ROGER GODEMENT

Sommes continues d'espaces de Hilbert, II

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 25, p. 169-176

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__169_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1950)

SOMMES CONTINUES D'ESPACES DE HILBERT, II

par Roger GODEMENT

1. Nōtions sur les anneaux d'opérateurs.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert arbitraire ; l'ensemble $\underset{\sim}{R}$ de tous les opérateurs continus définis dans $\mathcal{H}$ est une algèbre sur le corps complexe, munie d'une involution $A \to A^*$. Pour une partie $\underset{\sim}{M}$ de $\underset{\sim}{R}$, on note $\underset{\sim}{M}'$ l'ensemble des éléments de $\underset{\sim}{R}$ qui permutent à tous les éléments de $\underset{\sim}{M}$, et on pose $\underset{\sim}{M}'' = (\underset{\sim}{M}')'$. Un anneau d'opérateurs est un ensemble $\underset{\sim}{M}$ qui possède les deux propriétés suivantes :

a. $\underset{\sim}{M}$ est autoadjoint (i.e. invariant par *) ;
b. $\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M}''$.

Il est évident que tout anneau d'opérateurs est une sous-algèbre de $\underset{\sim}{R}$, autoadjointe et contenant l'opérateur 1 ; la réciproque est évidemment fausse.

Pour toute partie $\underset{\sim}{M}$ de $\underset{\sim}{R}$, stable par *, $\underset{\sim}{M}'$ est un anneau d'opérateurs, et $\underset{\sim}{M}''$ aussi, c'est même le plus petit anneau contenant $\underset{\sim}{M}$ (démonstration à peu près triviale), en sorte qu'on peut parler de l'anneau "engendré" par un ensemble d'opérateurs. Noter que, si un anneau contient un opérateur hermitien H, il contient aussi toutes les variétés spectrales de H.

Pour caractériser, parmi les sous-algèbres autoadjointes de $\underset{\sim}{R}$, celles qui sont des anneaux au sens précédent, on introduit des topologies sur $\underset{\sim}{R}$, et en particulier les quatre suivantes (il en existe deux autres, plus celles que l'on connait pas) :

a. topologie faible : un opérateur A converge faiblement vers 0 si, pour tout $x \in \mathcal{H}$, Ax converge faiblement vers 0 ;

b. topologie forte : même définition en remplaçant "faiblement" par "fortement"

c. topologie superforte : A converge superfortement vers 0 si, pour toute suite (x_n) telle que $\sum_n ||x_n||^2 < +\infty$, le nombre $\sum_n ||Ax_n||^2$ tend vers 0 ;

d. topologie uniforme : A converge uniformément vers 0 si $||A|| = \sup ||Ax||/||x||$ tend vers 0.

Puisque les éléments d'un anneau d'opérateurs sont assujettis uniquement à permuter avec des opérateurs donnés, il est clair qu'un tel anneau est fermé pour toutes ces topologies. Il est non moins clair qu'une algèbre autoadjointe peut être uniformément fermée sans être un anneau (exemple : opérateurs complètement continus). On a le résultat suivant :

THÉORÈME 1 (Von Neumann). - Pour qu'une algèbre autoadjointe contenant 1 soit un anneau d'opérateurs, il faut et il suffit qu'elle soit superfortement fermée (en sorte que, pour une telle algèbre, il y a équivalence entre les propriétés suivantes : être un anneau ; être faiblement fermée ; être fortement fermée ; être superfortement fermée).

La démonstration s'effectue en deux étapes. D'abord on passe de $\mathcal{H}$ à l'espace $\tilde{\mathcal{H}}$, somme directe d'une infinité dénombrable d'espaces isomorphes à $\mathcal{H}$; c'est donc l'ensemble des suites (x_n) d'éléments de $\mathcal{H}$ telles que $\sum \| x_n \|^2$ converge, le produit scalaire de deux telles suites étant donné par

$$\langle (x_n) , (y_n) \rangle = \sum \langle x_n , y_n \rangle \quad ;$$

si l'on associe à tout opérateur continu A défini dans $\mathcal{H}$ l'opérateur $\tilde{A}$ défini dans $\tilde{\mathcal{H}}$ par $\tilde{A}(x_n) = (Ax_n)$, il est clair qu'on transforme la topologie superforte dans $\mathcal{H}$ en la topologie forte dans $\tilde{\mathcal{H}}$; comme la correspondance $A \longrightarrow \tilde{A}$ conserve toutes les relations algébriques, on voit facilement que tout revient (en remplaçant $\mathcal{H}$ par $\tilde{\mathcal{H}}$) à prouver ceci : toute algèbre autoadjointe contenant 1 et fortement fermée est un anneau d'opérateurs. Soit alors $\underset{\sim}{M}$ une telle algèbre ; l'anneau engendré est l'ensemble des opérateurs qui permutent aux hermitiens permutables à $\underset{\sim}{M}$, donc qui conservent les sous-espace fermés invariants par $\underset{\sim}{M}$ (décomposition spectrale!), autrement dit, l'ensemble des opérateurs A tels que, pour tout $x \in \mathcal{H}$, Ax soit adhérent à l'ensemble des Tx $(T \in \underset{\sim}{M})$, ce qui implique comme on le voit facilement $A \in \underset{\sim}{M}$.

On dit qu'un anneau d'opérateurs est un facteur si son centre est réduit aux scalaires. Il est bien connu que, dans un espace de dimension finie, un anneau autoadjoint se décompose en une somme directe de facteurs, lesquels se décomposent à leur tour en une somme directe d'anneaux irréductibles. Ces deux propriétés ont été généralisées aux anneaux d'opérateurs dans les espaces de Hilbert séparables, la première par von NEUMANN, la seconde par MAUTNER. Naturellement, les choses sont beaucoup moins simples que dans le cas classique.

2. Opérateurs décomposables dans une somme continue.

On reprend maintenant les notations de l'exposé 1 : Z est un espace localement compact muni d'une mesure positive m , on a en chaque point Z un espace de Hilbert "tangent" $\mathcal{H}(\zeta)$, ainsi qu'une famille fondamentale Λ de champs de vecteurs continus ; on a défini la somme continue des $\mathcal{H}(\zeta)$ relativement à m et à Λ ; on notera L^2 l'espace de Hilbert obtenu. On suppose réalisé l'axiome de dénombrabilité $(\Lambda_4)^x$, ou tout autre axiome analogue. Rappelons qu'il existe alors des familles e_n de champs de vecteurs mesurables qui possèdent la propriété suivante ("familles mesurables") : pour tout $\zeta \in Z$ où la dimension de l'espace tangent est n, les $e_i (i \leq n)$ forment une base orthonormale de $\mathcal{H}(\zeta)$, et les suivants sont nuls.

On appelle <u>champ d'opérateurs</u> toute fonction $A(\zeta)$ dont la valeur en $\zeta \in Z$ est un opérateur continu défini dans $\mathcal{H}(\zeta)$; ces champs d'opérateurs forment evidemment une algèbre avec involution : $A^*(\zeta) = A(\zeta)^*$.

Un champ d'opérateurs $A(\zeta)$ est dit <u>continu</u> (resp. <u>mesurable</u>) si, pour tout champ de vecteurs continu (resp. mesurable) $x(\zeta)$, le champ de vecteurs $A(\zeta)x(\zeta)$ est continu (resp. mesurable) ; cette notion de continuité est apparentéeà la topologie forte décrite au n° 1. Pour que $A(\zeta)$ soit mesurable, il est nécessaire et suffisant que, pour une famille mesurable donnée (arbitraire) $e_n(\zeta)$, les "coefficients" de A, i.e. les fonctions scalaires $\langle A(\zeta)e_p(\zeta), e_q(\zeta)\rangle$, soient mesurables.

On dit qu'un opérateur continu A défini dans L^2 est <u>décomposable</u> s'il lui correspond un champ d'opérateurs $A(\zeta)$, nécessairement mesurable, tel que l'on ait $Ax(\zeta) = A(\zeta)x(\zeta)$ pour tout $x \in L^2$.

Pour un champ d'opérateurs $A(\zeta)$, posons $\|A\|_\infty = \text{vrai max } \|A(\zeta)\|$; il est clair que tout champ d'opérateurs mesurable et "essentiellement borné" définit un opérateur décomposable A dans L^2, dont les composantes sont précisément les $A(\zeta)$; en particulier, toute fonction <u>scalaire</u> $f(\zeta)$, mesurable et essentiellement bornée, définit un opérateur décomposable T_f dont la ζ-composante est $f(\zeta).1$; les T_f forment dans L^2 une algèbre autoadjointe <u>commutative</u> $\underset{\sim}{P}$, contenant 1, et tout opérateur décomposable est visiblement <u>permutable</u> à $\underset{\sim}{P}$.

THÉORÈME 2. - <u>Tout opérateur continu dans</u> L^2 <u>qui permute à</u> $\underset{\sim}{P}$ <u>est dédomposable</u> (ceci prouvera que les opérateurs décomposables forment un <u>anneau</u>)

DÉMONSTRATION.

a. soit A permutable à $\underset{\sim}{P}$; pour un compact $K \in Z$, soit $E(K)$ l'opérateur qui consiste à multiplier un champ de vecteurs par la fonction caractéristique de K ; dans L^2 c'est un projecteur sur un sous-espace fermé $L^2(K)$, et on a $E(K) \in \underset{\sim}{P}$; donc A conserve ce sous-espace, ce qui ramène à faire la démonstration dans le cas où Z est compact.

b. soit alors $e_n(\zeta)$ une famille mesurable ; les e_n sont dans L^2 ; quel que soit $T \in \underset{\sim}{P}$, les vecteurs Te_p et e_q sont orthogonaux $(p \neq q)$; enfin, les éléments de la forme $\sum T_p e_p$ ($T_p \in \underset{\sim}{P}$, somme finie) sont partout denses dans L^2.

Considérons alors l'ensemble dénombrable Φ des éléments de la forme $\sum r_n e_n$ où les r_n sont des nombres rationnels complexes ; pour toute fonction scalaire f, mesurable et bornée, on a

$$\|T_f Ax\|_2 = \|AT_f x\|_2 \leqslant \|A\| . \|T_f x\|_2 ,$$

ce qui s'écrit en explicitant

$$\int |f(\zeta)|^2 \|Ax(\zeta)\|^2 \, dm(\zeta) \leqslant \|A\|^2 \int |f(\zeta)|^2 \|x(\zeta)\|^2 dm(\zeta) ;$$

pour chaque $x \in \Phi$, il existe donc dans Z un ensemble $N(x)$ de mesure nulle tel qu'en dehors de $N(x)$ on ait

$$\| Ax(\zeta)\| \leqslant \|A\| . \|x(\zeta)\| ;$$

puisque Φ est dénombrable, il existe un ensemble de mesure nulle N en dehors duquel ces relations sont vérifiées pour tous les $x \in \Phi$ à la fois ; comme les $x(\zeta)$ $(x \in \Phi)$ sont partout denses dans $\mathcal{H}(\zeta)$, on en déduit l'existence d'un champ d'opérateurs $A(\zeta)$ tel que l'on ait

$$Ax(\zeta) = A(\zeta)x(\zeta) \qquad \text{pour } x \in \Phi \text{ et } \zeta \notin N ;$$

puisque A permute aux T_f, ceci est vrai encore si x est de la forme $T_f y$ $(y \in \Phi)$ donc aussi par continuité pour tout $x \in L^2$, ce qui démontre le théorème. On notera qu'on a de plus la relation

$$\|A\| = \|A\|_\infty = \text{vrai max } \|A(\zeta)\| .$$

On peut compléter le théorème 2 en montrant, ce qui est facile, que les opérateurs T_f (f : fonction scalaire mesurable et bornée) sont les <u>seuls</u> opérateurs qui permutent à tous les opérateurs décomposables ; par suite, $\underset{\sim}{P}$ est aussi un anneau (commutatif) d'opérateurs.

On va maintenant étudier la façon dont les anneaux d'opérateurs définis dans L^2 peuvent se décomposer en anneaux définis dans les $\mathcal{H}(\zeta)$. Pour cela, on aura besoin du résultat suivant (von NEUMANN emploie la théorie des ensembles analytiques ; on peut s'en passer, quoique pas toujours ; de toutes façons, remplacer les ensembles analytiques par les boréliens ne constitue pas un progrès sensible).

3. Théorème de Federer-Morse.

THÉORÈME 3. – *Soient E et B deux espaces compacts métrisables et f une application continue de E dans B ; alors il existe dans E un ensemble borélien S sur lequel f est biunivoque et tel que* $f(S) = f(E)$.

DÉMONSTRATION. – Pour $x \in E$, soit $E(x)$ l'ensemble (compact) des y tels que $f(x) = f(y)$. On obtient ainsi une relation d'équivalence dans E , et tout revient à en trouver une "section".

Pour cela, recouvrons E par des boules fermées $B(i)$ en nombre fini, de rayon $\leqslant 1$; puis recouvrons chaque $B(i)$ par un nombre fini de boules $B(i, j)$ de rayon $\leqslant \frac{1}{2}$; puis chaque $B(i, j)$ par un nombre fini de boules $B(i, j, k)$ de rayon $\leqslant \frac{1}{3}$ et ainsi de suite. Pour chaque p , ordonnons les boules de la forme $B(n_1, \dots, n_p)$ par le procédé lexicographique.

On forme alors la section S comme suit : pour tout p , on note $E_p(x)$ l'intersection de la "fibre" $E(x)$ avec la première boule à p indices qui la rencontre, et l'on pose $E_p = \bigcup E_p(x)$; on constate immédiatement que les E_p sont des intersections dénombrables d'ouverts, vont en décroissant, et que leur intersection répond à la question (et est donc aussi une intersection dénombrable d'ouverts).

4. Théorèmes fondamentaux.

On suppose maintenant que l'espace de base Z soit métrisable, de façon à pouvoir appliquer Federer-Morse à des parties compactes de Z .

a. Champs d'anneaux d'opérateurs. Ceci consiste à associer à chaque $\zeta \in Z$ un anneau d'opérateurs $\mathcal{M}(\zeta)$ défini dans $\mathcal{H}(\zeta)$. On dira qu'un tel champ est mesurable s'il existe une suite de champs d'opérateurs mesurables $A_n(\zeta)$ tels que $\mathcal{M}(\zeta)$ soit, pour tout ζ , engendré par les opérateurs $A_n(\zeta)$.

THÉORÈME 4. – *Si le champ d'anneaux d'opérateurs $\mathcal{M}(\zeta)$ est mesurable, il en est de même du champ d'anneaux d'opérateurs* $\mathcal{M}(\zeta)'$.

DÉMONSTRATION. – On se ramène au cas d'un compact $K \subset Z$; puis, en séparant les diverses dimensions, au cas d'un compact sur lequel la dimension de $\mathcal{H}(\zeta)$ ne varie pas. Soit e_n une famille mesurable ; soit $A_n(\zeta)$ un système de générateurs mesurables de $\mathcal{M}(\zeta)$; on peut évidemment supposer les $A_n(\zeta)$ uniformément bornés.

D'après LUSIN, K est, à un ensemble de mesure nulle près, la réunion d'une suite croissante de compacts M sur lesquels toutes les fonctions de la forme

$$\langle A_n(\zeta)e_p(\zeta) , e_q(\zeta) \rangle$$

sont continues ; il est clair qu'on peut se borner à examiner ce qui se passe dans un tel compact K'.

Considérons alors l'ensemble E formé des couples (T , ζ) où $\zeta \in K'$ et où T est un opérateur de norme $\leqslant 1$ dans $\mathcal{H}(\zeta)$. La dimension de $\mathcal{H}(\zeta)$ étant constante sur K', soit n, on peut identifier E à l'ensemble produit $K' \times \underset{\sim}{R}_0$, où $\underset{\sim}{R}_0$ est la boule unité de l'anneau $\underset{\sim}{R}$ de tous les opérateurs d'un espace type de dimension n. On munit E de la topologie : produit de celle de K' par la topolige faible de $\underset{\sim}{R}_0$. On obtient ainsi, comme il est facile de le voir, un <u>espace compact métrisable</u>.

Considérons alors le sous-ensemble E' de E formé des (T , ζ) tels que $T \in \underset{\sim}{M}(\zeta)'$; ces (T , ζ) sont caractérisés par les relations

$$\langle TA_n(\zeta)e_p(\zeta) , e_p(\zeta) \rangle = \langle A_n(\zeta)Te_p(\zeta) , e_q(\zeta) \rangle$$

$(n , p , q$ arbitraires), ou encore par

$$\langle A_n(\zeta)e_p(\zeta) , T^*e_q(\zeta) \rangle = \langle Te_p(\zeta) , A_n^*(\zeta)e_q(\zeta) \rangle \qquad (1)$$

au besoin en appliquant une fois de plus Lusin, on peut supposer que tous les champs de vecteurs $A(\zeta)e_p(\zeta)$ et $A_n^*(\zeta)e_p(\zeta)$ sont (fortement) continus ; il résulte de là que l'on peut supposer chaque membre de (1) fonction <u>continue</u> du point (T , ζ) de E ; donc E' est fermé, donc compact et métrisable.

Maintenant, puisque l'ensemble $\underset{\sim}{R}_0$ des opérateurs de norme $\leqslant 1$ est compact et métrisable pour la topologie faible, il possède un système fondamental de voisinages compacts pour cette topologie, soit (V_n). Désignons par E'_n l'ensemble des points $(T , \zeta) \in E'$ pour lesquels $T \in V_n$; c'est encore un compact métrisable, et E' est la réunion des E'_n.

Considérons alors l'application $(T , \zeta) \longrightarrow \zeta$ de E'_n <u>dans</u> K' : elle est continue, et Federer-Morse lui est applicable ; soit $T_n(\zeta)$ une "section" de E'_n, et prolongeons $T_n(\zeta)$ à tout K' en prenant 0 en dehors des points ζ obtenus en projetant E'_n dans K'.

Il est clair que le champ d'opérateurs $T_n(\zeta)$ est mesurable ; pour chaque $\zeta \in K'$, les $T_n(\zeta)$ sont faiblement denses dans l'intersection de $\underset{\sim}{M}(\zeta)'$ avec la boule unité (car, par construction, il existe un $T_n(\zeta)$ dans $\underset{\sim}{M}(\zeta)' \cap V_n$) ; donc les $T_n(\zeta)$ engendrent $\underset{\sim}{M}(\zeta)'$, et le théorème est démontré.

b. Le théorème précédent étant prouvé, von NEUMANN démontre, soit comme conséquence de celui-ci, soit par des procédés analogues, les résultats suivants.

Tout d'abord, soit $\underset{\sim}{M}(\zeta)$ un champ d'anneaux d'opérateurs mesurables ; considérons dans L^2 l'ensemble $\underset{\sim}{M}$ des opérateurs décomposables A pour lesquels on a $A(\zeta) \in \underset{\sim}{M}(\zeta)$ presque partout ; on écrit cette relation sous la forme

$$\underset{\sim}{M} \approx \underset{\sim}{M}(\zeta) \quad ; \tag{2}$$

alors :

THÉORÈME 5. - Pour qu'un anneau d'opérateurs $\underset{\sim}{M}$ défini dans L^2 soit de la forme précédente, il faut et il suffit qu'il contienne $\underset{\sim}{P}$ (opérateurs à composantes scalaires) et soit contenu dans $\underset{\sim}{P}'$. La décomposition (2) est unique à des ensembles de mesure nulle près. La relation (2) implique

$$\underset{\sim}{M}' \approx \underset{\sim}{M}(\zeta)' \ . \tag{3}$$

Si $(\underset{\sim}{M}_n)$ est une famille finie ou dénombrable d'anneaux décomposables :

$$\underset{\sim}{M}_n \approx \underset{\sim}{M}_n(\zeta) \quad ,$$

et si l'on désigne par $\underset{\sim}{M}$ (resp. $\underset{\sim}{M}(\zeta)$) l'intersection des $\underset{\sim}{M}_n$ (resp. $\underset{\sim}{M}_n(\zeta)$), on a

$$\underset{\sim}{M} \approx \underset{\sim}{M}(\zeta) \quad ;$$

la même propriété a lieu en remplaçant l'intersection par l'anneau engendré.

Malgré le caractère "naturel" de ces résultats, il serait tout à fait naïf de croire qu'ils sont triviaux. Ils ont par exemple la conséquence suivante. Considérons dans L^2 une suite (A_n) d'opérateurs décomposables, et cherchons à quelle condition les $A_n(\zeta)$ engendrent, pour presque tout $\zeta \in Z$, un facteur ; pour cela, on désigne par $\underset{\sim}{M}$ l'anneau engendré par les A_n et les opérateurs de la forme T_f ; alors $\underset{\sim}{M}(\zeta)$ est engendré par les $A_n(\zeta)$; dire que les $\underset{\sim}{M}(\zeta)$ sont des facteurs, c'est dire que leur centre (i.e. l'anneau $\underset{\sim}{M}(\zeta) \cap \underset{\sim}{M}(\zeta)'$) est réduit aux scalaires ; par conséquent, la condition cherchée est que le centre de l'anneau $\underset{\sim}{M}$ soit formé uniquement des T_f.

De même, avec les mêmes notations, cherchons à quelle condition les $A_n(\zeta)$ forment, pour presque tout ζ, un système irréductible, c'est-à-dire engendrent l'anneau de tous les opérateurs de $\mathcal{H}(\zeta)$; la condition est que, pour presque tout ζ, l'anneau $\underset{\sim}{M}(\zeta)'$ se réduise aux scalaires ; donc il faut exprimer que, dans L^2, les seuls opérateurs permutables aux A_n et aux T_f sont les T_f eux-mêmes, autrement dit : les T_f forment un sous-anneau commutatif maximal de l'anneau des opérateurs qui permutent aux A_n (théorème de Mautner).

Pour compléter les résultats précédents, il reste à montrer comment, étant donné à l'avance un espace de Hilbert et un anneau d'opérateurs dans cet espace, on peut construire une décomposition de l'espace en somme continue de telle sorte que l'anneau considéré se décompose en facteurs (par exemple). C'est ce qu'on fera dans un troisième exposé. On montrera en outre ceci, qui est fondamental pour les applications de la théorie : si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable, et $\underset{\sim}{M}$ une algèbre autoadjointe séparable pour la topologie UNIFORME (ce qui n'est pas le cas des anneaux) on peut toujours réaliser la décomposition de $\underset{\sim}{M}''$ (en facteurs, ou en représentations irréductibles) de telle sorte que tous les éléments de $\underset{\sim}{M}$ deviennent des champs d'opérateurs CONTINUS, et non pas seulement mesurables. Grâce à cela, on peut étendre d'une manière naturelle le théorème de Bochner (décomposition d'une fonction de type positif en "somme continue" de fonctions élémentaires) à tous les groupes localement compacts séparables.