Séminaire N. Bourbaki

Jean-Pierre Serre

Groupes d’homotopie

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 44, p. 365-370
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__365_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L’accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l’accord avec les conditions générales d’utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d’une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1951)

GROUPES D'HOMOTOPIE

par Jean-Pierre SERRE

1.- Les espaces de lacets.

Soit X un espace, $a \in X$ un point de X. Soit E l'espace des chemins sur X commençant en a, c'est-à-dire l'espace des applications continues du segment $(0, 1)$ dans X telles que $f(0) = a$. L'espace E est muni de la topologie de la convergence compacte, et l'on voit facilement qu'il est contractile en un point.

Soit p l'application continue de E dans X qui applique le chemin f sur son "extrémité libre", $f(1)$. Si X est connexe par arcs, p applique E sur X, et définit ainsi E comme un "espace fibré" de base X. En un certain sens, on peut dire que E généralise aux groupes d'homotopies supérieurs, la notion de revêtement universel.

Les fibres de E sont les espaces de chemins tracés sur X, d'origine a, et d'extrémité un point fixé $b \in X$. Les groupes d'homologie et d'homotopie de ces fibres sont isomorphes à ceux de l'une d'entre elles, par exemple à ceux de l'espace des lacets tracés sur X et d'extrémités en a. Dans le cas où X est un espace de Riemann complet ces espaces ont été étudiés par Marston MORSE qui a montré que leurs propriétés homologiques sont en rapport étroit avec le nombre de géodésiques joignant deux points donnés de X.

2.- Méthode générale.

Nous allons associer à tout espace X connexe par arcs une suite d'espaces (X_n, T_n) définis comme suit :

$X_o = X$,
T_1 est le revêtement universel de X_o,
X_1 est l'espace des lacets sur T_1,
T_2 est le revêtement universel de X_1,
X_2 est l'espace des lacets sur T_2, etc.

Quels sont les groupes d'homotopie des (X_n, T_n) ? Ils s'obtiennent en remarquant que les groupes d'homotopie supérieurs se conservent par passage au revêtement universel, et se décalent d'une dimension quand on passe à l'espace des lacets (par exemple un "lacet de lacets" n'est rien d'autre qu'une sphère sur l'espace de base). On obtient ainsi :

$$\pi_1(X_n) = \pi_{n+1}(X) \ .$$

Le groupe d'homotopie $\pi_{n+1}(X)$ est donc isomorphe au 1er groupe d'homologie à coefficients entiers de l'espace X_n . On pourrait donc déterminer les groupes d'homotopie de X à partir de ses groupes d'homologie si l'on savait :

a) Etant donné un espace Y , dont on connaît l'homologie et le groupe fondamental, déterminer l'homologie de son revêtement universel Z .

b) Etant donné un espace U , simplement connexe, dont on connaît l'homologie, déterminer celle de l'espace des lacets V sur U .

En fait, aucun des deux problèmes précédents n'est résoluble de façon complète en général ; mais on a sur eux des renseignements partiels importants que l'on obtient en leur appliquant les méthodes introduites par LERAY.

3.- Suite spectrale des espaces fibrés.

Pour pouvoir attaquer le problème b) , nous donnerons d'abord un résumé de la théorie homologique des espaces fibrés.

Soit E fibré, de fibre F , et base B simplement connexe (nous préciserons plus loin le sens qu'il faut attribuer au mot fibré). Si G est un groupe abélien de coefficients, on démontre qu'il existe une suite de groupes :

$$E_2 \ , \ E_3 \ , \ \ldots \ , \ E_r \ , \ \ldots$$

jouissant des propriétés suivantes :

E_2 est la somme directe des $H_q(B \ , \ H_p(F \ , \ G))$; c'est donc un groupe bigradué dont les degrés sont nommés degré-base et degré-fibre. En outre, il est muni d'une différentielle d_2 qui abaisse le degré-base de 2 unités, et augmente le degré-fibre de 1 unité. On a : $H(E_2) = E_3$.

E_r est bigradué ; il est muni d'une différentielle d_r qui abaisse le degré-base de r unités et augmente le degré-fibre de $r-1$. On a : $H(E_r) = E_{r+1}$.

La limite des E_r (en un sens facile à préciser) donne le groupe gradué associé à $H(E)$, c'est-à-dire la somme directe des quotients successifs d'une suite de composition de $H(E)$.

L'existence et les propriétés de cette suite spectrale ont été démontrées par J. LERAY pour la cohomologie de Čech à supports compacts (il faut avoir soin, puisqu'on est en cohomologie, d'inverser le sens des différentielles d_r) ; les conditions que doit satisfaire E sont alors les suivantes :

E est localement trivial sur B , ou bien : E est fibré à groupe structural compact connexe ; de plus E doit être localement compact.

On peut aussi se placer au point de vue de l'homologie singulière. On s'aperçoit alors que la seule condition à imposer à E est la suivante :

E vérifie le théorème de relèvement des homotopies pour les polyèdres.

Cette condition est remplie par l'espace fibré E considéré au n° 1 . En effet, pour qu'une application continue $f : Y \longrightarrow X$ puisse être "relevée" en une application $Y \longrightarrow E$, il faut et il suffit que f soit homotope à une application constante.

Dans ce cas, la limite des groupes E_r pour $r \longrightarrow +\infty$, sera un groupe trivial, c'est-à-dire réduit à G en dimension 0 , et nul pour les autres dimensions. Ceci impose à l'homologie de la fibre des conditions très restrictives, comme on le verra plus loin.

Notons enfin qu'une suite spectrale analogue existe en cohomologie singulière. Les termes E_r y sont des anneaux, et les d_r (qui ont d'ailleurs des propriétés de degré inverses de celles des différentielles de l'homologie) sont des antidérivations.

4.- Suite spectrale des revêtements.

Soit V un revêtement de U , défini par un groupe G d'automorphismes de V . Il existe alors une suite spectrale, entièrement analogue à celle des espaces fibrés, et commençant par :

$$E_2 = H(G , H(V)) .$$

(H(G) désigne l'homologie du groupe G , au sens d'Eilenberg-MacLane).

Cette suite spectrale a pour limite le groupe gradué associé au groupe d'homologie de U . Une suite analogue existe en cohomologie.

Il revient au même de dire que les groupes d'homologie de G , U , V ont entre eux les mêmes relations que ceux d'un espace fibré dont :

la base aurait pour homologie celle de G ,
la fibre aurait pour homologie celle de V ,
l'espace aurait pour homologie celle de U .

Cette suite spectrale est particulièrement commode lorsque G opère trivialement sur les groupes H(V) , et on démontre que c'est justement le cas si U a été comme l'espace des lacets d'un autre espace.

5.- Premières applications.

Revenons maintenant aux notations du n° 2 , et appliquons les résultats des deux paragraphes précédents.

Supposons d'abord que X soit simplement connexe, et que ses groupes d'homologie aient un nombre fini de générateurs en toute dimension (cette dernière condition est sûrement réalisée si X est un polyèdre fini). On montre alors par récurrence sur n que $H_i(X_n)$ a également un nombre fini de générateurs pour tout i et tout n . C'est une simple conséquence de deux résultats plus généraux sur les espaces fibrés et les revêtements. Comme les groupes d'homotopie de X sont isomorphes à certains groupes d'homologie des X_i , il en résulte que les groupes d'homotopie de X ont un nombre fini de générateurs.

Supposons maintenant que X vérifie, en plus des deux conditions précédentes, la condition suivante :

$$H_i(X , k) = 0 \quad (0 < i < n) \quad , \quad k \text{ étant un corps.}$$

On montre alors, par récurrence sur j , que les groupes $H_i(X_j , k)$ sont nuls pour $i + j < n$, et égaux à $H_j(X , k)$ pour $i + j = n$. En faisant alors $i = 1$, on trouve :

Les groupes d'homotopie de X vérifient les conditions :

$$\pi_i(X) \otimes k = 0 \qquad i < n \qquad \text{et} \qquad \pi_n(X) \otimes k = H_n(X , k) .$$

En particulier, le 1er groupe d'homologie d'un espace qui est non nul modulo p (p premier), coïncide avec le 1er groupe d'homotopie jouissant de la même propriété.

6.- Finitude des groupes d'homotopie des sphères impaires.

Soit k un corps de caractéristique 0 . Nous désignerons par A(m) (resp. S(n)) une algèbre extérieure (resp. de polynomes) sur k , qui est engendrée par un seul élément de degré m (resp. n) . Dans tout ce qui suit, m sera impair, et n pair.

LEMME.- Soit X un espace simplement connexe, F l'espace des lacets sur X . Si $H^*(X , k)$ (algèbre de cohomologie de X à coefficient $\in k$) est isomorphe à A(n) (resp. S(n)) , alors $H^*(F , k)$ est isomorphe à $S(n - 1)$ (resp. $A(n - 1)$), à condition que n soit impair (resp. pair).

La démonstration ne présente pas de difficulté.

Une fois ce lemme admis, considérons l'espace $X = S_n$ (n impair $\geqslant 3$) ainsi que les espaces X_i que l'on définit à partir de X comme au n° 2. Il résulte du lemme que la cohomologie des X_i est alternativement une algèbre de polynomes et une algèbre extérieure jusqu'à $H^*(X_{n-1}, k) = A(1) = H^*(S_1)$.

On tire alors du n° 4 que T_n, revêtement universel de X_{n-1}, a une cohomologie triviale (comparer avec le fait que le revêtement universel de S_1 est R, qui est rétractile). En appliquant les résultats du n° 5, cela donne :

$$\pi_i(T_n) \otimes k = 0 \quad \text{pour tout } i ,$$

ou, en revenant aux groupes d'homotopie de S_n :
Les groupes d'homotopie $\pi_i(S_n)$ (n impair) sont finis si $i > n$. (On montre qu'il en est de même de ceux de S_n, n pair, à l'exception de $\pi_{2n-1}(S_n)$ qui est la somme directe de Z et d'un groupe fini).

7.- Autres résultats.

En opérant en caractéristique p (p premier), on obtient des résultats quelque peu différents ; on peut déterminer le premier groupe d'homotopie de S_3 non nul modulo p (correspondant à une dimension > 3). On trouve que c'est $\pi_{2p}(S_3)$, et que l'on a :

$$\pi_{2p}(S_3) \otimes Z_p = Z_p .$$

En particulier, on a $\pi_6(S_3) \otimes Z_3 = Z_3$, (N.E. STEENROD avait démontré que $\pi_6(S_3) \otimes Z_3 \neq 0$).

On peut faire le même calcul pour S_n, n quelconque. Le résultat est analogue. Par contre, si l'on veut essayer de déterminer le second groupe d'homotopie non nul modulo p, on est conduit à des calculs presque inextricables.

ADDITIF

Les démonstrations détaillées des résultats de cet exposé ont paru dans :

SERRE (Jean-Pierre). - Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, Ann. of Math., vol. 54, 1951, p. 425-505.

Depuis cette date, les groupes d'homotopie ont fait l'objet de nombreux travaux qu'il est impossible de citer tous ; on en trouvera une bibliographie dans :

HILTON (P. J.). - An introduction to homotopy theory. - Cambridge, University

Press, 1953 (Cambridge Tract n° 43).

CARTAN (Henri). - Séminaire Cartan, t. 7, 1954/55.

JAMES (I. M.). - On the suspension sequence, Ann. of Math., vol. 65, 1957, p. 74-107.

TODA (H.). - On the double suspension E^2 , J. Inst. Polytechn. Osaka Univ., vol. 7, 1956, p. 103-145.

[Avril 1957]