

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ROGER GODEMENT

I. Les représentations unitaires irréductibles du groupe complexe unimodulaire

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 4, p. 21-27

http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__21_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

I. LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES IRREDUCTIBLES
DU GROUPE COMPLEXE UNIMODULAIRE

par Roger GODEMENT

[d'après GELFAND et NEUMARK ⁽¹⁾].

On désigne par G le groupe des matrices complexes $g = ((g_{pq}))$ de déterminant $+ 1$; la mesure de Haar sur G est notée $d\mu(g)$ (elle est invariante à droite et à gauche). On pose

$$(1) \quad \beta(g) = |g_{22}|^4 \cdot |g_{33}|^8 \dots |g_{nn}|^{4n-4}$$

1. Sous-groupe K , d'élément générique $k = ((k_{pq}))$ avec

$$(2) \quad k_{pq} = 0 \text{ pour } p < q ; \text{ d'où } k_{11} k_{22} \dots k_{nn} = 1 .$$

On prend pour paramètres, les k_{pq} ($p > q$), les k_{22}, \dots, k_{nn} , et les variables imaginaires conjuguées ; on désigne par dk le produit (extérieur) des dk_{pq} considérés. Les mesures de Haar sur K sont

$$(2) \quad d\mu_{\ell}(k) = |k_{22}|^{-4} \dots |k_{nn}|^{-2n} \cdot dk \wedge \overline{dk} \quad (\text{invariante à gauche})$$

$$(3) \quad d\mu_r(k) = |k_{33}|^2 \dots |k_{nn}|^{2n-4} \cdot dk \wedge \overline{dk} \quad (\text{invariante à droite})$$

On a

$$(4) \quad d\mu_r(k) = \beta(k) d\mu_{\ell}(k) .$$

2. Sous-groupe K' , d'élément générique $k' = ((k'_{pq}))$ avec

$$(5) \quad k'_{pq} = 0 \text{ pour } p > q .$$

On note $g \rightarrow g'$ l'antiautomorphisme de G consistant à permuter lignes et colonnes ; il échange K et K' . Mesures de Haar sur K' :

$$(6) \quad d\mu_{\ell}(k') = |k'_{33}|^2 \dots |k'_{nn}|^{2n-4} \cdot dk' \wedge \overline{dk'}$$

$$(7) \quad d\mu_r(k') = |k'_{22}|^{-4} \dots |k'_{nn}|^{-2n} \cdot dk' \wedge \overline{dk'} = \beta(k')^{-1} \cdot d\mu_{\ell}(k') .$$

(1) GELFAND (I. M.) und NEUMARK (M. A.). - Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen. - Berlin, Akademie-Verlag, 1957 (Mathematische Lehrbücher und Monographien, 2. Abteilung, Band 6).

3. Sous-groupe Z de K , d'élément générique $z = ((z_{pq}))$ avec

$$(8) \quad z_{pq} = 0 \text{ pour } p < q, \quad z_{pp} = 1 \quad (1 \leq p \leq n).$$

On y prend pour paramètres les z_{pq} et \bar{z}_{pq} ($p > q$). Il y a une mesure de Haar sur Z :

$$(9) \quad d\mu_{\mathcal{H}}(z) = d\mu_R(z) = d\mu(z) = dz \wedge \bar{dz}, \text{ où } dz = \prod_{p > q} dz_{pq}.$$

4. Sous-groupe Z' de K' , d'élément générique $z' = ((z'_{pq}))$ avec

$$(10) \quad z'_{pq} = 0 \text{ pour } p > q, \quad z'_{pp} = 1 \quad (1 \leq p \leq n).$$

Résultats analogues à ceux de Z :

$$(11) \quad d\mu_{\mathcal{H}}(z') = d\mu_R(z') = d\mu(z') = dz' \wedge \bar{dz}', \text{ où } dz' = \prod_{p < q} dz'_{pq}.$$

5. Sous-groupe $\Delta = K \cap K'$, fermé des matrices diagonales

$$(12) \quad \delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\} \text{ avec } \delta_1 \cdot \delta_2 \dots \delta_n = 1.$$

Δ est abélien maximal. On prend pour paramètres $\delta_2, \dots, \delta_n$ et les conjugués. On a

$$(13) \quad d\mu(\delta) = |\delta_2|^{-2} \dots |\delta_n|^{-2} d\delta \wedge \bar{d\delta} \text{ où } d\delta = d\delta_2 \wedge \dots \wedge d\delta_n.$$

6. Relations entre ces sous-groupes.

a. Tout $k \in K$ admet des représentations uniques de la forme

$$(14) \quad k = \delta \cdot z = z_1 \cdot \delta \quad (\text{avec } \delta \in \Delta; z, z_1 \in Z); \text{ on a } \delta_p = k_{pp}.$$

b. Tout $k' \in K'$ admet des représentations uniques de la forme

$$(15) \quad k' = \delta \cdot z' = z'_1 \cdot \delta \quad (\text{avec } \delta \in \Delta; z', z'_1 \in Z'); \text{ on a } \delta_p = k'_{pp}.$$

c. Presque tout $g \in G$ admet des représentations uniques de la forme

$$(16) \quad g = z' \cdot k = k' \cdot z \quad (\text{avec } k \in K, k' \in K', z \in Z, z' \in Z').$$

d. Presque tout $k' \in K'$ admet une représentation unique

$$(17) \quad k' = z'^{-1} \cdot \delta \cdot z' ; \text{ de même, } k = z^{-1} \delta z \quad (k \in K, z \in Z).$$

e. Tout $g \in G$ admet $n!$ représentations sous la forme

$$(18) \quad g = z^{-1} \cdot k' \cdot z ; \text{ de même, } g = z'^{-1} \cdot k \cdot z'.$$

f. Presque tout $g \in G$ est de la forme

(19) $g = x^{-1} \cdot \delta \cdot x$ où $x \in G$, $\delta \in \Delta$;
 δ peut être choisi de $n!$ façons différentes.

7. Relations entre mesures de Haar.

a. En identifiant, d'après 6a, les espaces K et $\Delta \times Z$, on obtient

$$(20) \quad \int_K f(k) d\mu(k) = \int_{\Delta} \int_Z f(\delta z) d\mu(\delta) d\mu(z) ;$$

$$(20') \quad \int_K f(k) d\mu_r(k) = \int_{\Delta} \int_Z f(z\delta) d\mu(\delta) d\mu(z) .$$

b. De même avec K' et $\Delta \times Z'$.

c. 6c conduit à

$$(21) \quad \int_G f(g) d\mu(g) = \int_{K'} \int_Z f(k'z) d\mu(k') d\mu(z) = \int_K \int_{Z'} f(z'k) d\mu(z') d\mu_r(k)$$

d. D'après 6e, $Z \times K'$ recouvre G $n!$ fois ; désignons par $\lambda_g^{(p)}$ les valeurs propres de g , par k'_g l'un quelconque des k' de (18), par f et φ des fonctions sommables sur G et K' respectivement ; on a alors

$$(22) \quad \int_Z d\mu(z) \int_{K'} f(z^{-1}k'z) \varphi(k') d\mu(k') = \int_G f(g) \frac{\sum \varphi(k'_g) \beta^{\frac{1}{2}}(k'_g)}{\prod_{p < q} |\lambda_g^{(p)} - \lambda_g^{(q)}|^2} d\mu(g)$$

où le \sum est étendu aux $n!$ solutions k'_g de (18).

8. L'espace homogène K .

Soit G/Z' l'espace homogène des classes à droite modulo Z' ; d'après (16), presque toute classe est de la forme $Z' \cdot k$, où $k \in K$ est bien déterminé, et réciproquement ; on peut représenter G comme groupe de transformations dans G/Z' , ou encore sur K ; si on le représente sur K le transformé $A_g k$ de $k \in K$ par $g \in G$ est l'élément (cf. (16))

$k_1 \in K$ tel que

$$(23) \quad kg = z' \cdot k_1 \quad \text{avec } z' \in Z' .$$

Les A_g sont donc définis presque partout sur K (et partout sur G/Z').

La formule (21) prouve que les A_g conservent $d\mu_r(k)$:

$$(24) \quad d\mu_r(A_g k) = d\mu_r(k) .$$

9. L'espace homogène Z .

Si l'on considère l'espace G/K' des classes à droite de K' , on peut de même l'identifier, à un ensemble négligeable près, à Z : une classe $K'g$ contient un seul $z \in Z$, et réciproquement (cf. (16)). On peut donc représenter G comme groupe de transformations sur Z ; le transformé $T_g z$ de $z \in Z$ par $g \in G$ sera le $z_1 \in Z$ tel que

$$(25) \quad zg = k'.z_1 \quad \text{où } k' \in K' .$$

$d\mu(z)$ n'est pas invariante par les T_g ; si l'on pose

$$(26) \quad T_g z = z_1 , \quad zg = k' z_1 = \delta.z'.z_1 \quad (\text{cf. (15)})$$

on a

$$(27) \quad d\mu(T_g z) = \beta^{-1}(\delta).d\mu(z) = \beta^{-1}(zg)d\mu(z) .$$

10. La représentation unitaire dans \mathcal{H}_K ; sa décomposition.

Soit \mathcal{H}_K l'espace des fonctions de carré sommable sur K pour $d\mu_r(k)$. Si l'on pose pour $g \in G$, $f \in \mathcal{H}_K$,

$$(28) \quad U_g^K f(k) = f(A_g k)$$

on a, en vertu de (24), une représentation unitaire $\{\mathcal{H}_K ; U_g^K\}$ de G ; celle-ci se décompose de la façon suivante. D'après (20) et (4) on a

$$(29) \quad \int |f(k)|^2 d\mu_r(k) = \int_Z d\mu(z) \int_{\Delta} |f(\delta z) \beta^{\frac{1}{2}}(\delta)|^2 d\mu(\delta) , \quad \text{pour } f \in \mathcal{H}_K .$$

Soit X le groupe des caractères de Δ ; posons (Fourier sur Δ)

$$(30) \quad f_{\chi}(z) = \int_{\Delta} f(\delta z) \beta^{1/2}(\delta) \overline{\chi(\delta)} d\mu(\delta)$$

pour $\chi \in X$; (29), (30) et Plancherel donnent

$$(31) \quad \int_K |f(k)|^2 d\mu_r(k) = \int_Z d\mu(z) \int_X |f_{\chi}(z)|^2 d\mu(\chi) = \int_X d\mu(\chi) \int_Z |f_{\chi}(z)|^2 d\mu(z) .$$

Soit alors \mathcal{H}_Z l'espace L^2 construit sur Z ; pour presque tout $\chi \in X$, $f_{\chi}(z)$ définit un élément $f_{\chi} \in \mathcal{H}_Z$, et (31) donne, en prenant des produits scalaires dans \mathcal{H}_K et \mathcal{H}_Z :

$$(32) \quad \langle f , g \rangle = \int_X \langle f_{\chi} , g_{\chi} \rangle d\mu(\chi) ;$$

donc \mathcal{H}_K est une "somme directe continue" d'espaces de Hilbert tous isomorphes à \mathcal{H}_Z .

On va voir que les U_g^K se décomposent aussi dans ces divers espaces.

Posons $f'(k) = U_g^K f(k) = f(A_g k)$, et soit f'_χ la χ -composante de f' , donnée par

$$(33) \quad f'_\chi(z) = \int_{\Delta} f'(\delta z) \beta^{1/2}(\delta) \overline{\chi(\delta)} d\mu(\delta) = \int_{\Delta} f[A_g(\delta z)] \beta^{1/2}(\delta) \chi(\delta) d\mu(\delta).$$

Posons

$$(34) \quad \delta z = k \quad ; \quad A_g k = k_1 \quad ; \quad k g = z' k_1 \quad ; \quad k_1 = \delta_1 z_1.$$

On a en vertu des relations du n° 6 :

$$(35) \quad z_1 = T_g z \quad ; \quad A_g k = k_1 = \delta_1 z_1 = \delta \delta_2 \cdot z_1 = \delta \delta_2 \cdot T_g z = A_g(\delta z) \quad ;$$

δ_2 , pour z et g donnés, ne dépend pas de δ , car on a la formule

$$(36) \quad z g = \delta_2 z_1' z_1 \quad \text{avec unicité de } \delta_2, z_1', z_1 \text{ d'après 6a et 6b.}$$

Ceci étant (33) devient

$$(37) \quad f'_\chi(z) = \int_{\Delta} f(\delta_2 \cdot \delta \cdot T_g z) \beta^{1/2}(\delta) \overline{\chi(\delta)} d\mu(\delta) =$$

$$= \beta^{\frac{1}{2}}(\delta_2) \chi(\delta_2) \int_{\Delta} f(\delta \cdot T_g z) \beta^{\frac{1}{2}}(\delta) \chi(\delta) d\mu(\delta)$$

ou

$$(38) \quad f'_\chi(z) = \beta^{\frac{1}{2}}(\delta_2) \chi(\delta_2) f'_\chi(T_g z).$$

On est donc conduit à poser

$$(39) \quad U_{\chi;g} f(z) = \beta^{\frac{1}{2}}(\delta_2) \chi(\delta_2) f(T_g z) \quad \text{pour } f \in \mathcal{H}_Z$$

où δ_2 est donné en fonction de g et z par (36). En utilisant (27), on montre que les $U_{\chi;g}$ sont unitaires dans \mathcal{H}_Z ; d'où une famille de représentations $\{U_{\chi;g}; \mathcal{H}_Z\}$ dépend d'un "paramètre" $\chi \in X$, et (32) se complète par

$$(40) \quad \langle U_g^K f, g \rangle = \int_X \langle U_{\chi;g} f, g_\chi \rangle d\mu(\chi) \quad \text{pour } f, g \in \mathcal{H}_K.$$

La représentation $\{\mathcal{H}_K; U_g^K\}$ se décompose donc suivant les $\{\mathcal{H}_Z; U_{\chi;g}\}$.

On peut simplifier (39); prolongeons χ à G en posant

$$(41) \quad \chi(g) = \chi(\delta) \quad \text{si } g = Z' \delta Z \quad (\text{cf. (15) et (16)});$$

$\chi(g)$ est défini presque partout, et vérifie, comme du reste β , les équations

$$(42) \quad \chi(gk) = \chi(g) \chi(k) \quad ; \quad \chi(k'g) = \chi(k') \chi(g) \quad \text{pour } g \in G, k \in K, k' \in K'$$

En posant

$$(43) \quad \alpha_{\chi}(g) = \beta^{-\frac{1}{2}}(g) \chi(g)$$

(39) s'écrit

$$(44) \quad U_{\chi; g} f(z) = \alpha_{\chi}(zg) \cdot f(T_g z)$$

On peut écrire explicitement (44) comme suit. Pour $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$, posons

$$(45) \quad \chi(\delta) = |\delta_2|^{m_2+i\rho_2} \dots |\delta_n|^{m_n+i\rho_n} \cdot \delta_2^{-m_2} \dots \delta_n^{-m_n}$$

(m_2, \dots, m_n entier, ρ_2, \dots, ρ_n réels, caractérisant le caractère χ de Δ).

Pour $g = ((g_{pq}))$, posons

$$(46) \quad g_p = \begin{vmatrix} g_{pp} & \dots & g_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{np} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix} ;$$

Alors (44) s'écrit

$$(47) \quad U_{\chi; g} f(z) = |g_2^1|^{m_2+i\rho_2-2} \cdot |g_3^1|^{m_3-m_2+i(\rho_3-\rho_2)-2} \dots |g_n^1|^{m_n-m_{n-1}+i(\rho_n-\rho_{n-1})-2} \\ (g_2^1)^{-m_2} (g_3^1)^{-(m_3-m_2)} \dots (g_n^1)^{-(m_n-m_{n-1})} \cdot f(T_g z)$$

où l'on a posé $zg = g^1 = ((g_{pq}^1))$.

11. Cas $n = 2$.

Pour $n = 2$, $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, on a

$$(48) \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+iy & 1 \end{pmatrix}$$

donc Z est isomorphe à \mathbb{R}^2 ; on a $d\mu(z) = dx dy$; pour $z \in \mathbb{C}$, il vient

$$(49) \quad T_g z = \frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}$$

et (47) s'écrit

$$(50) \quad U_{\chi; g} f(z) = |g_{12}z + g_{22}|^{m+i\ell-2} \cdot (g_{12}z + g_{22})^{-m} \cdot f\left(\frac{g_{11}z + g_{21}}{g_{12}z + g_{22}}\right),$$

\mathcal{H}_Z étant l'espace des $f(z) = f(x + iy)$ telles que

$$(51) \quad \iint |f(x + iy)|^2 dx dy < +\infty.$$