SÉMINAIRE N. BOURBAKI

SAMUEL EILENBERG

Exposition des théories de Morse et Lusternik-Schnirelmann

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 36, p. 301-306

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__301_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1950)

EXPOSITION DES THÉORIES DE MORSE ET LUSTERNIK-SCHNIRELMANN

par Samuel EILENBERG

1. Niveaux critiques.

Soient Ω un espace topologique et J une fonction réelle définie sur Ω, telle que $-\infty < J(\omega) \leq +\infty$ pour tout $\omega \in \Omega$. Nous définissons les ensembles $(J \leq a)$, $(J < a)$ par les conditions $J(\omega) \leq a$ et $J(\omega) < a$ respectivement.

Nous supposerons que l'on s'est donné une théorie de l'homologie H dans laquelle les groupes d'homologie $H_q(X, A)$ (de l'espace X modulo un sous-ensemble A) sont des modules sur un anneau d'intégrité fixé D. Nous entendons par "nombre de Betti" $R_q(X, A)$ le rang du module $H_q(X, A)$ sur D.

Axiomes portant sur Ω, J et H.

Axiome H_1. - Pour tout $x \in H_q(\Omega)$, $x \neq 0$, il y a un nombre réel $c < +\infty$ tel que x est dans l'image de

$$H_q(J \leq c) \longrightarrow H_q(\Omega)$$

mais pas dans l'image de

$$H_q(J < c) \longrightarrow H_q(\Omega) .$$

Axiome H_2. - Pour tout $x \in H_q(J < a)$, $x \neq 0$, $a \leq +\infty$, il y a un nombre $c < a$ tel que x est dans l'image de

$$H_q(J \leq c) \longrightarrow H_q(J < a)$$

mais pas dans l'image de

$$H_q(J < c) \longrightarrow H_q(J < a) .$$

Axiome H_3. - Pour tout $x \in H_q(J \leq a)$, $x \neq 0$, qui est dans le noyau de

$$H_q(J \leq a) \longrightarrow H_q(\Omega) ,$$

il y a un nombre c tel que $a < c < +\infty$, et que x est dans le noyau de

$$H_q(J \leq a) \longrightarrow H_q(J \leq c) ,$$

mais pas dans le noyau de

$$H_q(J \leq a) \longrightarrow H_q(J < c) .$$

Un nombre c est dit <u>niveau-critique</u> si :

$$H_q(J \leq c , \ J < c) \neq 0 .$$

On définit alors les <u>nombres typiques</u> :

$$m_q(c) = R_q(J \leq c , \ J < c)$$

$$M_q = \sum m_q(c) .$$

Sous ces hypothèses, on obtient plusieurs théorèmes dont voici des exemples :

THÉORÈME 1. - <u>Si pour tout</u> $a < +\infty$, <u>il existe seulement un nombre fini de valeurs</u> q-<u>critiques</u> $c < a$, <u>alors</u> :

$$R_q(\Omega) \leq M_q .$$

THÉORÈME 2. - <u>Supposons que, pour</u> $i = 0 , 1 , \ldots , q+1$, <u>il n'y ait qu'un nombre fini de valeurs</u> i-<u>critiques. Supposons en outre que les nombres</u> $M_0 , \ldots , M_{q+1}$ <u>soient finis. Alors les nombres</u> $R_0 , \ldots , R_q$ <u>sont finis, et l'on a</u>

$$\sum_{i=0}^{q+1} (-1)^{q-i} M_i \leq \sum_{i=0}^{q} (-1)^{q-i} R_i(\Omega) \leq \sum_{i=0}^{q} (-1)^{q-i} M_i .$$

On peut obtenir des théorèmes plus précis en introduisant la décomposition :

$$m_q(c) = \ell_q(c) + n_q(c) ,$$

où $\ell_q(c)$ et $n_q(c)$ désignent les rangs des applications :

$$H_q(J \leq c) \longrightarrow H_q(J \leq c , \ J < c) ,$$

$$H_q(J \leq c , \ J < c) \longrightarrow H_{q-1}(J < c) .$$

2. Points stationnaires.

Nous supposons dans toute la suite que J est continue et que $(J \leq a)$ est compact pour tout $a < +\infty$. Nous supposons en outre que l'on s'est donné un ensemble $G \subset \Omega$, appelé ensemble des points stationnaires.

Une déformation D d'un sous-ensemble X de Ω est une application continue $D : X \times I \longrightarrow \Omega$ $(I = [0 , 1])$ telle que $D(x , 0) = x$ pour tout $x \in X$. Nous dirons que D est une J-déformation si $J(D(x , t)) \leq J(x)$ pour tout $x \in X$ et $t \in I$.

Axiomes portant sur Ω, J et G.

Axiome D_1. - Pour tout $a < +\infty$, il y a une J-déformation D de $(J \leq a)$ telle que :

$$D(g , t) = g \quad \text{pour tout} \quad g \in G \cap (J \leq a) \, , \ t \in I \, , \ \text{et}$$

$$J(D(\omega, 1)) < J(\omega) \quad \text{pour tout} \quad \omega \in (J \leq a) \cap \complement G \, .$$

Axiome D_2. - L'ensemble G est discret.

Axiome D_3. - Pour tout $g \in G$, il y a un voisinage W de g et une J-déformation de W telle que :

$$D(g , t) = g \quad \text{pour tout} \quad t \in I$$

$$D(W , 1) \subset (J < J(g)) \cup \{g\}$$

En ce qui concerne la théorie de l'homologie, nous supposerons qu'elle est à supports compacts, c'est-à-dire que l'axiome suivant est rempli :

Axiome SC. - Pour tout $x \in H_q(X , A)$ il y a une paire formée d'ensembles compacts $(X' , A') \subset (X , A)$ telle que x est dans l'image de

$$H_q(X' , A') \longrightarrow H_q(X , A) \, .$$

THÉORÈME 3. - Si les axiomes D_1, D_2, D_3 et SC sont vérifiés, alors les axiomes H_1, H_2, H_3 le sont aussi.

Pour tout point $\omega \in \Omega$, on définit $\Omega_\omega = (J < J(\omega))$ et l'on considère les nombres typiques

$$m_q(\omega) = R_q(\Omega_\omega \cup \{\omega\}, \Omega_\omega) .$$

On montre alors $m_q(\omega) \neq 0$ entraîne $\omega \in G$ et que, pour tout niveau c,

$$m_q(c) = \sum m_q(g) , \quad g \in G , \; J(g) = c .$$

3. Catégories.

Soit Ω un espace localement compact. Une fonction c, associant à tout sous-ensemble compact A de Ω un entier $c(A) > 0$, est dite une catégorie si les axiomes suivants sont remplis :

(C.1) Si A est réduit à un point, $c(A) = 1$.

(C.2) $A \subset B$ entraîne $c(A) \leq c(B)$.

(C.3.) $c(A \cup B) \leq c(A) + c(B)$.

(C.4) $A \cap B = \emptyset$ entraîne $c(A \cup B) = \sup [c(A), c(B)]$.

(C.5) Si D est une déformation de Ω, alors $c(A) \leq c(D(A, 1))$.

(C.6) Pour tout A compact, il existe un voisinage compact U de A tel que $c(U) = c(A)$.

On définit alors $c'(\Omega)$ par

$$c'(\Omega) = \sup c(A) ,$$

où A parcourt tous les sous-ensembles compacts de Ω.

Premier exemple : la catégorie k. - Supposons Ω localement contractile. Un ensemble $A \subset \Omega$ sera appelé homotope à zéro s'il existe une déformation D de Ω telle que $D(A, 1)$ soit un ensemble fini. Définissons $k(A)$ comme le plus petit entier n tel que A soit la réunion de n ensembles homotopes à zéro. On peut montrer que k est la plus grande de toutes les catégories possibles sur Ω.

Second exemple : la hauteur h. - Pour un anneau donné R, considérons l'anneau de cohomologie de Čech $H(X)$ à coefficients dans R, et notons $H^+(X)$ l'idéal de tous les éléments de degré strictement positif. Si A est une partie compacte de Ω, nous noterons par $[A]$ l'image de $H^+(\Omega) \longrightarrow H^+(A)$, et nous supposerons que $[A]$ admet un nombre fini de générateurs. Alors $[A]$ est nilpotent, et nous noterons $h(A)$ le plus petit entier h tel que $[A]^h = 0$. On montre alors que h est une catégorie.

Nous supposerons maintenant que J est continue, que $(J \leq a)$ est compact et que l'axiome D_1 est vérifié. Soit $\gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \cdots$ la suite (finie ou infinie) de tous les γ_i tels que

$$\gamma_0 = \min J \ , \ c(J \leq a) < c(J \leq \gamma_i) \quad \text{pour} \quad a < \gamma_i \ , \ i > 0 \ .$$

THÉORÈME 4. - <u>Les ensembles</u> $G_i = G \cap (J = \gamma_i)$ <u>ne sont pas vides et</u>

$$c'(\Omega) \leq \sum c(G_i) \ .$$

4. <u>Fonctions sur les variétés.</u>

Soit Ω une variété à n dimensions (compacte ou non), de classe C^2, et soit J une fonction réelle de classe C^2 sur Ω, telle que $(J \leq a)$ soit compact pour tout a. Définissons G comme l'ensemble des points où la différentielle de J est nulle. En déformant chaque point suivant le gradient de J (ce qui a un sens, si l'on a muni la variété d'une structure d'espace de Riemann), on démontre l'axiome D_1. Ainsi, on peut appliquer la théorie de Lusternik-Schnirelmann.

Si l'on suppose en outre que G est discret (axiome D_2), alors on démontre l'axiome D_3 et les résultats additionnels suivants sur les nombres typiques $m_q(g)$ d'un point stationnaire g :

(1) $m_q(g) = 0$ pour $q > n$.

(2) $m_q(g)$ est fini.

(3) Si g est minimum relatif, alors $m_0(g) = 1$ et $m_q(g) = 0$ pour tout $q \neq 0$.

(4) Si g est un maximum relatif, alors $m_n(g) = 1$ et $m_q(g) = 0$ pour tout $q \neq n$.

(5) Si g n'est pas singulier (c'est-à-dire, si le déterminant $\det(\partial^2 J/\partial x_i \, \partial x_j)$ n'est pas nul) et si J a l'indice d'inertie k au point g, alors $m_k(g) = 1$ et $m_q(g) = 0$ pour $q \neq k$.

5. <u>Espaces de chemins.</u>

Soit M une variété de Riemann de classe C^3 dans laquelle tout ensemble borné est relativement compact. Nous dirons qu'une courbe est gentille si elle est continûment différentiable et si sa différentielle n'est nulle en aucun point. Nous désignerons par $\hat{\Omega}$, l'espace des courbes gentilles par morceaux, muni de la distance

$$(f , g) = \sup(f(t) , g(t)) + |J(f) - J(g)| ,$$

où f et $g : I \longrightarrow M$ sont dans $\hat{\Omega}$, et $J(f)$ désigne la longueur de la courbe f .

Etant donnés deux points P et Q de M , nous considérons le sous-espace Ω de $\hat{\Omega}$ qui est formé des courbes d'origine P et d'extrémité Q . Alors J est continue sur Ω et $(J \leq a)$ e t compact pour tout $a < +\infty$. Nous prendrons pour G l'ensemble des géodésiques de Ω . L'axiome D_1 est vérifié par un procédé de régularisation convenable.

L'axiome D_2 dit que les géodésiques sont isolées ; on est obligé de le postuler. Pour toute géodésique isolée g , on demontre l'axiome D_3 et on établit la finitude des nombres typiques $m_q(g)$.

A côté de l'espace Ω , nous pouvons aussi considérer l'espace Ω^* de toutes les courbes $f : I \longrightarrow M$ commençant en P et finissant en Q , cet espace étant muni de la topologie de la convergence compacte. On a une application continue canonique $\Omega \longrightarrow \Omega^*$. Si la théorie de l'homologie H vérifie l'axiome SC , on montre que l'homomorphisme induit $H_q(\Omega) \longrightarrow H_q(\Omega^*)$ est un isomorphisme sur .

BIBLIOGRAPHIE

[1] FROLOFF (S.) et ELSHOLZ (L.). - Limite inférieure pour le monbre des valeurs critiques d'une fonction donnée sur une variété, Recueil math. Soc. math. Moscou (Mat. Sbornik) , t. 42, 1935, p. 637-642.

[2] LUSTERNIK (L.) et SCHNIRELMANN (L.). - Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels, 1 : Espaces à un nombre fini de dimensions. - Paris, Hermann, 1934 (Act. scient. et ind., 188, Exposés sur l'analyse mathématique et ses applications, 3).

[3] MORSE (Marston). - The calculus of variations in the large. - New-York, American mathematical Society, 1934 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 18).

[4] MORSE (Marston). - Functional topology and abstract variational theory. - Paris, Gauthier-Villars, 1939 (Mémorial des Sciences mathématiques, 92).

[5] MORSE (Marston). - A positive, lower semi-continuous, non-degenerate function on a metric space, Fund. Math., t. 35, 1948, p. 47-78.

[6] SEIFERT (H.) und THREFALL (W.). - Variationsrechnung im Grossen (Theorie von Marston Morse). - Reprinted New-York, Chelsea, 1951.