pour que W soit fondamentale pour T est que dans $V\,T^*\,J$ la transformée $T^*[W]$ soit de dimension supérieure à celle de W.

La première partie de cette condition peut être affinée par une étude assez subtile. Pour une variété V quelconque et une sous-variété fondamentale $W \subset V$ dans une transformation $V\,T\,V'$ qui n'admet pas d'éléments fondamentaux sur V', une au moins des composantes de $T[W]$ est de dimension supérieure à celle de W, mais il peut y avoir des composantes de $T[W]$ dont la dimension n'excède pas celle de W. Toutefois, si V est localement normale le long de W, alors toute composante irréductible de $T[W]$ est de dimension supérieure à celle de W.

7. Le lieu fondamental F.

Considérons sur V le système linéaire $|C|$ à coefficients pris dans la fermeture algébrique $\bar{K}$ du corps K, dont les constituants réguliers ont pour transformés, transportés de V' sur un modèle normal $\bar{V}'$, les sections hyperplans de $\bar{V}'$.

La sous-variété base F de $|C|$ après suppression des éventuelles composantes fixes de dimension $r - 1$, est appelée lieu fondamental de T : pour qu'une sous-variété irréductible $W \subset V$ soit fondamentale pour T il faut et il suffit que $W \subset F$.

$T\{F\}$ est constitué de variétés W' dont aucune n'est régulière pour la réciproque T^{-1} de sorte que $T\{W\}$ <u>contient toutes les variétés irrégulières pour</u> T^{-1}.

Si V est localement normale, les sous-variétés irréductibles F_i auxquelles correspondent sur J les composantes irréductibles W_i^* de $T^*\{F\}$. sont appelées les <u>variétés fondamentales isolées</u> de T : les composantes irréductibles de F en font partie, mais il peut y avoir en outre des vraies sous-variétés de ces composantes.

Toute W_i^* est de dimension supérieure à celle de la variété F_i correspondante. En particulier, une W_i^* a la dimension $r - 1$ lorsque, localement, sur F_i un des multiples de $|C|$ est constitué d'intersections complètes.

8. <u>Transformations ayant un lieu fondamental donné.</u>

Si $K[\eta_0 \dots \eta_n]$ et $K[\eta'_0 \dots \eta'_n]$ sont les anneaux de coordonnées homogènes sur V et sur V' et si $\eta'_i = \varphi_i(\eta_0 \dots \eta_n)$ les φ étant des formes de même degré, les idéaux principaux (φ_i) ont un plus grand commun diviseur $\mathfrak{D}$ et en posant : $(\varphi_i) = \mathfrak{D}\Phi_i$, le lieu fondamental F est la variété de l'idéal $(\Phi_0, \dots, \Phi_m)$.

Inversement, ayant choisi sur V, c'est-à-dire dans l'anneau $K[\eta_0 \dots \eta_n]$ un idéal homogène $\mathfrak{a}$, si on prend pour $\mathfrak{a}$ une base constituée de formes de degrés les plus petits possibles et si d est le maximum de ces degrés, toute base $(\varphi_0 \dots \varphi_m)$ pour les formes de degré ν dans $\mathfrak{a}$ où $\nu \geqslant d + 1$, représente une transformée birationnelle V'_ν de V.

La variété de jonction de V et V'_ν est $V'_{\nu+1}$: il en résulte que, pour $\nu > d + 1$, la correspondance est dépourvue d'éléments fondamentaux sur V'_ν. On vérifie que ceci a encore lieu pour $\nu = d + 1$. <u>Les variétés V' sont deux à deux en correspondance birationnelle régulière.</u>

Si la sous-variété N de V définie par $\mathfrak{a}$ est de dimension $\leq r - 2$, on a $F \equiv N$. En particulier, si $\mathfrak{a}$ est irrelevant, V' est transformée régulière de V (F vide). Si N est de dimension $r - 1$, $F \subset N$ mais peut contenir, outre les composantes de N de dimension $\leq r - 2$, des sous-variétés propres des composantes à $r - 1$ dimensions.

9. Transformations monoïdales.

Lorsque dans la construction précédente on prend pour α un idéal premier de dimension $\leq r - 2$ qui définit sur V une sous-variété irréductible W , on dit que T est monoïdale de centre W . En particulier si W est un point, T est dite "quadratique".

W est le lieu fondamental. $T\{W\}$ a toutes ses composantes de dimension $r - 1$, mais peut être réductible, certaines de ses composantes correspondant à des sous-variétés propres de W , c'est-à-dire : le centre W n'est pas nécessairement la seule variété fondamentale isolée de T .

Cependant si tous les points de W sont simples à la fois sur W et sur V , $T[W] = T\{W\} = W'$ est irréductible, de dimension $r - 1$ et tous ses points sont simples à la fois sur W' et sur V' . Si W est de dimension s , W' est engendrée par un système algébrique à s dimensions de variétés Γ' à $r - 1 - s$ dimensions en correspondance biunivoque avec les points de W . Chaque Γ' est irréductible, rationnelle, sans singularité, et par tout point de W' il en passe une et une seule.

Les transformations monoïdales jouent un rôle important dans la résolution des singularités puisque, en choisissant un centre W contenant certaines singularités de V on obtiendra une variété V' sur laquelle les singularités correspondantes seront modifiées, sans l'introduction de singularités nouvelles.

La considération des propriétés relativement simples des transformations monoïdales pose un problème intéressant :

étant donnée V T V' où V et V' sont dépourvues de singularités et T privée d'éléments fondamentaux sur V' , est-il possible de décomposer T en un produit de transformations monoïdales ?

La réponse est affirmative dans le cas des surfaces (ZARISKI : Réduction des singularités des Variétés à trois dimensions) et généralise dans un certain sens le théorème de Noether assurant la décomposition d'une transformation birationnelle plane en produit de transformations quadratiques (bien que les transformations quadratiques de Zariski soient essentiellement différentes de celles de Cremona).

ADDITIF

Voici deux exemples qui ont été donnés pour illustrer cet exposé :

1° Dans le plan affine (x , y) la courbe C :

$$x = (t^2 - 1)t^2$$
$$y = (t^2 - 1)t$$

admet un point singulier, à l'origine $x = y = 0$, obtenu pour $t = -1 , 0 , +1$. Elle n'est pas normale, ni même localement normale.

Dans l'espace affine (x , y , z) la courbe C' :

$$x = (t^2 - 1)t^2$$
$$y = (t^2 - 1)t$$
$$z = t$$

est birationnellement équivalente à C car $t = \frac{x}{y}$. Elle est dépourvue de singularité, et localement normale.

Dans l'espace affine (x , y , z , u) la courbe C'' :

$$x = (t^2 - 1)t^2$$
$$y = (t^2 - 1)t$$
$$z = t$$
$$u = t^2$$

est birationnellement équivalente à C et C' et elle est normale.

2° Si l'on prend pour variété V le plan projectif P (x , y , z) et pour variété V' le plan projectif P' (yz , zx , xy) , ils sont en correspondance birationnelle.

Si l'on considère dans V la sous-variété W (courbe) définie par

$$xy + yz + zx = 0 .$$

On obtient dans P' pour $T[W]$ la droite projective :

$$x + y + z = 0 ,$$

et pour $T\{W\}$ la courbe décomposée en quatre droites projectives :

$$xyz(x + y + z) = 0 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] SAMUEL (Pierre). - La théorie des correspondances birationnelles selon Zariski, Séminaire Bourbaki, t. 1, 1948/49, exposé n° 6.

[2] ZARISKI (Oscar). - A simple analytical proof of a fundamental property of birational transformations, Proc. nat. Acad. U. S. A., t. 35, 1949, p. 62-66.

[3] SEGRE (Beniamino). - Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche, Ann. Mat. pura ed appl., Serie 4, t. 33, 1952, p. 5-48.

Enfin en ce qui concerne les applications qui en sont faites au problème de la résolution des singularités, par O. ZARISKI lui-même, je citerai la bibliographie que j'avais donnée dans mon exposé au Séminaire Bourbaki en mars 1947 [Travaux de Zariski sur la réduction des singularités des variétés algébriques (non multigraphié)] :

[4] ZARISKI (Oscar). - The reduction of the singularities of an algebraic surface, Annals of Math., Series 2, t. 40, 1939, p. 639-689.

[5] ZARISKI (Oscar). - Local uniformization on algebraic varieties, Annals of Math., Series 2, t. 41, 1940, p. 852-896.

[6] ZARISKI (Oscar). - A simplified proof for the resolution of singularities of an algebraic surface, Annals of Math., Series 2, t. 43, 1942, p. 583-593

[7] ZARISKI (Oscar). - Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties, Annals of Math., Series 2, t. 45, 1944, p. 472-542.

[Avril 1959]