SÉMINAIRE N. BOURBAKI

HENRI CARTAN

Les travaux de Koszul, II

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 8, p. 45-52
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__45_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1949)

LES TRAVAUX DE KOSZUL, II.

par Henri CARTAN.

N-B - Le lecteur est renvoyé à l'exposé précédent pour les notions de base. Nous rappelons ici quelques notations essentielles.

1. Rappel de notations.

$\mathfrak{a}$: algèbre de Lie sur un corps K ; éléments $x, y, \ldots$

$\mathfrak{a}'$: espace vectoriel dual de $\mathfrak{a}$; éléments $x', y', \ldots$

$\Lambda(\mathfrak{a})$: algèbre extérieure de $\mathfrak{a}$; éléments $\alpha, \beta, \ldots$

$\Lambda(\mathfrak{a}')$: algèbre extérieure de $\mathfrak{a}'$; éléments $\alpha', \beta', \ldots$

Opérateur $\theta(x)$ (transformation infinitésimale définie par $x \in \mathfrak{a}$) dans $\Lambda(\mathfrak{a})$; on notera désormais $\theta^*(x)$ (et non plus $\theta(x)$) l'opérateur transposé de $-\theta(x)$, qui opère dans $\Lambda(\mathfrak{a}')$.

Opérateur $i(x)$ (produit intérieur par $x \in \mathfrak{a}$) dans $\Lambda(\mathfrak{a}')$; opérateur $e(x)$ (produit extérieur, à gauche, par $x \in \mathfrak{a}$) dans $\Lambda(\mathfrak{a})$; $i(x)$ et $e(x)$ sont transposés.

Opérateurs ∂ (bord) et δ (cobord) dans $\Lambda(\mathfrak{a})$ et $\Lambda(\mathfrak{a}')$ respectivement. δ est transposé de $-\partial$.

Relations entre opérateurs : $\partial\partial = 0$, $\delta\delta = 0$,

(1) $\theta(x) = e(x)\partial + \partial e(x)$, $\theta^*(x) = i(x)\delta + \delta i(x)$;

∂ et $\theta(x)$ commutent ainsi que δ et $\theta^*(x)$.

L'espace vectoriel d'homologie $H(\mathfrak{a})$ est défini par ∂ opérant dans $\Lambda(\mathfrak{a})$; l'algèbre de cohomologie $H(\mathfrak{a}')$ est définie par δ opérant dans $\Lambda(\mathfrak{a}')$ (on a une structure multiplicative sur $H(\mathfrak{a}')$ parce que δ est une antidérivation). Les espaces vectoriels $H(\mathfrak{a})$ et $H(\mathfrak{a}')$ sont canoniquement en dualité.

2. Composée directe de deux algèbres de Lie.

$\mathfrak{a}$ est composée directe de 2 sous-algèbres $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ si :

1) l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ est somme directe des sous-espaces $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$;

2) $[x, y] = 0$ pour $x \in \mathfrak{b}$ et $y \in \mathfrak{c}$. Notation : $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}$.

Alors $\Lambda(\mathfrak{a})$ est canoniquement isomorphe au produit tensoriel $\Lambda(\mathfrak{b}) \otimes \Lambda(\mathfrak{c})$;

si on transporte à ce produit tensoriel la structure multiplicative de $\Lambda(\mathfrak{a})$, on trouve

$$(\beta_1 \otimes \gamma_1).(\beta_2 \otimes \gamma_2) = (-1)^{pq}(\beta_1 \wedge \beta_2) \otimes (\gamma_1 \wedge \gamma_2) \text{ , où } p = \deg \beta_2 \text{ , } q = \deg \gamma_1 \text{ .}$$

(notion de <u>produit tensoriel d'algèbres graduées</u>). Enfin, l'opérateur bord ∂ de $\Lambda(\mathfrak{b}) \otimes \Lambda(\mathfrak{c})$ satisfait à

$$\partial(\beta \otimes \gamma) = (\partial\beta) \otimes \gamma + \bar{\beta} \otimes (\partial\gamma) \qquad (\bar{\beta} = (-1)^p\beta \text{ si } \beta \text{ de degré } p)$$

Il en résulte que l'espace vectoriel $H(\mathfrak{a})$ s'identifie au produit tensoriel $H(\mathfrak{b}) \otimes H(\mathfrak{c})$.

De même, $\Lambda(\mathfrak{a}')$ s'identifie au produit tensoriel d'algèbres graduées $\Lambda(\mathfrak{b}') \otimes \Lambda(\mathfrak{c}')$. La dualité entre $\Lambda(\mathfrak{b}) \otimes \Lambda(\mathfrak{c})$ et $\Lambda(\mathfrak{b}') \otimes \Lambda(\mathfrak{c}')$ est définie par

$$\langle \beta \otimes \gamma , \beta' \otimes \gamma' \rangle = \langle \beta, \beta' \rangle . \langle \gamma, \gamma' \rangle \quad .$$

L'opérateur δ, dans $\Lambda(\mathfrak{b}') \otimes \Lambda(\mathfrak{c}')$, satisfait à

$$\delta.(\beta' \otimes \gamma') = (\delta\beta') \otimes \gamma' + \bar{\beta}' \otimes (\delta\gamma') \quad ,$$

et l'algèbre de cohomologie $H(\mathfrak{a}')$ s'identifie au produit tensoriel des <u>algèbres graduées</u> $H(\mathfrak{b}')$ et $H(\mathfrak{c}')$.

Si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont les algèbres de Lie de deux <u>groupes de Lie compacts connexes</u> G_1 et G_2, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}$ est l'algèbre de Lie du groupe produit $G_1 \times G_2$; on retrouve le théorème suivant lequel l'algèbre de cohomologie (à coefficients réels) de $G_1 \times G_2$ s'identifie canoniquement au produit tensoriel des algèbres de cohomologie de G_1 et de G_2.

3. <u>Algèbres de Lie semi-simples</u>.

Chaque fois qu'il s'agira de semi-simplicité, le corps K sera supposé de <u>caractéristique nulle</u>. On a les caractérisations suivantes, toutes équivalentes, des algèbres de Lie semi-simples :

(a) tout idéal de carré nul (i.e. : donnant naissance à un sous-groupe abélien invariant) est réduit à $\{0\}$;

(b) la forme quadratique $\mathrm{Tr}(\theta(x)\ \theta(y))$ est régulière ;

(c) $\mathfrak{a}$ est composée directe d'algèbres <u>simples</u> (i.e : algèbre de dimension > 1, sans idéal autre qu'elle-même et $\{0\}$) ; une telle décomposition est alors unique. En principe, la détermination de $H(\mathfrak{a})$ et $H(\mathfrak{a}')$ pour $\mathfrak{a}$ semi-simple se ramène donc à celle de l'homologie et de la cohomologie des algèbres simples ;

(d) toute représentation de $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E (de dimension finie sur K) est complètement réductible (i.e : tout sous-espace invariant possède un supplémentaire invariant).

Toute algèbre quotient d'une algèbre semi-simple est semi-simple. On en déduit : si $\mathfrak{a}$ est semi-simple, $\mathfrak{a}$ est identique à l'algèbre "dérivée" $\mathfrak{a}^2$. En particulier, une $\mathfrak{a}$ semi-simple est unimodulaire (cf. 1er exposé).

Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, $x \to \theta(x)$ est une représentation de $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\Lambda(\mathfrak{a})$; de même, $x \to \theta^*(x)$ est une représentation dans l'algèbre des endomorphismes de $\Lambda(\mathfrak{a}')$. Ces représentations s'annulent sur le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{a}$; on sera sûr qu'elles sont complètement réductibles si l'algèbre $\mathfrak{a}/\mathfrak{c}$ est semi-simple, autrement dit si $\mathfrak{a}$ est composée directe d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre abélienne. Une telle algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ sera dite réductive ; nous nous intéresserons particulièrement à l'homologie et la cohomologie des algèbres de Lie réductives. L'algèbre de Lie d'un groupe compact est toujours réductive.

4. Homologie des algèbres de Lie réductives.

Dans la représentation $x \to \theta(x)$ de $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre des endomorphismes de $\Lambda(\mathfrak{a})$, le $\theta(x)$ d'un cycle est un bord, d'après (1) ; de même, le $\theta^*(x)$ d'un cocycle est un cobord.

LEMME 1. - Soit une représentation complètement réductible $x \to \tau(x)$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, de dimension finie, muni d'un opérateur d tel que $dd = 0$; supposons que $\tau(x)d = d\tau(x)$, et que $\tau(x)$ transforme tout "cycle" en un "bord". Soit F le sous-espace des éléments "invariants" de E (i.e : éléments α tels que $\tau(x).\alpha = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$). Alors F est stable pour d, et l'homomorphisme canonique du groupe d'homologie $H(F)$ dans le groupe d'homologie $H(E)$ est un isomorphisme du premier groupe sur le second.

Appliquons ceci aux représentations $x \to \theta(x)$ et $x \to \theta^*(x)$ d'une algèbre réductive $\mathfrak{a}$; F devient $\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{J}'$), sous-algèbre des chaînes (resp. cochaînes) invariantes. Or ∂ est nul pour tout élément de $\mathfrak{J}$, et δ est nul pour tout élément de $\mathfrak{J}'$, en vertu des formules

$$2\partial = \sum_k i(x_k')\,\theta(x_k) \quad , \quad 2\delta = \sum_k e(x_k')\,\theta^*(x_k)$$

(x_k et x_k' bases duales ; voir 1er exposé). Donc $H(\mathfrak{J})$ s'identifie à $\mathfrak{J}$,

$H(\mathfrak{J}')$ à $\mathfrak{J}'$, et le lemme montre que $\mathfrak{J} \to H(\mathfrak{a})$ et $\mathfrak{J}' \to H(\mathfrak{a}')$ sont des isomorphismes sur (il y a une chaîne invariante et une seule dans chaque classe d'homologie ; id. pour cochaînes et cohomologie). De plus $\mathfrak{J}' \to H(\mathfrak{a}')$ est un isomorphisme pour la structure d'algèbre ; on ne peut pas en dire autant de $\mathfrak{J} \to H(\mathfrak{a})$, puisque $H(\mathfrak{a})$ n'a pas de structure multiplicative, mais l'identification de $H(\mathfrak{a})$ à $\mathfrak{J}$, qui possède une structure d'algèbre, définit précisément une structure multiplicative sur $H(\mathfrak{a})$, et permet de parler de l'algèbre d'homologie d'une algèbre de Lie réductive. On démontre que si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact connexe, la structure multiplicative de $H(\mathfrak{a})$ est précisément celle définie par le "produit de Pontrjagin".

REMARQUE. - Sur $\mathfrak{a}$ réductive existe au moins une forme quadrative invariante régulière ; elle définit un isomorphisme de l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{a})$ sur l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{a}')$, et de $\mathfrak{J}$ sur $\mathfrak{J}'$; donc $H(\mathfrak{a})$ et $H(\mathfrak{a}')$ sont des algèbres isomorphes (non canoniquement).

5. Les trois premiers nombres de Betti d'une algèbre de Lie semi-simple.

Remarque préliminaire : pour que α' soit une cochaîne invariante, il faut et il suffit que α' et $i(x).\alpha'$ soient des cocycles quel que soit $x \in \mathfrak{a}$ (conséquence de (1)).

Le premier nombre de Betti est nul : car la relation

$$\langle x \wedge y \ , \ \delta x' \rangle = - \langle [x, y] \ , \ x' \rangle$$

montre que si x' est un cocycle, x' est orthogonal à l'algèbre dérivée $\mathfrak{a}^2$, donc est nul si $\mathfrak{a}$ est semi-simple.

Le deuxième nombre de Betti est nul : toute cochaîne invariante α' de degré 2 est nulle, car $i(x).\alpha'$ est un cocycle de degré 1 pour tout x, donc est nul.

Le troisième nombre de Betti est égal à la dimension de l'espace vectoriel des formes quadratiques invariantes, et, en particulier, il est toujours ≥ 1.

Une forme quadratique invariante est une forme bilinéaire $f(x, y)$ symétrique, telle que $f(\theta(z).x, y) + f(x, \theta(z).y) = 0$ pour tout $z \in \mathfrak{a}$. On définit comme suit un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{J}'^3$ des cochaînes invariantes de degré 3 sur l'espace des formes quadratiques invariantes ; soit donnée α' invariante de degré 3 ; pour chaque $x \in \mathfrak{a}$, $i(x).\alpha'$ est un cocycle de degré 2, donc cohomologue à 0 ; il existe donc une cochaîne x' de degré 1, et une seule, telle que $\delta x' = i(x).\alpha'$; l'application $x \to x'$ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}'$ définit une

forme bilinéaire $f(x, y) = \langle y, x' \rangle$. On a

(2) $$f(x, [y, z]) = - \langle x \wedge y \wedge z , \alpha' \rangle \quad ,$$

et f est symétrique et invariante. Réciproquement, si f est une forme bilinéaire symétrique et invariante, il existe une cochaîne α' et une seule telle que (2) ait lieu, et cette cochaîne est invariante. C.Q.F.D.

REMARQUE. - Cette réciproque vaut même sans supposer la semi-simplicité. En particulier, la forme bilinéaire symétrique et invariante $\mathrm{Tr}\ \theta(x)\ \theta(y)$ définit une cochaîne invariante de degré 3, la "cochaîne de Cartan".

COROLLAIRE. - Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie simple telle que l'unicité (à un facteur scalaire près) d'une forme quadratique invariante soit assurée, le troisième nombre de Betti de $\mathfrak{a}$ est égal à 1. C'est notamment le cas de l'algèbre d'un groupe de Lie compact connexe ; ou d'une algèbre de Lie simple sur un corps algébriquement clos.

6. Homomorphisme d'une algèbre de Lie dans une autre.

Soient $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}$ deux algèbres de Lie quelconques (sur le même corps K) et φ un homomorphisme de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$; φ se prolonge en un homomorphisme, noté encore φ , de l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{b})$ dans l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{a})$. Le transposé φ^* (homomorphisme de $\mathfrak{a}'$ dans $\mathfrak{b}'$) se prolonge en un homomorphisme, noté encore φ^* , de l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{a}')$ dans l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{b}')$; de plus, φ et φ^* prolongés sont deux applications transposées. On a $\partial\varphi = \varphi\partial$, $\delta\varphi^* = \varphi^*\delta$, d'où un homomorphisme $\tilde{\varphi}$ de $H(\mathfrak{b})$ dans $H(\mathfrak{a})$, et un homomorphisme $\tilde{\varphi}^*$ de $H(\mathfrak{a}')$ dans $H(\mathfrak{b}')$, transposé de $\tilde{\varphi}$. L'homomorphisme $\tilde{\varphi}^*$ est aussi un homomorphisme pour les structures multiplicatives.

THÉORÈME 1. - Si les algèbres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont réductives, $\tilde{\varphi}$ est un homomorphisme pour les structures multiplicatives de $H(\mathfrak{b})$ et $H(\mathfrak{a})$.

Ceci se prouve à partir du

LEMME 2. - Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie quelconque ; alors quelles que soient les chaînes α et β de $\Lambda(\mathfrak{a})$, la chaîne

$$\partial.(\alpha \wedge \beta) + (\partial\alpha) \wedge \beta - \bar{\alpha} \wedge (\partial\beta)$$

est orthogonale aux cochaînes invariantes.

Cela étant, considérons une algèbre de Lie réductive, et montrons que si α et

$\bar{\alpha} \wedge \partial\gamma$ sont des cycles, alors $\bar{\alpha} \wedge \partial\gamma$ est un bord : en effet, d'après le lemme 2 , $\partial(\alpha \wedge \gamma) - \bar{\alpha} \wedge \partial\gamma$ est orthogonal aux cochaînes invariantes, et comme c'est un cycle il est orthogonal aux cobords ; il est donc orthogonal à tous les cocycles, et par suite c'est un bord ; ainsi $\bar{\alpha} \wedge \partial\gamma$ est bien un bord. Soient alors α et β des cycles invariants, et α_1 et β_1 des cycles respectivement homologues à α et β ; montrons que si $\alpha_1 \wedge \beta_1$ est un cycle, ce cycle est homologue à $\alpha \wedge \beta$; on a

$$\alpha \wedge \beta - \alpha_1 \wedge \beta_1 = \alpha \wedge (\beta - \beta_1) + (\alpha - \alpha_1) \wedge \beta \quad ,$$

et d'après ce qu'on vient de montrer chacun des termes du second membre est un bord.

De là résulte : dans une algèbre de Lie réductive, si α_1 et β_1 sont des cycles tels que $\alpha_1 \wedge \beta_1$ soit un cycle, la classe d'homologie de $\alpha_1 \wedge \beta_1$ est le produit des classes d'homologie de α_1 et de β_1 .

La démonstration du théorème 1 se fait ainsi : β_1 et β_2 étant deux chaînes <u>invariantes</u> de $\Lambda(\mathfrak{b})$, $\varphi(\beta_1)$, $\varphi(\beta_2)$ et $\varphi(\beta_1 \wedge \beta_2)$ sont des cycles de $\Lambda(\mathfrak{a})$, donc la classe de $\varphi(\beta_1 \wedge \beta_2) = \varphi(\beta_1) \wedge \varphi(\beta_2)$ est le produit des classes de $\varphi(\beta_1)$ et $\varphi(\beta_2)$.

7. <u>Théorème de Hopf-Samelson.</u>

Ce théorème se prouve pour les algèbres de Lie réductives, grâce au théorème 1 ci-dessus. Soit d'abord $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie quelconque, et φ l'"application diagonale" de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a} \subset \Lambda(\mathfrak{a}) \otimes \Lambda(\mathfrak{a})$:

$$\varphi(x) = x \oplus x = x \otimes 1 + 1 \otimes x \quad .$$

D'où un homomorphisme φ de $\Lambda(\mathfrak{a})$ dans $\Lambda(\mathfrak{a}) \otimes \Lambda(\mathfrak{a})$, tel que

$$\varphi(\alpha) = \alpha \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \alpha.$$

L'application transposée φ^* de $\Lambda(\mathfrak{a}') \otimes \Lambda(\mathfrak{a}')$ dans $\Lambda(\mathfrak{a}')$ est un homomorphisme d'<u>algèbres</u> (paragraphe 6) ; il en résulte facilement que

$$\varphi^*(\alpha' \otimes \beta') = \alpha' \wedge \beta' \quad .$$

L'homomorphisme $\tilde{\varphi}$ de $H(\mathfrak{a})$ dans $H(\mathfrak{a}) \otimes H(\mathfrak{a})$ satisfait à

$\tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$ désignant une classe d'homologie.

L'homomorphisme transposé $\tilde{\varphi}^*$ est un <u>homomorphisme d'algèbres</u>, et satisfait à

$$\tilde{\varphi}^*(\tilde{\alpha}' \otimes \tilde{\beta}') = \tilde{\alpha}' . \tilde{\beta}' \qquad \text{(produit dans } H(\mathfrak{a}')) \ .$$

Si maintenant $\mathfrak{a}$ est une algèbre <u>réductive</u>, l'homomorphisme $\tilde{\varphi}$ est aussi un homomorphisme <u>pour les structures multiplicatives</u> de $H(\mathfrak{a})$ et de $H(\mathfrak{a}) \otimes H(\mathfrak{a})$.

On se trouve donc dans la situation algébrique suivante :

A algèbre graduée de rang fini sur un corps K de caractéristique nulle dont la loi de multiplication satisfait aux conditions de commutation et anticommutation habituelles pour une algèbre extérieure ; A' algèbre graduée isomorphe (non canoniquement) à A, et en dualité canonique avec A ; les éléments de degré 0 de A (resp. de A') se composent des multiples de l'unité et sont identifiés aux éléments de K. La dualité entre $A \otimes A$ et $A' \otimes A'$ étant définie par $\langle \alpha \otimes \beta , \alpha' \otimes \beta' \rangle = \langle \alpha , \alpha' \rangle . \langle \beta , \beta' \rangle$, l'homomorphisme canonique $\tilde{\varphi}^*$ de $A' \otimes A'$ dans A' (tel que $\tilde{\varphi}^*(\alpha' \otimes \beta') = \alpha' . \beta'$) a pour transposé $\tilde{\varphi}$ un homomorphisme de A dans $A \otimes A$ <u>qui respecte les structures multiplicatives</u>. Dans une telle situation, appelons <u>primitifs</u> les éléments homogènes de degré ≥ 1 de A (resp. de A') qui sont orthogonaux aux produits $\alpha' . \beta'$ tels que α' et β' soient de degrés ≥ 1 (resp. aux produits $\alpha . \beta$, etc.). On démontre alors le théorème d'algèbre :

THÉORÈME DE HOPF-SAMELSON (abstrait). - Les éléments <u>primitifs</u> sont de <u>degrés impairs</u> ; ils engendrent un sous-espace vectoriel P de A (resp. P' de A') ; l'application canonique $P \longrightarrow A$ (resp. $P' \longrightarrow A'$) se prolonge en un <u>isomorphisme de l'algèbre extérieure</u> $\Lambda(P)$ <u>sur</u> A (resp. un isomorphisme de $\Lambda(P')$ sur A') ; restreinte à P et P', la dualité entre A et A' définit une dualité entre P et P' ; celle-ci se prolonge à la manière habituelle en une dualité entre $\Lambda(P)$ et $\Lambda(P')$, qui, par identification de $\Lambda(P)$ et A, de $\Lambda(P')$ et A', redonne la dualité existant entre A et A'.

L'énoncé précédent s'applique donc si on prend pour A l'algèbre d'homologie $H(\mathfrak{a})$ d'une algèbre de Lie réductive, et pour A' l'algèbre de cohomologie $H(\mathfrak{a}')$.

REMARQUE. - Dans le cas de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ d'un groupe compact connexe, la dimension de l'espace P des éléments primitifs est égale au <u>rang</u> du groupe, c'est-à-dire à la dimension maxima des sous-algèbres abéliennes de $\mathfrak{a}$. On n'a pas encore de démonstration algébrique de ce fait, qui serait à prouver pour une algèbre de Lie réductive.

8. <u>Homomorphisme d'une algèbre réductive dans une algèbre réductive.</u>

Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux algèbres réductives, φ un homomorphisme de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$; conservons les notations du paragraphe 6. Tout élément <u>primitif</u> de $H(\mathfrak{b})$ est transformé par $\tilde{\varphi}$ en un élément <u>primitif</u> de $H(\mathfrak{a})$; tout élément primitif de $H(\mathfrak{a}')$ est transformé par $\tilde{\varphi}^*$ en un élément primitif de $H(\mathfrak{b}')$. Compte tenu

du théorème 1 (paragraphe 6), on en déduit :

THÉORÈME 2. - (cf. SAMELSON). L'idéal des zéros de $\tilde{\varphi}$ est l'idéal de $H(\mathfrak{b})$ engendré par les éléments primitifs de $H(\mathfrak{b})$ dont l'image par $\tilde{\varphi}$ est nulle ; la sous-algèbre image de $\tilde{\varphi}$ est la sous-algèbre de $H(\mathfrak{a})$ engendrée par l'unité et les éléments primitifs de $H(\mathfrak{a})$ qui appartiennent à l'image de $\tilde{\varphi}$. Propriétés analogues pour les algèbres de cohomologie.

COROLLAIRE. - n désignant la dimension de $\mathfrak{b}$, pour que $\tilde{\varphi}$ soit biunivoque, il suffit que $\tilde{\varphi}(\omega) \neq 0$, ω désignant l'élément générateur de $H_n(\mathfrak{b})$.

Le prochain exposé sera consacré à l'étude de l'homologie et de la cohomologie relatives : une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{a}$ étant donnée, on définit l'homologie (resp. la cohomologie) de l'"espace homogène" $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ et on étudie les relations entre l'homologie (cohomologie) de $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{b}$ et de $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$.