CHARLES EHRESMANN

Sur les variétés presque complexes

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 35, p. 291-300
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__291_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1950)

SUR LES VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES [1]

par Charles EHRESMANN

1. Introduction.

Etant donnée une variété topologique V_{2n}, de dimension $2n$, existe-t-il sur V_{2n} une structure analytique complexe ? Plus abordable paraît la question suivante : Etant donnée une variété différentiable V_{2n}, existe-t-il sur V_{2n} une structure analytique complexe subordonnée à sa structure différentiable ? Soit $T(V_{2n})$ l'espace des vecteurs tangents à V_{2n} et T_x l'espace vectoriel tangent en $x \in V_{2n}$. $T(V_{2n})$ est un espace fibré de base V_{2n} et de fibres T_x isomorphes à l'espace vectoriel R^{2n}. Une structure presque complexe sur V_{2n} sera définie par la donnée dans T_x d'une structure vectorielle complexe subordonnée à sa structure vectorielle réelle et dépendant d'une façon continue de x. Toute structure analytique complexe subordonnée à la structure différentiable de V_{2n} détermine sur V_{2n} une structure presque complexe, mais en général une structure presque complexe ne dérive pas d'une structure analytique complexe et on ignore si une variété presque complexe (c'est-à-dire une variété munie d'une structure presque complexe) admet aussi une structure analytique complexe. La recherche des structures presque complexes sur V_{2n} est un problème de la théorie des espaces fibrés. Je rappellerai, en les complétant, les résultats que j'ai exposés au Colloque de Topologie algébrique de Paris (1947) et j'indiquerai quelques résultats de WU WEN-TSUN ; mais je ne pourrai pas exposer les méthodes de H. HOPF [4], qui a abordé la même question d'un point de vue un peu différent. Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie.

2. Structures fibrées subordonnées à une structure fibrée vectorielle [2].

Soit $E(B, F, G, H)$ un espace fibré de base B, de fibres isomorphes à F de groupe structural topologique G. Nous supposons F muni d'une structure admettant G comme groupe d'automorphismes. Par les homéomorphismes distingués, dont l'ensemble est H, cette structure est transportée sur une structure bien déterminée dans chaque fibre F_x. H est alors l'ensemble des isomorphismes de F sur les fibres. Il est muni d'une structure fibrée $H(B, G, G_\alpha, \overline{H})$ et

[1] Cet exposé a paru ultérieurement [10].

s'appelle espace fibré principal associé. Etant donné un sous-groupe G' de G muni de la topologie induite, une structure fibrée $E(B, F, G', H')$ est dite subordonnée à $E(B, F, G, H)$ lorsque $H' \subset H$. Toute structure $E(B, F, G', H')$ détermine canoniquement une structure $E(B, F, G, H)$ à laquelle elle est subordonnée. Supposons que les classes sG' déterminent une structure fibrée sur G. Les structures $E(B, F, G', H')$ subordonnées à une structure donnée $E(B, F, G, H)$ correspondent alors d'une façon biunivoque aux sections de l'espace fibré associé à $E(B, F, G, H)$ par l'homomorphisme φ de G sur le groupe de transformations de l'espace homogène G/G', défini par $\varphi(s)(tG') = s(tG')$. C'est l'espace H/G' des classes hG', où $h \in G$; sa base est B et ses fibres sont isomorphes à G/G'. Les structures subordonnées $E(B, F, G', H')$ se répartissent en classes d'homotopie correspondant aux classes d'homotopie des sections ; les structures d'une même classe sont isomorphes. Si $\mathfrak{S}'$ désigne une structure sur F admettant G' comme groupe d'automorphismes, l'espace H/G' peut s'appeler l'espace des structures isomorphes à $\mathfrak{S}'$ et subordonnées aux structures données sur les fibres F_x.

Soit R^n (resp. C^n, Q^n) l'espace numérique réel (resp. complexe, quaternionien), L_n (resp. L'_n, L''_n) le groupe linéaire homogène de R^n (resp. C^n, Q^n), O_n (resp. O'_n, O''_n) le groupe orthogonal dans R^n (resp. unitaire dans C^n, unitaire quaternionien dans Q^n), L^+_n (resp. O^+_n) la composante connexe de l'unité de L_n (resp. O_n). Une structure $E(B, F, G, H)$ sera appelée structure fibrée vectorielle réelle (resp. réelle orientée, complexe, quaternionienne, euclidienne, euclidienne orientée, hermitienne, hermitienne quaternionienne) si G est L_n (resp. L^+_n, L'_n, L''_n, O_n, O^+_n, O'_n, O''_n), F étant, suivant les cas, R^n, C^n ou Q^n. Comme L_n/O_n (resp. L^+_n/O^+_n, L'_n/O'_n, L''_n/O''_n) est homéomorphe à un espace numérique, toute structure fibrée vectorielle réelle (resp. réelle orientée, complexe, quaternionienne) admet des structures euclidiennes (resp. euclidiennes orientées, hermitiennes, hermitiennes quaternioniennes) subordonnées et celles-ci appartiennent toutes à une même classe. En identifiant R^{2n} à C^n et C^n à Q^m, si $n = 2m$, on a $L'_n \subset L^+_{2n}$, $L''_m \subset L'_n$, $O'_n \subset O^+_{2n}$, $O''_m \subset O'_n$, et le problème d'existence de structures subordonnées se pose pour des structures du type suivant :

$$E(B, R^{2n}, L_{2n}, H), \qquad E(B, R^{2n}, O_{2n}, \cdot)$$
$$E(B, R^{2n}, L^+_{2n}, \cdot), \qquad E(B, R^{2n}, O^+_{2n}, \cdot)$$
$$E(B, C^n, L'_n, \cdot), \qquad E(B, C^n, O'_n, \cdot)$$
$$E(B, Q^m, L''_n, \cdot), \qquad E(B, Q^m, O''_m, \cdot)$$

D'après la remarque précédente, on peut toujours se ramener au cas de structures figurant dans la 2e colonne ci-dessus. L'espace $T(V_{2n})$ associé à une variété différentiable V_{2n} est muni d'une structure fibrée vectorielle réelle, dont les structures subordonnées s'appellent respectivement : structure vectorielle tangente orientée, presque complexe, presque quaternionienne, riemannienne, presque hermitienne, presque hermitienne quaternionienne.

3. Les structures vectorielles complexes sur R^{2n}.

Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de C^n, et identifions C^n à R^{2n} en identifiant $(\varepsilon_1, i\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, i\varepsilon_n)$ à la base canonique de R^{2n}. Alors L'_n est le sous-groupe de L_{2n} qui laisse invariante la transformation I_0 définie par $I_0 z = iz$, où $z \in C$. Une structure vectorielle complexe sur R^{2n}, subordonnée à la structure vectorielle réelle, est définie par une transformation linéaire I de R^{2n} telle que $I^2 = -1$, c'est-à-dire $I(Ix) = -x$ pour $x \in R^{2n}$; le produit du nombre complexe $a + bi$ par x sera $(a + bI)x$. Les vecteurs x et Ix sont linéairement indépendants et déterminent un plan invariant par I. R^{2n} admet des bases de la forme $(e_1, Ie_1, \dots, e_n, Ie_n)$; l'orientation correspondante de R^{2n} ne dépend que de I ; c'est l'orientation associée à I. L'espace des structures vectorielles complexes sur R^{2n} est L_{2n}/L'_n, dont la composante connexe L^+_{2n}/L'_n est l'espace des structures complexes dont l'orientation associée est aussi associée à I_0.

Considérons R^{2n} comme l'espace des vecteurs réels de C^{2n}. La transformation I se prolonge à C^{2n} et admet les valeurs propres $\pm i$. L'ensemble des vecteurs propres correspondant à $-i$ forme un sous-espace X_n de dimension n. L'ensemble des vecteurs propres correspondant à $+i$ est $\bar{X}_n$, imaginaire conjugué de X_n, et l'on a $X_n \cap \bar{X}_n = 0$. Inversement tout sous-espace X_n de C^{2n} tel que $X_n \cap \bar{X}_n = 0$ détermine une transformation I. On peut définir X_n par n formes linéaires sur C^{2n} dont les restrictions à R^{2n} sont des formes linéaires à valeurs complexes ne s'annulant simultanément que pour le vecteur 0.

Posons $F(x, x) = x_1^2 + y_1^2 + \ldots + x_n^2 + y_n^2$, où $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ sont les coordonnées canoniques de $x \in R^{2n}$. O_{2n}/O'_n est l'espace des transformations I laissant invariante la forme quadratique $F(x, x)$, condition équivalente à $F(x, Ix) = 0$ où $I \in O^+_{2n}$. L'espace X_n associé à I est alors une génératrice du cône défini dans C^{2n} par $F(x, x) = 0$. Donc O^+_{2n}/O'_n que nous désignons par F, s'identifie à l'une des composantes connexes de l'espace des génératrices X_n de ce cône.

Comme $\lambda \in L_{2n}$ se prolonge à C^{2n}, l'espace fibré $T(V_{2n})$ admet un espace fibré associé $T^c(V_{2n})$ dont les fibres T^c_x sont isomorphes à C^{2n} et qui admet $T(V_{2n})$ comme sous-espace. Un élément de T^c_x s'appelle vecteur complexe tangent à V_{2n} en x, un sous-espace X_p de T^c_x s'appelle p-élément complexe tangent en x.

Une structure presque complexe sur V_{2n} est donc déterminée par un champ de transformations linéaires I, définies dans T_x et telles que $I^2 = -1$, ou par un champ de n-éléments complexes X_n tels qu'en chaque point $x \in V_{2n}$, on ait $X_n \cap \bar{X}_n = x$. Au voisinage de x elle est définie encore par n formes de Pfaff sur V_{2n}, à valeurs complexes et ne s'annulant simultanément pour aucun vecteur réel non nul. Une structure presque hermitienne subordonnée à une structure riemannienne est définie par un champ de transformations orthogonales I ou par un champ de n-éléments isotropes.

4. Formes différentielles extérieures quadratiques sur V_{2n}.

A une transformation I dans R^{2n} telle que $F(x, Ix) = 0$ est associée la forme bilinéaire alternée $\Psi(x, x') = F(Ix, x')$, de rang $2n$, et la forme $\Phi(x, x') = F(x, x') - i\,\Psi(x, x')$, qui est une forme d'Hermite définie positive par rapport à la structure complexe définie par I. A toute structure presque hermitienne sur V_{2n} est donc associée une forme différentielle extérieure quadratique Ω de rang $2n$; l'orientation associée est définie par Ω^n, forme de degré $2n$ non nulle en chaque point. Réciproquement toute forme différentielle extérieure quadratique Ω partout de rang $2n$ sur V_{2n} est associée de cette façon à des structures presque hermitiennes, qui sont toutes de même classe et qui correspondent à l'orientation définie par Ω^n. Ceci résulte du fait que $\tilde{L}_{2n}/L'_n$ est homéomorphe à un espace numérique, $\tilde{L}_{2n}$ désignant le sous-groupe de L_{2n} qui laisse invariante la forme

$$\Psi_o(x, x') = x_1 y'_1 - x'_1 y_1 + \ldots + x_n y'_n - x'_n y_n .$$

Donc l'existence d'une structure presque complexe sur la variété orientée V_{2n} est équivalente à l'existence d'une forme différentielle extérieure quadratique Ω telle que Ω^n soit non nulle partout et définisse l'orientation donnée. Appelons variété presque kählérienne une variété presque hermitienne dont la forme extérieure associée Ω est fermée, c'est-à-dire $d\Omega = 0$. Appelons variété symplectique une variété V_{2n} munie d'une forme fermée Ω telle que $\Omega^n \neq 0$ en chaque point. Une variété symplectique admet toujours une structure presque kählérienne subordonnée et possède des propriétés topologiques plus particulières qu'une variété presque complexe quelconque. En particulier, si elle est compacte, ses nombres de Betti de dimension paire sont différents de 0 car $\Omega^k \not\sim 0$ pour $0 < k \leq n$ (remarque que je dois à G. de RHAM).

5. Topologie de l'espace $\Gamma_n = O^+_{2n}/O'_n$.

Γ_1 est un point. Γ_2 est homéomorphe à S_2. Γ_3 est homéomorphe à l'espace projectif complexe $P_3(C)$. Γ_4 est homéomorphe à la quadrique complexe $Q_6(C)$ à 6 dimensions complexes. Quel que soit $n > 1$, Γ_n admet une structure fibrée de base S_{2n-2} et de fibre Γ_{n-1}. On en déduit les premiers groupes d'homotopie de Γ_n. $\pi_2(\Gamma_n) \cong \pi_2(\Gamma_2)$, cyclique infini, pour $n \geq 2$. Pour $i > 2$, on a $\pi_i(\Gamma_3) \cong \pi_i(S_7)$. Comme $Q_6(C)$ admet une structure fibrée [3] de base S_6 et de fibre $P_3(C)$, pour laquelle il existe une section (2), on a $\pi_i(\Gamma_4) \cong \pi_i(S_6) \times \pi_i(P_3(C))$. Pour $n \geq 4$, on a $\pi_i(\Gamma_n) = 0$, si $2 < i < 6$, et $\pi_6(\Gamma_n)$ est cyclique infini. Ces propriétés de Γ_n servent à démontrer les résultats du paragraphe 6.

6. Conditions d'existence de structures presque complexes (3)

Etant donné $E(B, R^{2n}, O^+_{2n}, H)$, le premier obstacle à l'existence d'une structure fibrée hermitienne subordonnée, c'est-à-dire d'une section de l'espace fibré associé de fibres isomorphes à Γ_n, est une classe de cohomologie W^3 de B, à coefficients entiers. Pour qu'il existe une section sur le squelette de dimension 3 de B, qui est supposé être un complexe, il faut et il suffit que $W^3 = 0$. La classe W^3 est identique à la classe caractéristique de Stiefel-Whitney, premier obstacle à l'existence d'un champ associant à tout $x \in B$ une suite de $2n - 2$ vecteurs indépendants de la fibre R^{2n}_x. La variété de Stiefel

(2) $Q_6(C)$ n'est pas homéomorphe à $S_6 \times P_3(C)$, contrairement à ce que j'ai affirmé dans [2].

(3) On trouvera des résultats concernant les structures presque quaternioniennes dans [2] et [9].

$V_{2n,2n-2}$ est en effet un espace fibré de base Γ_n et de fibre $W_{n,n-1}$, variété des suites orthonormées de $n-1$ vecteurs unitaires de l'espace hermitien C^n. Il en résulte un isomorphisme canonique de $\pi_3(\Gamma_n)$ sur $\pi_3(V_{2n,2n-2})$ et l'identification des deux premiers obstacles considérés.

Si $W^3 = 0$, il y a un 2e obstacle de dimension 4 pour $n = 2$, de dimension 8 pour $n = 3$, de dimension 7 pour $n > 3$. Si $n \geqslant 3$, $W^3 = 0$ entraîne donc $W^5 = 0$, où W^5 est la classe de Stiefel-Whitney de dimension 5. En tenant compte d'un isomorphisme canonique de $\pi_6(\Gamma_n)$ sur $\pi_6(V_{2n,2n-6})$, où $n > 3$, on voit que le 2e obstacle est identique à la classe W^7 de Stiefel-Whitney, premier obstacle à l'existence d'un champ de $2n-6$ vecteurs. Une condition nécessaire pour l'existence d'une structure fibrée hermitienne subordonnée est évidemment que toute les classes W^{2k+1} de Stiefel-Whitney soient nulles.

En particulier soit $E = T(V_{2n})$, muni de la structure fibrée tangente orientée de la variété orientée V_{2n}. La classe W^3 de V_{2n} est le 1er obstacle à l'existence d'une structure presque complexe sur V_{2n}. La condition $W^3 = 0$ est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une structure presque complexe sur une variété orientée V_6. Si de plus le groupe de cohomologie de dimension 2 de V_6 est nul, toutes les structures presque complexes sur V_6, et correspondant à une orientation donnée, forment une seule classe. A chaque orientation de la sphère S_6 correspondent ainsi des structures presque complexes, appartenant toutes à une même classe d'homotopie. Mais il faudrait sans doute des méthodes nouvelles pour décider si S_6 admet aussi des structures analytiques complexes.

Chacun des parallélismes classiques dans l'espace projectif réel P_7 correspond [3] sur $Q_6(C)$ à une structure fibrée dont les fibres sont des génératrices isomorphes à $P_3(C)$. En supposant que S_6 soit la partie réelle de $Q_6(C)$, cette structure fibrée définit justement une structure presque hermitienne sur S_6. Celle-ci pourra aussi être définie à l'aide des octaves de Cayley [5] ([4]).

Par une méthode s'appliquant aux sphères S_{2n}, j'ai montré que S_4 n'admet aucune structure presque complexe, résultat obtenu d'une manière différente par H. HOPF. Si S_{2n} est presque complexe, S_{2n+1} est parallélisable (KIRCHHOFF [5]) ce qui entraîne que S_{4n} n'admet aucune structure presque complexe.

([4]) Elle ne dérive pas d'une structure analytique complexe. Ce résultat est démontré explicitement dans [11], où l'on démontre de plus que toute structure presque hermitienne localement homogène sur S_6 est équivalente à la structure précédente. Il en résulte immédiatement qu'il n'existe sur S_6 aucune structure analytique complexe homogène. [Novembre 1958].

D'après WHITNEY [7] la classe W_3 d'une variété orientée V_4 est nulle. Mais WU WEN-TSÜN a montré que pour tout $n > 2$, il existe des variétés orientées V_{2n} dont la classe W^3 n'est pas nulle.

7. Quelques résultats de Wu Wen-tsün.

Par l'étude appronfondie des variétés de Grassmann réelles et complexes, WU WEN-TSÜN a obtenu les relations suivantes entre les classes caractéristiques d'une structure fibrée vectorielle réelle orientée $\mathfrak{F}$ et celles d'uns structure fibrée vectorielle complexe subordonnée $\mathfrak{F}'$:

Relations de Wu :

$$W_2(\mathfrak{F}, t) = C_2(\mathfrak{F}', t) \; ; \quad \overline{W}_2(\mathfrak{F}, t) = \overline{C}_2(\mathfrak{F}', t) \; ;$$

$$P(\mathfrak{F}, t) = C(\mathfrak{F}', t) \cup C(\mathfrak{F}', it) \; ; \quad \overline{P}(\mathfrak{F}, t) = \overline{C}(\mathfrak{F}', t) \cup \overline{C}(\mathfrak{F}', it) \; ;$$

$$X^{2n}(\mathfrak{F}) = (-1)^n \, C^{2n}(\mathfrak{F}') \quad .$$

Dans ces formules on a posé

$$W_2(\mathfrak{F}, t) = \sum W_2^k(\mathfrak{F}) t^k \; , \quad \overline{W}_2(\mathfrak{F}, t) = \sum \overline{W}_2^k(\mathfrak{F}) t^k \; ,$$

où $W_2^k(\mathfrak{F})$ (resp. $\overline{W}_2^k(\mathfrak{F})$) sont les classes (resp. classes duales) de Stiefel-Whitney réduites modulo 2.

$$P(\mathfrak{F}, t) = \sum (1)^k P^{4k}(\mathfrak{F}) t^{4k} \; , \quad \overline{P}(\mathfrak{F}, t) = \sum \overline{P}^{4k}(\mathfrak{F}) t^{4k} \; ,$$

où $P^{4k}(\mathfrak{F})$ (resp. $\overline{P}^{4k}(\mathfrak{F})$) sont les classes (resp. classes duales) de Pontrjagin. $C(\mathfrak{F}', t) = \sum C^{2k}(\mathfrak{F}') t^{2k}$, $\overline{C}(\mathfrak{F}', t) = \sum \overline{C}^{2k}(\mathfrak{F}') t^{2k}$, où $C^{2k}(\mathfrak{F})$ (resp. $\overline{C}^{2k}(\mathfrak{F}')$) sont les classes (resp. classes duales) de Chern de $\mathfrak{F}'$. Ces deux polynômes réduits modulo 2 sont désignés par $C_2(\mathfrak{F}', t)$ et $\overline{C}_2(\mathfrak{F}', t)$. $X^{2n}(\mathfrak{F})$ est la classe caractéristique d'Euler-Poincaré. On trouvera la définition précise de ces classes dans la thèse de WU [9].

THÉORÈME de Wu. - Les classes d'isomorphie des structures presque complexes sur une variété orientée V_4 correspondent d'une façon biunivoque aux classes de cohomologie C^2 sur V_4 telles que :

$$W_2^2(V_4) = C_2^2 \; ; \quad P^4(V_4) + 2\, X^4(V_4) = C^2 \cup C^2 \; ,$$

où C_2^2 désigne la classe déduite de C^2 par réduction modulo 2, $P^4(V_4)$ la classe de Prontrjagin et $X^4(V_4)$ la classe d'Euler-Poincaré. C^2 sera la classe de Chern de la structure presque complexe correspondante.

Les relations de Wu entraînent que S_{4k} n'admet pas de structure presque complexe. Ce résultat est valable pour toute variété V_{4k} dont l'anneau de cohomologie est isomorphe à celui de S_{4k} et dont la classe de Pontrjagin P^{4k} est nulle.

8. Les sous-variétés d'une variété presque complexe V_{2n}.

Un p-élément X_p de V_{2n} sera dit complexe lorsqu'il est invariant par la transformation I définie dans l'espace tangent T_x qui contient X_p ; il sera dit réel lorsqu'il rencontre son transformé par I au point x seulement. Une sous-variété V_p de V_{2n} sera dite presque complexe (resp. réelle) lorsque les p-éléments tangents à V_p sont complexes (resp. réels). Une sous-variété presque complexe est munie d'une structure presque complexe induite ; celle-ci dérive d'une structure analytique complexe si V_{2n} est analytique complexe.

Soit V_n une sous-variété réelle de V_{2n}. L'espace fibré $T(V_n)$ admet un isomorphisme sur l'espace fibré $N(V_n)$ des vecteurs normaux à V_n, les points de V_n restant fixés. Réciproquement si cette condition est vérifiée pour une sous-variété V_n d'une variété quelconque V_{2n}, il existe dans un voisinage de V_n une structure presque complexe telle que V_n soit une sous-variété réelle. En particulier, le voisinage de la diagonale Δ de $V_n \times V_n$ admet une structure presque complexe telle que Δ soit une sous-variété réelle. Il admet même une structure analytique complexe telle que Δ soit une sous-variété analytique réelle.

La position d'une sous-variété réelle V_n dépend de la structure de $T(V_n)$ L'espace fibré $T^c(V_n)$ admet un isomorphisme canonique dans $T(V_{2n})$ muni de la structure fibrée complexe. Si V_n est déformable en un point de V_{2n}, $T^c(V_n)$ est isomorphe à $V_n \times C^n$. Pour toute variété V_n, WU a démontré la relation suivante : $C(V_n, t) = P(V_n, t)$, où $C(V_n, t)$ désigne le "polynôme de Chern" de $T^c(V_n)$ et $P(V_n, t)$ le "polynôme de Pontrjagin" de $T(V_n)$ définis au paragraphe 7. Si V_n est une sous-variété réelle de V_{2n}, $C(V_n, t)$ est la trace sur V_n de $C(V_{2n}, t)$, polynôme de Chern de $T(V_{2n})$ muni de la structure fibrée complexe.

Pour $n = 2$, la relation de Wu donne $C(V_2, t) = 1$, ce qui montre que pour toute variété V_2 l'espace $T^c(V_2)$ est isomorphe à $V_2 \times C^2$.

Soit V_n une sous-variété réelle de l'espace projectif complexe $P_n(C)$. D'après la relation de Wu, la trace sur V_n de $C^{4k+2}(P_n(C))$ est nulle ; il en résulte que les cycles de dimension $4k+2$ de V_n sont ~ 0 dans $P_n(C)$. Par contre, quel que soit k, les cycles de dimension $2k$ d'une sous-variété complexe ne sont pas tous ~ 0 dans $P_n(C)$. Ce résultat est valable aussi pour toute sous-variété presque complexe d'une variété presque kählérienne.

Les notions et les résultats précédents s'étendent aux variétés plongées (V_p, f) dans V_{2n}, où f est une application différentiable régulière de V_p dans V_{2n}. Si V_{2n} est muni d'une forme différentielle extérieure Ω telle que $\Omega^n \neq 0$ en chaque point, les variétés intégrales de Ω sont des variétés plongées réelles pour une certaine structure presque complexe de V_{2n}.

9. Problème d'équivalence de deux structures presque complexes.

Etant données deux variétés presque complexes V_{2n} et $\overline{V}_{2n}$, une équivalence de l'une à l'autre est un homéomorphisme différentiable de V_{2n} sur $\overline{V}_{2n}$ dont le prolongement à $T(V_{2n})$ est un isomorphisme de $T(V_{2n})$ sur $T(\overline{V}_{2n})$ par rapport aux structures fibrées vectorielles complexes. Si f est une application différentiable régulière d'une variété W_{2n} dans V_{2n}, à la structure presque complexe sur V_{2n} correspond une structure presque complexe sur W_{2n}, appelée image réciproque par f de la première. Si celle-ci est définie localement par n formes de Pfaff complexes $\omega_1, \dots, \omega_n$, son image réciproque est définie par les formes $f^*(\omega_k)$. Le problème d'équivalence locale de deux structures presque complexes peut être traité par les méthodes de E. CARTAN et il vient d'être étudié pour $n = 2$ par Paulette LIBERMANN [6].

Pour qu'une structure presque complexe sur V_{2n} dérive d'une structure analytique complexe, il faut et il suffit qu'elle soit partout localement équivalente (5) à la structure complexe naturelle sur C^n, qui est définie par les formes $dz_1, dz_2, \dots, dz_n$. Soit g une équivalence d'un ensemble ouvert de V_{2n} à un ensemble ouvert de C^n. Les formes $dg_h = g^*(dz_h)$ sont alors des combinaisons linéaires indépendantes des formes $\omega_{h\ell}$, d'où l'on déduit les relations $d\omega_h = \sum \omega_h \wedge \omega_{h\ell}$, où $\omega_{h\ell}$ sont des formes de Pfaff complexes sur V_{2n}. Ces équations, indiquées par G. de RHAM sont des conditions nécessaires pour que la structure presque complexe dérive d'une structure complexe. Dans le cas où les composantes réelles et imaginaires des formes ω_h sont des formes de Pfaff analytiques sur V_{2n}, ces conditions sont aussi suffisantes (6).

(5) Ces équivalences locales définissent alors les systèmes de coordonnées locales analytiques complexes.

(6) On peut se ramener au théorème de Frobenius appliqué à des formes analytiques complexes.