SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LAURENT SCHWARTZ

Les théorèmes de Whitney sur les fonctions différentiables

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 45, p. 355-363

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__355_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1951)

LES THÉORÈMES DE WHITNEY SUR LES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES.

par Laurent SCHWARTZ

Tous ces théorèmes sont valables sur des variétés différentiables, par passage du local au global (partition de l'unité ; on les démontre sur R^n.

Notations à une variable :

$$x = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n) , \quad |x| = \min (1 , \sqrt{\sum x_i^2}) ;$$

si $p = (p_1 , p_2 , \ldots , p_n)$,

$$D^p = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{p_2} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n} ,$$

$$|p| = p_1 + p_2 + \ldots + p_n ; \quad p! = p_1 ! \, p_2 ! \ldots p_n ! ; \quad x^p = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} .$$

Formule de Taylor :

$$f(x) = \sum_p D^p f(0) \frac{x^p}{p!} .$$

1. Un lemme sur les partitions de l'unité.

LEMME 1. - Soit A un ensemble fermé de R^n. Quels que soient les nombres réels a , b , ε, $0 < a \leq b < 1$, $0 < \varepsilon < 1$, il existe un recouvrement $R = (J_\nu)_{\nu=0,1,2,\ldots}$ de $\complement A$ et un entier N tels que :

(1)
1° Chaque élément de R soit une boule ouverte J_ν, de rayon compris entre a fois et b fois la distance de son centre à A ;

2° Les homothétiques de ces boules, par rapport à leur centre, dans le rapport $\varepsilon > 0$, forment encore un recouvrement de $\complement A$;

3° Quel que soit $x \in \complement A$, la boule de centre x, de rayon $(1 - \varepsilon)$ fois la distance de son centre à A, rencontre au plus N des boules appartenant à R.

Un tel recouvrement, qu'on choisira une fois pour toutes, s'appellera recouvrement standard de $\complement A$.

A partir de lui on détermine une "partition standard" de l'unité : $\theta(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable $\geqslant 0$ ayant, pour support la boule unité, > 0 dans l'intérieur de cette boule ;

$\theta_\nu(x)$ transformée par une homothétie de façon à avoir pour support J_ν, et $\varphi_\nu = \dfrac{\theta_\nu}{\sum_j \theta_j}$. Alors (1) donne :

LEMME 2. - Une partition standard (φ_ν) attachée à un recouvrement standard (J_ν) vérifie :

A φ_ν a pour support J_ν, $\varphi_\nu \geqslant 0$, $\sum_\nu \varphi_\nu = 1$ sur $\complement A$.

B $|D^p \varphi_\nu| \leq C_p/d_\nu^{|p|}$, d_ν étant la distance à A du centre de J_ν ; les C_p sont des constantes.

Première partie :

Théorème sur le prolongement des fonctions différentiables [4] (1).

2. Définitions.

Une fonction m fois continûment différentiable sur un ensemble fermé A de R^n est un système de fonctions $f_p(x)$ $(|p| \leq m)$, $(f(x) = f_o(x))$, définies sur A, ayant la propriété suivante :

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \text{Soit, pour } x \text{ et } z \text{ dans } A : \\ f_p(x) = \displaystyle\sum_{|p+q| \leq m} \frac{f_{p+q}(z)}{q!} (x-z)^q + R_p(x\,;\,z) \;; \end{cases}$$

pour tout $x_o \in A$ et tout $\alpha > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \text{pour } x \text{ et } z \text{ dans } A, \quad |x - x_o| \leq \delta, \quad |z - x_o| \leq \delta, \\ |R_p(x\,;\,z)| \leq \alpha |x - z|^{m-|p|} \quad . \end{cases}$$

On posera, pour $z \in A$ et $x \in R^n$

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \psi(x\,;\,z) = \displaystyle\sum_{|q| \leq m} \frac{f_q(z)}{q!} (x-z)^q \text{, et on a} \\ D^p \psi(x\,;\,z') = D^p \psi(x\,;\,z) + \displaystyle\sum_{|p+q| \leq m} \frac{R_{p+q}(z'\,;z)}{q!} (x - z')^q \quad . \end{cases}$$

Un prolongement de la fonction différentiable à R^n entier est une fonction $F(x)$ définie et m fois continuement différentiable sur R^n, telle que

---

(1) La démonstration de Whitney a été très simplifiée par HESTENES [2].

$$D^p F(x) = f_p(x) \quad \text{sur} \quad A . \tag{6}$$

3. Le prolongement.

THÉORÈME 1. – Toute fonction m fois continuement différentiable sur A peut être prolongée à R^n.

DÉMONSTRATION. – On prend une partition standard de $\complement A$, on appelle x_ν une projection sur A du centre de J, et on prend

$$\begin{cases} F(x) = \sum_\nu \varphi_\nu(x)\ \psi(x\ ;\ x_\nu) & \text{sur } \complement A\ ; \\ F(x) = f(x) & \text{sur } A . \end{cases} \tag{7}$$

La somme est fine sur tout compact de $\complement A$, donc F est indéfiniment différentiable sur $\complement A$ et m fois dans l'intérieur A^o de A. Il reste à montrer que $D^p F$ tend vers f_p sur A. Soit x_o une projection de $x \in R^n$ sur A.

$$D^p F(x) - D^p\psi(x\ ;\ x_o) = \sum_\nu \sum_{|p+q|\leq m} \binom{p}{q} D^q \varphi_\nu(x)[D^{p-q}\psi(x\ ;\ x_\nu) - D^{p-q}\psi(x\ ;\ x_o)] \tag{8}$$

$$|D^p F(x) - D^p\psi(x\ ;\ x_o)| \leq K_o \alpha \sum_{|p+q|\leq m} |x - x_o|^{-|q|}\ |x - x_o|^{m-|p|+|q|} \leq K \alpha \tag{9}$$

(en appliquant (1), (2), (4), (5)).

Comme α est aussi petit qu'on veut, cette quantité tend vers 0 pour $x \to a \in A$; donc pour $x \to a \in A$, $D^p F(x) \to D^p\psi(a\ ;\ a) = f_p(a)$.

4. Remarques et extensions.

1° Pour m infini, il faut prendre des $\psi_{(k)}(x\ ;\ z)$ limités aux termes d'ordre $= k$, $k \to \infty$ quand J_ν tend vers A.

2° Sur une variété, on peut prolonger n'importe quel champ de tenseurs différentiables donné sur un fermé A.

3° Le théorème 1 est trivial si on suppose que :

A. ou bien $f(x)$ est donnée déjà sur un voisinage de A, et on cherche $F(x)$ coincidant avec f sur un voisinage de A.

B. ou bien A est une sous-variété différentiable.

4° THÉORÈME 2. - Toute fonction m fois continuement différentiable (m fini ou infini) sur un ensemble fermé A de R^n peut être étendue à R^n par une fonction G, m fois continuement différentiable sur R^n, analytique sur $\complement A$.

5. Majoration du prolongement [5], [6] (2).

A étant compact, existe-t-il une constante λ telle que, si

$$|f_p(x)| \leq M, \quad |p| \leq m, \quad x \in A, \tag{11}$$

il existe un prolongement $F(x)$ vérifiant

$$|D^p F(x)| \leq \lambda M, \quad |p| \leq m, \quad x \in R^n \ ? \tag{12}$$

Il suffit de raisonner au voisinage d'un point a de A. Alors les $D^p \psi(x, x_o)$ (x_o projection de x sur A) sont majorés comme il faut, et (9) fait intervenir α, qui dépend des $R_p(x ; z)$. Il s'agit donc de majorer le α de la formule (4).

Expression du reste de la formule de Taylor (pour x et z dans A) :

$$R_p(x ; z) = - \sum_{|p+q|=m} \int_z^x [f_{p+q}(\xi) - f_{p+q}(z)] \frac{d_\xi (x-\xi)^q}{q!} \tag{13}$$

l'intégrale étant prise sur n'importe quelle courbe rectifiable joignant z à x dans A. Si $L \leq \omega |x - z|$ est la longueur de cette courbe :

$$|R_p(x, z)| \leq C \omega^{m-|p|} |x - z|^{m-|p|} \quad \text{ou} \quad \alpha \leq C \omega^m \quad \text{et} \quad \lambda \leq \lambda_0 \omega^m. \tag{14}$$

D'où :

THÉORÈME 3. - On aura une majoration (12) avec $\lambda = \lambda_0 \omega^m$, si l'ensemble A a la propriété (P) de Whitney :

(P) Il existe un nombre ω tel que, quels que soient les points x et z de A assez voisins, on puisse les joindre dans A par une courbe de longueur $L \leq \omega |x - z|$.

Si maintenant on suppose seulement $L \leq \omega |x - z|^{\frac{1}{r}}$, alors

$$|R_p(x, z)| \leq C \omega^{m-|p|} |x - z|^{\frac{m-|p|}{r}} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} |D^p F(x) - D^p \psi(x ; x_o)| &\leq K_o \omega^{m-|p|} \sum_{q \leq p} |x - x_o|^{-|q| + \frac{m-|p|+|q|}{r}} \\ &\leq K \omega^{m-|p|} |x - x_o|^{\frac{m}{r} - |p|} \end{aligned} \tag{16}$$

---

(2) Le problème de la majoration du prolongement a été réétudié et amélioré par G. GLAESER [1].

d'où (12), $\lambda = \lambda_0 \omega^m$, mais seulement pour les dérivées de F d'ordre $|p| \leq \mu = [\frac{m}{r}]$.

Deuxième partie :

6. Définitions.

$(\mathcal{E}^m)$ (m fini) sera l'algèbre des fonctions m fois continuement différentiable sur R^n, avec la topologie de la convergence compacte des dérivées d'ordre $\leq m$. $\mathcal{J}$ sera un idéal de $(\mathcal{E}^m)$.

Soit $a \in A$. Si on considère l'idéal fermé des $f \in (\mathcal{E}^m)$ nulles en a ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$, le quotient de $(\mathcal{E}^m)$ par cet idéal est l'anneau ponctuel $(\mathcal{E}^m)_a$ de $(\mathcal{E}^m)$ au point a ; il est isomorphe à l'anneau des polynômes modulo les monômes de degré $m + 1$, le polynôme de degré $\leq m$ associé à $f \in (\mathcal{E}^m)$ étant son polynôme-section de Taylor limité à l'odre m.

L'application canonique π_a de $(\mathcal{E}^m)$ sur $(\mathcal{E}^m)_a$ applique $\mathcal{J}$ sur un idéal $\mathcal{J}_a = \pi_a \mathcal{J}$, appelé idéal ponctuel de $\mathcal{J}$ en a. L'idéal $\overset{-1}{\pi} \mathcal{J}_a$ est un idéal fermé "primaire" de $(\mathcal{E}^m)$, de co-dimension finie, contenu dans un seul idéal maximal fermé.

THÉORÈME 4. – <u>Un idéal fermé $\mathcal{J}$ est déterminé par ses idéaux ponctuels $\mathcal{J}_z$: il est l'intersection des idéaux fermés primaires $\overset{-1}{\pi}_z \mathcal{J}_z$ qui le contiennent.</u>

$\mathcal{J}$ sera un idéal quelconque. Une fonction appartient à $\mathcal{J}$ <u>au voisinage d'un compact</u> K s'il existe une fonction $\in \mathcal{J}$ coïncidant avec elle sur un voisinage de K. Une fonction appartient <u>localement</u> à $\mathcal{J}$ si au voisinage de tout point elle appartient à $\mathcal{J}$, alors elle appartient à $\mathcal{J}$ au voisinage de tout compact ; soit $\tilde{\mathcal{J}}$ l'ensemble de ces fonctions. On montrera que, si une fonction $F(x) \in (\mathcal{E}^m)$ est telle que $\pi_a F \in \pi_a \mathcal{J}$ pour tout $\mathcal{J}$, alors quelle que soit $\varepsilon > 0$, il existe $f \in \tilde{\mathcal{J}}$ telle que

$$(17) \qquad |D^p F(x) - D^p f(x)| \leq \varepsilon , \quad |p| \leq m .$$

LEMME 3. – <u>La dimension $\lambda(z)$ de l'idéal ponctuel $\pi_z \mathcal{J}$ est une fonction semi-continue inférieurement de</u> z.

Car si des $f^{(\nu)} \in \mathcal{J}$ sont telles que les $\pi_a f^{(\nu)}$ soient indépendantes dans $\pi_a \mathcal{J}$, les $\pi_z f^{(\nu)}$ le sont dans $\pi_z \mathcal{J}$ pour z voisin de a.

COROLLAIRE. - L'ensemble B_λ des points z où $\pi_z\mathcal{J}$ a une dimension $\geqslant \lambda$ est ouvert, l'ensemble $A_\lambda = B_\lambda - B_{\lambda+1}$ où il a la dimension λ est fermé dans B_λ, donc localement compact.

7. Formule locale d'approximation.

Il existe $f_a \in \mathcal{J}$ telle que $\pi_a F = \pi_a f_a$, donc quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(a\,;\,\varepsilon) > 0$ tel que

$$(18) \qquad |D^p F(x) - D^p f_a(x)| \leq \varepsilon |x-a|^{m-|p|} \quad \text{pour} \quad |x-a| \leq \delta(a,\varepsilon) \;.$$

δ dépend de ε et de a. Mais :

LEMME 4. - Lorsque z parcourt n'importe quel compact de A_λ, $\delta(a,\varepsilon)$ est borné inférieurement pour ε donné.

Car, si dans le voisinage Ω d'un point a de A_λ, $f^{(\nu)}(x) \in \mathcal{J}$ ($\nu = 1,2 \dots \lambda$) sont indépendantes (lemme 4), alors pour $z \in A_\lambda \cap \Omega$

$$(19) \qquad f_z(x) = \sum_\nu u^{(\nu)}(z)\, f^{(\nu)}(x) \,, \quad u^{(\nu)}(z) \text{ continues}$$

$$(20) \qquad \begin{aligned} D^p f_z(x) &= \Big(\sum_{|p+q| \leq m} \frac{(x-z)^q}{q!} D^{p+q} F(z)\Big) + \sum_\nu u_\nu(z)\, R_p^{(\nu)}(x\,;\,z) = \\ &= (D^p F(x) - \rho_p(x\,;\,z)) + \sum_\nu u_\nu(z)\, R_{p,\nu}(x\,;\,z) \end{aligned}$$

d'où

$$(21) \qquad \begin{cases} |D^p F(x) - D^p f_z(x)| \leq N\varepsilon |x-z|^{m-|p|} \\ \text{pour} \quad z \in \Omega \cap A_\lambda, \quad |x-z| \leq \delta(\varepsilon) \;. \end{cases}$$

On utilisera le lemme comme suit :

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta^{(\lambda)}(z) > 0$ continue telle que

$$(22) \qquad |D^p F(x) - D^p f_z(x)| \leq \varepsilon\, |x-z|^{m-|p|} \,, \quad |p| \leq m \,, \text{ pour } |x-z| \leq \delta^{(\lambda)}(z).$$

8. Approximation locale de F dans un ouvert B_λ.

On construit $\delta^{(\lambda)}(z)$ associée à $\varepsilon_1 < \varepsilon$ sur A_λ (lemme 5), de façon que pour tout $z \in A_\lambda$, $\delta^{(\lambda)}(z)$ soit petit devant la distance de z à $\complement B_\lambda$. R_λ sera la réunion des boules $|x-z| \leq \delta^{(\lambda)}(z)$, R'_λ la réunion des boules

$|x - z| \leq \delta^{(\lambda)}(z)/2 \quad (z \in A_\lambda)$. Il est ensuite nécessaire de remplacer A_λ par un ensemble discret dénombrable A'_λ assez serré pour que les ensembles ouverts analogues à R_λ et R'_λ associés à A'_λ soient très sensiblement les mêmes que pour A_λ, et nous les identifierons.

Soient alors (J_ν), (φ_ν), un recouvrement et une partition standards de l'ensemble ouvert $B_\lambda - A'_\lambda$ (lemmes 1 et 2). Nous approximerons F dans B_λ par

$$(23) \qquad \begin{cases} f^{(\lambda)}(x) = \sum_{\nu'} \varphi_\nu(x)\, f_{x_\nu}(x) & \text{pour } x \in B_\lambda - A'_\lambda \\ f^{(\lambda)}(z) = f_z(z) & \text{pour } z \in A'_\lambda . \end{cases}$$

(x_ν = projection de y_ν, centre de J_ν, sur $A'_\lambda \cup \complement B_\lambda$) la fonction $f^{(\lambda)}(x)$ a les propriétés suivantes :

A. $f^{(\lambda)}(x)$ est dans $(\mathcal{E}^m)$.

C'est évident pour $x \in B_\lambda - A'_\lambda$.

Lorsque x tend vers A'_λ, le raisonnement du paragraphe 3 le montre ($f_{x_\nu}(x)$ remplace $\psi(x\,;\,x_\nu)$, (23) remplace (4) et (5)). Mais c'est ici encore plus simple grâce à la structure discrète de A'_λ, et même :

B. $f^{(\lambda)}(x)$ appartient à $\tilde{\mathfrak{J}}$ dans B_λ.

Car $f^{(\lambda)}(x)$ est localement dans $\mathfrak{J}$ au voisinage de tout point de $B_\lambda - A'_\lambda$. Et, pour x assez voisin de $a \in A'_\lambda$, $x_\nu = a$, et

$$(24) \qquad f^{(\lambda)}(x) = f_a(x) .$$

C. Quand $x \in R_\lambda$, on a (22), de sorte que

$$(25) \qquad |D^p f^{(\lambda)}(x) - D^p F(x)| \leq K \varepsilon_1 (d'^{(\lambda)}(x))^{m-|p|}$$

ou $d'^{(\lambda)}(x)$ est la distance de x à A'_λ.

9. Approximation de F dans R^n.

A chaque λ est associée une $f^{(\lambda)}(x)$ (paragraphe 8). Pour les raccorder, on construit des fonctions (α_λ) ayant les propriétés suivantes :

$$(26) \qquad \begin{cases} \alpha^{(\lambda)} \geq 0, \quad \alpha^{(\lambda)} \text{ est définie et } m \text{ fois continuement différentiable} \\ \text{dans } B_\lambda, \text{ égale à } 0 \text{ dans } R'_\lambda, \text{ à } 1 \text{ dans } B_\lambda - R_\lambda, \text{ et vérifiant} \\ |D^p \alpha^{(\lambda)}(x)| \leq C(d'^{(\lambda)}(x))^{-|p|},\ d'^{(\lambda)}(x) = \text{distance de } x \text{ à } A'_\lambda . \end{cases}$$

Il suffit de prendre $\alpha^{(\lambda)}(x) = \sum_{\nu}' \varphi_{\nu}(x)$, la somme $\sum'$ étant étendue à toutes les boules J_{ν} ayant au moins un point en dehors de R_{λ}.

Considérons alors successivement pour $\lambda = N, N-1, \dots, 0$ les fonctions suivantes :

$$(27) \quad \begin{cases} {}^{(N)}f(x) = f^{(N)}(x) \\ \text{définie dans } A_N = B_N \quad ({}^{(N)}f = F \text{ sur } B_N) \\ {}^{(\lambda)}f(x) = (1 - \alpha^{(\lambda)}(x))\, f^{(\lambda)}(x) + \alpha^{(\lambda)}(x)\; {}^{(\lambda+1)}f(x) \\ \text{définie dans } B_{\lambda} \\ {}^{(0)}f(x) = (1 - \alpha^{(0)}(x))\, f^{(0)}(x) + \alpha^{(0)}(x)\; {}^{(1)}f(x) \\ \quad \text{définie sur } R^n = B_0 . \end{cases}$$

${}^{(0)}f(x) = f(x)$ a les propriétés suivantes, qu'on démontre par récurrence sur λ :

$$(28) \quad \begin{cases} \text{A. } {}^{(\lambda)}f \text{ appartient localement à } \mathfrak{J} \text{ dans } B_{\lambda}, \text{ donc } f \in \tilde{\mathfrak{J}} . \\ \text{B. } |D^p\, {}^{(\lambda)}f(x) - D^p F(x)| \leq K\, \varepsilon_1 (\Delta^{(\lambda)}(x))^{m-|p|} \text{ dans } B_{\lambda}, \text{ où } \Delta^{(\lambda)}(x) \\ \text{est la distance de } x \text{ à } \complement B_{\lambda} . \end{cases}$$

(Résulte de (25), (26), et $d'^{(\lambda)}(x) \leq \Delta^{(\lambda)}(x)$ pour $x \in R_{\lambda}$).

Alors $f \in \tilde{\mathfrak{J}}$, $|D^p(f - F)| \leq \varepsilon$.

C.Q.F.D.

10. <u>Conséquences</u>.

On peut remplacer $(\mathcal{E}^m)$ par $(\mathcal{D}^m)$, R^n par une variété, m fini par m infini.

Transformons par dualité. L'orthogonal $\mathfrak{J}^0$ de tout idéal fermé $\mathfrak{J}$ de $(\mathcal{D})$ est un sous-module fermé de $(\mathcal{D}')$ considéré comme module sur $(\mathcal{D})$.

THÉORÈME 5. - <u>Tout sous-module fermé de</u> $(\mathcal{D}')$ <u>est engendré par les distributions à support ponctuel qu'il contient</u>.

Par Fourier, en remplaçant $(\mathcal{D}')$ par $(\mathcal{S}')$:

THÉORÈME 6. - Tout sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{S}')$ invariant par les translations de R^n est engendré par les exponentielles-polynômes qu'il contient (analyse et synthèse spectrale).

Il est fourni gracieusement au lecteur la suggestion suivante qui demande à être précisée :

<u>Toute algèbre convenable est une algèbre de fonctions différentiables</u> (3).

(3) Cette suggestion a été étudiée dans les travaux de GLAESER [1] et de L. NACHBIN (voir par exemple [3]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] GLAESER (Georges). - Etude de quelques algèbres tayloriennes, J. Analyse math. Jérusalem (à paraître).

[2] HESTENES (M.R.). - Extension of the range of a differentiable function, Duke math. J., t. 8, 1941, p. 183-192.

[3] NACHBIN (Leopoldo). - A generalization of Whitney's theorem on ideals of differentiable functions, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 43, 1957, p. 935-937.

[4] WHITNEY (Hassler). - Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans. Amer. math. Soc., t. 36, 1934, p. 63-89.

[5] WHITNEY (Hassler). - Functions differentiable on the boundaries of regions, Annals of Math., t. 35, 1934, p. 482-485.

[6] WHITNEY (Hassler). - On the extension of differentiable functions, Bull. Amer. math. Soc., t. 50, 1944, p. 76-81.

[7] WHITNEY (Hassler). - On ideals of differentiable functions, Amer. J. of Math., t. 70, 1948, p. 635-658.

[Juillet 1958]