M.-H. SCHWARTZ

Compte-rendu de travaux de M. Heins sur diverses majorations de la croissance des fonctions analytiques ou sous-harmoniques

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 23, p. 147-151

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__147_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1949)

COMPTE-RENDU DE TRAVAUX DE M. HEINS SUR DIVERSES MAJORATIONS DE LA CROISSANCE DES FONCTIONS ANALYTIQUES OU SOUS-HARMONIQUES

par Mme M.-H. SCHWARTZ

NOTATIONS. - Soit $u(z)$ une fonction sous-harmonique à valeurs réelles dans $]-\infty, +\infty]$, définie dans un domaine Ω du plan complexe $z = x + iy$ (en particulier, $\log|f(z)|$ si $f(z)$ est analytique).

Soit $\sigma(r) = \max u(r\, e^{i\theta})$ (en particulier $\log M(r)$). Sauf indication contraire les limites seront prises pour $r \to \infty$.

1. On the Phragmen-Lindelöf Principle [4].

HYPOTHÈSES :

$u(z)$ est défini pour $x > 0$ et tel que

$$\limsup_{z \to iy} u(z) \leq 0$$

THÉORÈME de Phragmen-Lindelöf. - Si $u(z)$ n'est pas partout négatif, on a :

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{\sigma(r)}{r} = \alpha > 0$$

si, de plus, $\alpha < +\infty$, on a $u(z) \lesssim \frac{4\alpha}{\pi} x$.

Principaux résultats de HEINS. -

1° La limite de $\frac{\sigma(r)}{r}$, soit α, existe toujours et est positive : $(0 \leqslant \alpha \lesssim +\infty)$

2° Si, de plus, $0 < \alpha < +\infty$, on a :

$$u(z) = \alpha x + \varphi(z)$$

$\varphi(z)$ étant une fonction sous-harmonique négative qui, quel que soit $\varepsilon > 0$, est supérieure à $-\varepsilon r$ sur tout le demi-cercle de rayon r sauf peut-être sur un ensemble de mesure angulaire qui tend vers 0.

La démonstration de HEINS repose sur le même principe de majoration que celle du théorème de Phragmen-Lindelöf, mais il est appliqué une seconde fois de manière à obtenir des bornes inférieures.

Les résultats sont valables dans l'espace à n dimensions.

3° Conséquences.

Le quotient $\frac{1}{r}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} u^{+}(r\, e^{i\theta})d\theta$ tend vers $\frac{\pi}{2}\alpha$ (AHLFORS [1] avait montré qu'il était une fonction croissante de r) ([1]).

Le quotient $\frac{1}{r}\left[\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} u^{2}(r\, e^{i\theta})\, d\theta\right]^{1/2}$ tend vers $\alpha\sqrt{\pi/2}$.

Résultats récents de Mme J. LELONG [9], [10].

Il existe une constante γ telle que $\alpha = \gamma^{+}$ ($\gamma^{+} = \sup(\gamma, 0)$) et telle que $\varphi(M)/x \longrightarrow \gamma$ lorsque z tend vers l'infini radialement, sauf peut-être pour un ensemble J de rayons dont la capacité extérieure, comptée sur la sphère unité, est nulle.

La borne supérieure de $\varphi(M)/x$, pour $OM = r$, tend vers γ.

Ces résultats sont exprimés R^{n} ; les résultats de HEINS, exprimés pour $z \in R^{2}$, sont aussi valables pour $z \in R^{n}$. Il n'en sera pas de même pour ses résultats ultérieurs.

2. Entire functions with bounded minimum modulus ; subharmonic functions analogues [7].

HYPOTHÈSES :

u(z) est défini dans tout le plan complexe et non constant $\inf \mu(z) \leqslant 0$ quel que soit r.

Résultat antérieur, comportant comme cas particulier le théorème de Denjoy-Ahlfors pour $n = 1$:

$$\liminf \sigma(r)/\sqrt{r} > 0$$

Résultat principal de HEINS.

La limite de $\sigma(r)/\sqrt{r}$, soit α, existe, et est > 0.

Conséquence : Si Ω est un domaine dont la frontière coupe tous les cercles $|z| = r$ et si, lorsque z tend vers un point frontière, $\limsup u(z) \leqslant 0$, alors, ou bien $u(z) \leqslant 0$ dans Ω, ou bien $\lim \sigma(r)/\sqrt{r} = \alpha$, $0 < \alpha \leqslant +\infty$.

([1]) Voir [6], l'auteur y reprend la méthode d'AHLFORS [1] : inégalités différentielles et convexité par rapport aux fonctions exponentielles qui réalisent l'égalité.

Des exemples sont donnés relativement au cas où $u(z) \leq 0$ dans Ω ; $\sigma(r)/\sqrt{r}$ ou $\sigma(r)/r^{\tau}$ ($\tau > 0$) peuvent ne pas tendre vers 0 mais osciller entre 0 et $-\infty$ ou tendre vers $-\infty$.

La démonstration de HEINS, pour s'appliquer à toutes les fonctions sous-harmoniques, nécessite la généralisation de la formule de Blaschke pour les fonctions d'ordre $\rho < 1$. Pour $\limsup \sigma(r)/r^{\rho} < +\infty$ il établit donc à partir du théorème de F. Riesz (en supposant $u(z)$ harmonique à l'origine) la formule suivante :

$$u(z) = u(0) + \lim_{r \to \infty} \int_{|\zeta| < r} \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu(\zeta)$$

μ étant une mesure positive telle que

$$\mu^{*}(r) = \mu[|\zeta| < r] = O(r^{\rho}) .$$

L'auteur introduit alors la fonction $U(z)$ obtenue en "rabattant" le long des cercles $|z| = r$, toute la masse μ sur l'axe réel négatif. D'une part $U(z)$ permet de retrouver avec M. BRELOT [2] l'inégalité de Millioux-Schmitt d'où HEINS déduit rapidement que l'ordre est au moins 1/2 ; d'autre part $U(z)$ permet de déduire l'existence de la limite de $\sigma(r)/\sqrt{r}$ dans le cas considéré de l'existence de la limite de $\sigma(r)/r$ dans les conditions du théorème de Phragmen-Lindelöf. Dans ses majorations, l'auteur utilise également un raffinement de ce théorème relatif aux grandes valeurs de $-u(z)$ sur l'axe des y.

On conçoit que cette méthode fournisse une démonstration simple du théorème de G. Valiron sur les zéros d'une fonction d'ordre inférieurs à 1, à zéros réels négatifs.

3. The Denjoy-Ahlfors-Carleman Theorem [8].

HYPOTHÈSES :

$u(z)$ sous-harmonique dans le plan et non constant ;

$u(z) \leq 0$ en tous les points de n chemins $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ tendant vers l'infini (et ayant 2 à 2 l'origine pour seul point d'intersection) ;

$u(z)$ atteint une valeur strictement positive dans chacun des domaines Ω_k ayant pour frontières 2 courbes γ consécutives, soit γ_k et γ_{k+1}.

Résultat d'AHLFORS (2) dans le cas des fonctions entières :

$$\liminf \sigma(r)/r^{n/2} = \alpha > 0$$

Résultat de HEINS :

si $\alpha < +\infty$, $u(z)$ est d'ordre $n/2$:

$$\lim \frac{\log \sigma(r)}{\log r} = \frac{n}{2} .$$

L'existence d'une limite pour $\sigma(r)/r^{n/2}$ est présumée dans le cas général, et démontrée dans le cas où $n = 1$ (mémoire [7]) et dans le cas étudié par DENJOY où les γ_k sont des droites : c'est une conséquence immédiate du mémoire [4] ; on a alors angle $\gamma_k \gamma_{k+1} = 2\pi/n$.

La démonstration de HEINS utilise essentiellement, comme celle d'AHLFORS :

1° le Vorzerrungssatz d'Ahlfors (2) sur la représentation conforme d'un domaine tel que Ω sur la bande $|y| < \frac{a}{2}$, $b(r)$ étant un arc convenablement défini intercepté par Ω sur $|z| = r$, et $\theta(r)$ sa mesure angulaire ; ρ et r étant deux rayons de rapport assez grand : la distance des images de $b(\rho)$ et $b(r)$ est supérieure à

$$a \int_{\rho}^{r} \frac{dt}{t\theta(t)} - 4a$$

2° les majorations à l'aide des mesures harmoniques. Mais alors que AHLFORS utilise simplement le théorème de Phragmen-Lindelöf, HEINS utilise la représentation des domaines Ω_k non plus sur le demi-plan mais sur des demi-bandes variables : $x < 0$, $2|y| < a_k(\rho , r)$. $\sigma_k(\rho)$ et $\sigma_k(r)$ étant les maxima de $u(z)$ sur des arcs convenablement définis, interceptés par Ω_k sur les cercles $|z| = \rho$ et $|z| = r$, et $\mu_k(r , \rho)$ étant le maximum de la mesure harmonique dans Ω_k des seconds par rapport aux premiers, on a

$$\sigma_k(\rho) \leq \sigma_k(r)\ \mu_k(\rho , r) .$$

C'est en fonction de μ_k que sera choisi a_k , et une phase essentielle de la démonstration consistera à démontrer que $\lim\limits_{r \to \infty} a_k(\rho , r) = 2\pi/n$.

---

(2) Voir par exemple NEVANLINNA [11] .

L'auteur utilise également une minoration de $\mu(\rho, r)$ en fonction de ρ/r due à BEURLING [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHLFORS (Lars V.). -On Phragmém-Lindelöf's principle, Trans. Amer. math. Soc., t. 41, 1937, p. 1-8.

[2] BRELOT (Marcel). - Quelques applications aux fonctions holomorphes de la théorie moderne du potentiel et du problème de Dirichlet, Bull. Soc. royale Sc. Liège, t. 8, 1939, p. 385-391.

[3] HEINS (Maurice H.). - The problem of Milloux for functions analytic throughout the interior of the unit circles, Amer. J. of Math., t. 67, 1945, p. 213-238.

[4] HEINS (Maurice H.). - On the Phragmen-Lindelöf principle, Trans. Amer. math. Soc., t. 60, 1946, p. 238-244.

[5] HEINS (Maurice H.). - The minimum modulus of a bounded analytic function, Duke math. J., t. 14, 1947, p. 179-215.

[6] HEINS (Maurice H.). - On some theorems associated with the Phragmén-Lindelöf principle, Ann. Acad. scient. Fenn., Series A, I : Math.-Phys., 1948, n° 46, 10 p.

[7] HEINS (Maurice H.). - Entire functions with bounded minimum modulus, Subharmonic function analogues, Ann. of Math., t. 49, 1948, p. 200-213.

[8] HEINS (Maurice H.). - On the Denjoy-Carleman-Ahlfors theorem, Ann. of Math., t. 49, 1948, p. 533-537.

[9] LELONG (Mme J.). - Propriétés des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 226, 1948, p. 1161-1163.

[10] LELONG (Mme J.). - Quelques applications de la theorie de potentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 226, 1948, p. 1333-1335.

[11] NEVANLINNA (Rolf). - Eindeutige analytische Funktionen. - Berlin, Julius Springer, 1936 (Die Grundlehren der math. Wiss., Band 46).

---

(3) Ces trois mémoires ont été précédés par divers autres, en particulier [3] et [5]. L'auteur y étudie le comportement de $m^*(r, f) = \sup_{r \leq \rho \leq 1} \min |f(\rho e^{i\theta})|$.

Si $f(z)$ est analytique et $|f(z)| < 1$ pour $|z| < 1$: $\lim (1-r) \log m^*(r, f)$ existe, les limites 0 et $-\infty$ correspondant respectivement au produit de Blaschke et à la constante 0 .