JACQUES DIXMIER

# Anneaux d'opérateurs et représentations des groupes

*Séminaire N. Bourbaki*, 1952, exp. nº 40, p. 331-336
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__331_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1951)

# ANNEAUX D'OPÉRATEURS ET REPRÉSENTATIONS DES GROUPES

par Jacques DIXMIER

## 1. Représentations irréductibles.

1. Soient $\mathcal{H}$ un espace hilbertien, P une algèbre auto-adjointe d'opérateurs dans $\mathcal{H}$, commutative et faiblement fermée. Soit $\Omega$ le spectre de P, compact. Il existe un isomorphisme canonique de P sur l'$*$-algèbre $C(\Omega)$ des fonctions continues sur $\Omega$, compatible avec la norme. On notera $A(\zeta)$ la fonction ainsi associée à l'opérateur $A \in P$.

Si $x \in \mathcal{H}$, $y \in \mathcal{H}$, l'application $A \to \langle Ax, y\rangle$ est une forme linéaire continue sur P, donc sur $C(\Omega)$, c'est-à-dire une mesure $\mu_{x,y}$ sur $\Omega$ :

$$\langle Ax,y\rangle = \int_{\Omega} A(\zeta)\, d\mu_{x,y}(\zeta)$$

2. Soit B un opérateur permutable à P. Soit $a \in \mathcal{H}$, tel que $\mu_{a,a} = \mu$ ait pour support $\Omega$. Si $A \in P$ et $A \geqslant 0$, on a :

$$\left|\int A(\zeta)\, d\mu_{Ba,a}(\zeta)\right| = |\langle ABa,a\rangle| = |\langle BA^{\frac{1}{2}} a, A^{\frac{1}{2}} a\rangle| \leqslant \|B\| \, \|A^{\frac{1}{2}} a\|^2 =$$

$$= \|B\| \langle Aa,a\rangle = \|B\| \int A(\zeta)\, d\mu(\zeta) .$$

D'où l'existence d'une fonction $B(\zeta)$, mesurable et bornée, donc si l'on veut continue et alors bien déterminée, telle que

$$d\mu_{Ba,a}(\zeta) = B(\zeta)\, d\mu(\zeta) ,$$

$$\int A(\zeta)B(\zeta)\, d\mu(\zeta) = \int A(\zeta)\, d\mu_{Ba,a}(\zeta) = \langle ABa,a\rangle$$

et ceci caractérise $B(\zeta)$. D'où facilement :

1°) $B(\zeta)$ dépend linéairement de B ;
2°) $B^*(\zeta) = \overline{B(\zeta)}$ ;
3°) $B^*B(\zeta) \geqslant 0$ ;

Bref, $B \to B(\zeta)$ est une forme linéaire positive continue sur toute $*$-algèbre $\subset P'$.

3. Soit $M \subset P'$ une $*$-algèbre d'opérateurs telle que les $Ba$, $B \in M$, sous-tendent $\mathcal{H}$. (Ceci entraîne que le support de $\mu$ est $\Omega$ ; car soit

$A \in P^+$ tel que $\int A(\zeta)d\mu(\zeta) = 0$ : on a $\langle Aa,a\rangle = 0$ , donc $Aa = 0$ , donc $BAa = 0 = ABa = 0$ pour $B \in M$ , donc $A = 0$). L'application $B \longrightarrow B(\zeta)$ définit une représentation de $M$ (résultat général sur les $*$-algèbres). On prend pour espace hilbertien $\mathcal{H}(\zeta)$ l'algèbre $M$ munie du produit scalaire $B^*C(\zeta)$, on passe au quotient et on complète, on a donc une application canonique $B \longrightarrow B(\zeta)$ de $M$ sur un sous-espace partout dense de $\mathcal{H}(\zeta)$ . La représentation $B \rightarrow U_B(\zeta)$ est définie par $U_B(\zeta)\, C(\zeta) = BC(\zeta)$ pour $C \in M$ , opérateur qui, on le voit aisément, se prolonge à $\mathcal{H}(\zeta)$ en opérateur borné. Notons l'égalité :

$$(1) \quad \|\Sigma A_{h_i} B_i a\|^2 = \Sigma \langle A^*_{h_j} A_{h_i} B^*_j B_i a,a\rangle = \Sigma \langle A_{\bar{h}_j h_i} B^*_j B_i a,a\rangle =$$

$$= \Sigma \int \bar{h}_j(\zeta)h_i(\zeta)B^*_j B_i(\zeta)d\mu(\zeta) = \int \Sigma \bar{h}_i(\zeta)h_i(\zeta)$$

$$\langle B_j(\zeta) , B_i(\zeta)\rangle \, d\mu(\zeta) = \int \|\Sigma\, h_i(\zeta)B_i(\zeta)\|^2 d\mu(\zeta) .$$

4. Nous sommes dans les conditions de fabrication d'une somme continue : on a l'espace $\Omega$, la mesure $\mu$ , les espaces $\mathcal{H}(\zeta)$ ; pour tout $x$ appartenant à l'ensemble des $Ba$ , où $B \in M$ , soit $B \in M$ avec $Ba = x$ ; le champ de vecteurs $B(\zeta)$ dépend linéairement et <u>univoquement</u> de $x$ , à cause de (1) ; $\|B(\zeta)\|^2 = B^*B(\zeta)$ dépend continument de $\zeta$ ; enfin, les $B(\zeta)$ sont partout denses dans $\mathcal{H}(\zeta)$ pour tout $\zeta$ . La famille des $B(\zeta)$ est donc une famille fondamentale $\Lambda$ . Construisons l'espace $L^2_\Lambda$ correspondant. On va définir un isomorphisme canonique de $L^2_\Lambda$ sur $\mathcal{H}$.

$L^2_\Lambda$ s'obtient en complétant l'ensemble des champs de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(\zeta)B_i(\zeta) \quad (h_i \in C(\Omega))$$

muni de la norme

$$\int \|\Sigma h_i(\zeta)B_i(\zeta)\|^2 \, d\mu(\zeta) .$$

Considérons l'application

$$\Sigma h_i(\zeta)\, B_i(\zeta) \rightarrow \Sigma A_{h_i} B_i a .$$

Elle sera linéaire si on prouve qu'elle est univoque. Or, on va voir qu'elle est biunivoque et même isométrique : ceci résulte de (1).

On peut donc prolonger cette application à $L^2_\Lambda$ , et on voit tout de suite qu'on obtient un isomorphisme de $L^2_\Lambda$ sur $\mathcal{H}$, qui permet d'dentifier $L^2_\Lambda$ et $\mathcal{H}$.

5. Considérons, pour $B \in M$, le champ d'opérateurs $U_B(\zeta)$. Il est continu : $U_B(\zeta)\, C(\zeta) = BC(\zeta)$. Donc il lui correspond un opérateur $\widetilde{B}$ dans $L^2_\Lambda$ : on va voir que c'est justement $B$ moyennant l'identification précédente. Il suffit de prouver que $Bu = \widetilde{B}u$ pour $u \in \Lambda$, donc que $BCa$ (où $C \in M$) peut être identifié au champ $U_B(\zeta)\, C(\zeta) = BC(\zeta)$, ce qui est bien le cas.

6. Si $P$ est une sous-algèbre commutative maximale de $M'$, presque toutes les représentations sont irréductibles, si l'on suppose $M$ séparable pour la norme (ce qui entraîne que $\mathcal{H}$ et les $\mathcal{H}(\zeta)$ sont séparables).

En effet, si $P$ est maximale, tout opérateur de $M'$ permutable à $P$ est dans $P$, donc $M' \cap P' = P$, donc $P'$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $M$ et $P$ : tout opérateur permutable à $P$ est donc limite forte d'une suite d'opérateurs $B_1, B_2, \ldots$ de l'$*$-algèbre engendrée par $M \cup P$ ; on a : $B_i = \sum A_n^i B_n'^i$, avec $A_n^i \in P$, $B_n'^i \in M$. La séparabilité de $M$ permet de construire une suite $C_p \in M$ telle que l'ensemble des $U_{C_p}(\zeta)$ soit irréductible dans $\mathcal{H}(\zeta)$ pour presque tout $\zeta$. Si par exemple $B_i \to C_p$, on a

$$\sum U_{A_n^{i_p}\, B_n'^{i_p}}(\zeta) \to U_{C_p}(\zeta)$$

pour presque tout $\zeta$ et pour une suite partielle $(i_p)$ ; comme les $A_n^{i_p}(\zeta)$ sont les scalaires, on voit que la représentation $B \to U_B(\zeta)$ est irréductible presque-partout, donc, d'après les propriétés spéciales de $\Omega$, sur un ensemble ouvert partout dense de $\Omega$.

7. Soit $G$ un groupe localement compact à base dénombrable, $s \to U_s$ une représentation fortement continue de $G$, définie par une fonction continue de type positif $\varphi(s) = \langle U_s a, a \rangle$, où $a$ est un vecteur générateur de l'espace $\mathcal{H}$ de la représentation. Pour $f \in L^1(G)$, soit $U_f = \int_G f(s)\, U_s\, ds$. Soit $M$ l'$*$-algèbre d'opérateurs engendrée par les $U_f$ : $M$ est séparable pour la norme. Soit $P$ une sous-algèbre commutative maximale de $M'$. On construit un espace $\Omega$, une mesure $\mu$, des espaces $\mathcal{H}(\zeta)$, des représentations $U_f(\zeta)$ de $M$. On a :

$$\langle U_f\, a, a \rangle = \int_\Omega \langle U_f(\zeta) a(\zeta), a(\zeta) \rangle\, d\mu(\zeta)$$

On peut remplacer $\Omega$ par un ensemble $\Omega'$ ouvert dans $\Omega$, donc localement compact, tel que l'ensemble des $U_f(\zeta)$ soit irréductible pour $\zeta \in \Omega'$.

L'égalité précédente s'écrit

$$\int_G f(s)\,\varphi(s)ds = \int_G f(s)ds \int_{\Omega'} \varphi(s,\zeta)d\mu(\zeta)$$

où $\varphi(s,\zeta)$ est, pour tout $\zeta \in \Omega'$ , une fonction élémentaire de type positif. De là, on déduit assez aisément :

$$\varphi(s) = \int_{\Omega'} \varphi(s,\zeta)d\mu(\zeta) .$$

Enfin, l'espace $\Omega'$ étant monstrueux, on va le remplacer par un espace plus sympathique, de façon à obtenir une généralisation satisfaisante du théorème de Bochner. Pour cela, considérons comme équivalents deux éléments $\zeta$ , $\zeta'$ de $\Omega$ tels que $\zeta(A) = \zeta'(A)$ pour $A \in M$ . Soit R la relation d'équivalence ainsi définie. Soit Z l'espace quotient de $\Omega$ par R , et notons $\nu$ l'image canonique de $\mu$ dans Z .

Soit Z' l'ensemble des $\zeta \in Z$ pour lesquels $\varphi(s,\zeta)$ est élémentaire ; Z - Z' est de mesure nulle, et

$$\varphi(s) = \int_{Z'} \varphi(s,\zeta_1)\; d\nu(\zeta_1)$$

Quand G est abélien, Z' est le spectre habituel de $\varphi$ .

2. L'algèbre d'un groupe.

1. Soit M une algèbre de von Neumann. Elle est dite de classe finie si les conditions suivantes, équivalentes entre elles, sont vérifiées :

1°) $A^*A = 1$ entraîne $AA^* = 1$ .

2°) $AB = 1$ entraîne $BA = 1$ .

3°) Si A est self-adjoint, si $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont unitaires, si B est dans le centre $M^\natural$ de M , et si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} \geqslant B$ avec $\sum \lambda_i = 0$ , on a $B \leqslant 0$ .

4°) Il existe un projecteur $A \to A^\natural$ de M sur $M^\natural$ tel que $(AB)^\natural = (BA)^\natural$ , qui est strictement positif ($A \geqslant 0$ entraîne $A^\natural \geqslant 0$ ; si de plus $A^\natural = 0$ , $A = 0$) et fortement continu sur la boule unité de M .

Soit M quelconque, et $\mathfrak{M}$ un sous-espace fermé de H tel que $P_{\mathfrak{M}} \in M$ . Les $P_{\mathfrak{M}} A P_{\mathfrak{M}}$ , où $A \in M$ , induisent dans $\mathfrak{M}$ une algèbre de von Neumann $M_{(\mathfrak{M})}$ . Si $M_{(\mathfrak{M})}$ est de classe finie, $\mathfrak{M}$ est dite finie. Si toute $\mathfrak{M} \neq 0$ est infinie, M est dite de classe purement infinie.

Ceci posé, considérons les $\mathfrak{M}$ telles que $P_{\mathfrak{M}} \in M^\natural$ . Il existe une $\mathfrak{M}$ maximum telle que $M_{(\mathfrak{M})}$ soit de classe finie, soit $H^f$ ; une $\mathfrak{M}$ maximum telle que $M_{(\mathfrak{M})}$ soit de classe purement infinie, soit $H^{pi}$ ; $H^f$ et $H^{pi}$ sont orthogonales, soit $H^i$ le sous-espace complémentaire de $H^f \oplus H^{pi}$. On a une décomposition canonique de $H$ en $H^f$, $H^i$, $H^{pi}$.

2. Soit $G$ un groupe localement compact, $\mu$ la mesure de Haar invariante à gauche, $\mathcal{H}$ l'espace hilbertien des fonctions de carré sommable pour $\mu$.

Pour $s \in G$, l'application $f(x) \to f(s^{-1}x)$, où $f \in \mathcal{H}$, est un opérateur unitaire $U_s$ de $\mathcal{H}$, et l'application $s \to U_s$ est une représentation unitaire fortement continue de $G$, dite représentation régulière. Soit $M$ l'algèbre de von Neumann engendrée par les $U_s$. On va la considérer comme algèbre de $G$.

3. Soit $G$ un groupe de Lie réel connexe semi-simple ne possédant aucun sous-groupe invariant compact, et $s \to U(s)$ une représentation unitaire fortement continue quelconque. Soit $M$ une algèbre de von Neumann contenant les $U(s)$. Dans $H^f$, la représentation induite est l'application $s \to 1$.

On est ramené à prouver le théorème pour $G$ simple non compact. On prouve qu'il existe dans $G$ un sous-groupe à un paramètre $H$ et une suite $x_1, x_2, \ldots$ d'éléments de $G$ tels que $x_n\, y\, x_n^{-1} \to e$ pour tout $y \in H$. Donc

$$U(x_n)\, U(y)\, U(x_n)^{-1} \to U(e) = 1$$

fortement. Soit $V(s)$ la restriction de $U(s)$ à $H^f$. On a

$$V(y)^{\natural} = (V(x_n)V(y)\, V(x_n)^{-1})^{\natural} \to 1^{\natural} = 1 ,$$

donc $$V(y)^{\natural} = 1 .$$

Soit $V(y) = R + iS$, avec $R$ et $S$ self-adjoints. On a : $R^{\natural} = 1$, donc $(1 - R)^{\natural} = 0$ ; or $R = \frac{1}{2}(V + V^*)$, d'où $\|R\| \leq 1$, $R \leq 1$, $1 - R \geq 0$ ; alors $1 - R = 0$, $V = 1 + iS$ ; mais

$$1 = VV^* = (1 + iS)(1 - iS) = 1 + S^2 , \; S^2 = 0 , \; S = 0 .$$

Bref, $V(y) = 1$ pour tout $y \in H$ et par suite pour tout **$y$ conjugué de $H$. Ces** conjugués forment un voisinage de 0 parce que $G$ est simple, donc $s \to V(s)$ est triviale dans un voisinage de $e$ et par suite sur $G$.

COROLLAIRES.

1. $G$ n'a pas de représentation de dimension finie (continue ou non).

2. Un sous-groupe $H$ analytique semi-simple d'un groupe de Lie compact est fermé (on montre que $H$ est compact, en prouvant, à l'aide du théorème, que les

sous-groupes invariants simples de $H$ sont compacts).

3. Dans le cas de l'algèbre du groupe, $H^f = 0$ .

REMARQUE. - Si $G$ est le groupe de Lorentz dans $R^3$ , si l'algèbre engendré par les $U_s$ est un facteur, ce facteur est de classe $I_\infty$ . En fait, HARISH-CHANDRA a montré que toute représentation unitaire continue d'un groupe de Lie semi-simple connexe engendre une algèbre de classe I.

4. Revenons à l'algèbre du groupe. Alors, s'il existe dans $G$ un système fondamental de voisinages invariants par les automorphismes intérieurs, $H = H^f$ , et réciproquement.

Prouvons seulement la partie directe. Soit $f$ la fonction caractéristique d'un voisinage invariant compact. Pour $s,t \in G$ , on a $\langle U_s U_t f,f\rangle = \langle U_t U_s f,f\rangle$ parce que $f$ est centrale. On en déduit, par continuité, que $\langle ABf,f\rangle = \langle BAf,f\rangle$ pour $A,B \in M$ . Si alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} \geqslant B$ avec $B \in M^h$, $U_i$ unitaire, $A$ et $B$ self-adjoints, $\sum \lambda_i = 0$ , soit $B = B^+ - B^- = BE + BF$ la décomposition de $B$ en parties positive et négative. On a

$$0 = \langle(\sum \lambda_i U_i A U_i^{-1})Ef,f\rangle \geqslant \langle BEf,f\rangle$$

donc $\langle B^+f,f\rangle \leq 0$ , $B^+f = 0$ , $B^+U_sf = U_s B^+f = 0$ : $B^+$ s'annule sur les $U_sf$ , donc $B^+ = 0$ et $B \leq 0$ .

REMARQUE. - Si $G$ est unimodulaire, on a toujours $H^{pi} = 0$ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] GODEMENT (Roger). - Sur la théorie des représentations unitaires, Annals of Math., Series 2, t. 53, 1951, p. 69-124.

[2] GODEMENT (Roger). - Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 30, 1951, p. 1-110.

[3] GODEMENT (Roger). - Théorie des caractères, I et II, Annals of Math., Series 2, t. 59, 1954, p. 47-85.

[4] MAUTNER (F.I.). - Unitary representations of locally compact groups, I, Annals of Math., Series 2, t. 51, 1950, p. 1-25. ; II, Annals of Math., Series 2, t. 52, 1950, p. 528-556.

[5] SEGAL (I.E.). - The two-sided regular representation of a unimodular locally compact group, Annals of Math., t. 51, 1950, p. 293-298.

[6] SEGAL (I.E.). - An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups, Annals of Math., Series 2, t. 52, 1950, p. 272-292.

[7] SEGAL (I.E.) and von NEUMANN (John). - A theorem on unitary representations of semisimple Lie groups, Annals of Math., Series 2, t. 52, 1950, p. 509-517.

[Septembre 1957]