CLAUDE CHABAUTY

Le théorème de Minkowski-Hlawka

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 2, p. 13-15

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__13_0>

LE THÉORÈME DE MINKOWSKI-HLAWKA

par Claude CHABAUTY

G réseau dans $\mathbb{R}^n$ = sous-groupe discret du groupe additif $\mathbb{R}^n$ de dimension linéaire n, $m(G)$ = mesure du parallélotope défini par les n vecteurs d'une base de G.

Pour un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^n$, on pose $\delta(A) = \inf m(G)$ pour les G tels que

$$G \cap A \subset \{0\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}(A) = \frac{\operatorname{mes}(A)}{\delta(A)} \quad ;$$

$$V(A) = \mathcal{E}_z \quad (\text{ensemble des } z = x - y \text{ , tels que } x \in A \text{ , } y \in A) \text{ ,}$$

$$\Delta(A) = \delta(V(A)) \quad , \quad \eta(A) = \frac{\operatorname{mes}(A)}{\Delta(A)} \text{ .}$$

Un ensemble S est dit étoilé si $p \in S \Longrightarrow \lambda p \in S$ pour tout λ, $0 \leq \lambda \leq 1$; il est dit symétrique si $p \in S \Longrightarrow -p \in S$.

Un ensemble mesurable K est dit jauge s'il est compact convexe symétrique et $m(K) > 0$. On a $S(K) = 2^n \eta(K)$.

Si $f(x)$ est une fonction positive homogène de degré d, $(f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ pour tout λ, $0 \leq \lambda)$, l'ensemble $S = \mathcal{E}_x(f(x) \leq 1)$ est l'ensemble étoilé associé à f ; si f est une norme sur $\mathbb{R}^n$, S est une jauge.

Posons $\mu(f, G) = \inf_{x \in G, x \neq 0} f(x)$ et $\gamma(f) = \sup_G \dfrac{\mu(f, G)}{(m(G))^{1/n}}$, on a

$\gamma(f) = 1/(\Delta(S))^{d/n}$; on note $\gamma(n) = \gamma(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$ (constante d'Hermite)

(son évaluation importante pour la théorie des formes quadratiques, est à l'origine de la géométrie des nombres de Minkowski). Soit B_n la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{mes}(B_n) = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma((1+n)/2)}$, on a donc

$$\gamma(n) = \left\{\frac{\mathcal{E}(B_n)}{\operatorname{mes}(B_n)}\right\}^{2/n} \sim \frac{\eta\{\mathcal{E}(B_n)\}^{2/n}}{\pi e} \text{ .}$$

Pour tout ensemble A, on a trivialement $\eta(A) \leq 1$, donc $\gamma(n) < \dfrac{2n}{\pi e}$ (MINKOWSKI). En tenant compte des "trous" dans les empilements de sphères, BLICHFELD a démontré par un calcul ingénieux et simple :

$$\eta(B_n) \leq \frac{n+2}{2^{(n/2)-1}}$$

donc $\gamma(n) < \frac{n}{\pi e}$. En sens inverse MINKOWSKI ([7] , tome 2, p. 94-95) a démontré par des calculs compliqués que $\varepsilon(B_n) \geq 2\zeta(n)$, donc $\gamma(n) > \frac{n}{2\pi e}$, et a <u>conjecturé</u> ([7] , tome 1, p. 265, 270 et 277) à plusieurs reprises qu'on a $\varepsilon(S) \geq 2\zeta(n)$ pour tout ensemble étoilé symétrique de $\mathbb{R}^n$. Cette conjecture a été démontrée seulement récemment par HLAWKA [2] en 1943, qui montre plus généralement que $\varepsilon(A) \geq 1$ pour tout ensemble de $\mathbb{R}^n$. Depuis on a montré que $2\zeta(n)$ n'était pas la meilleure constante pour les jauges et que pour les sphères $\varepsilon(B_n) > \frac{cn}{2} + 0(n)$ où c est défini par $\log c = 2(1 - 1/c)$, $c = 4{,}92\ldots$ (MAHLER [3] , [4] , ROGERS [9] , DAVENPORT [1]). D'autre part, SIEGEL [10] a donné du résultat de HLAWKA une démonstration montrant mieux son rapport avec la théorie de la réduction arithmétique du groupe modulaire à n variables (ou des formes quadratiques définies positives) comme MINKOWSKI l'avait suggéré.

En effet HLAWKA procède ainsi : si $f(x)$ est une fonction bornée nulle en dehors d'un compact et intégrable-Riemann, il construit un réseau G avec $m(G) = 1$, tel que

$$\sum_{x \in G, x \neq 0} f(x) \leq \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)\, dx + c \qquad \text{pour tout } c > 0 .$$

SIEGEL obtient ce résultat en démontrant que

$$\int_{G \in \Gamma} \Big(\sum_{x \in G, x \neq 0} f(x) \Big)\, dG = \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

en intégrant sur l'espace Γ des réseaux muni de sa mesure naturelle (comme espace homogène). WEIL [11] a bourbakisé la démonstration de SIEGEL en obtenant les résultats comme cas particulier d'une formule d'intégrations répétées dans des espaces homogènes associés à un groupe localement compact. En outre il donne une élégante démonstration, par récurrence, du résultat de Minkowski, que Γ a un volume fini, indépendante de la théorie de la réduction des formes quadratiques.

Enfin, MAHLER [5] , [6] a précisé les résultats de Minkowski sur les réseaux critiques des ensembles étoilés et particulièrement des jauges (G est critique pour A si $m(G) = \delta(A)$ et si $G \cap \mathring{A} = \{0\}$) . Il s'en est servi pour démontrer que pour toute jauge dans R^2 , $\varepsilon(K) \geq 3\sqrt{2} = 3{,}46\ldots$ et que sa valeur minima n'est pas obtenue pour les ellipses ($\varepsilon = 2\pi/\sqrt{3} = 3{,}627\ldots$) contrairement à une conjecture de COURANT (résultat obtenu antérieurement par K. REINHARDT [8]), et

il a fabriqué une jauge plane pour laquelle
$g = (32 - 16\sqrt{2} - 4 \log 2)/(2\sqrt{2} - 1) = 3{,}609 \ldots$ valeur qu'il croit la plus petite possible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DAVENPORT (H.) and ROGERS (C. A.). - Hlawka's theorem in the geometry of numbers, Duke math. J., 1947, p. 367-375.

[2] HLAWKA (Edmund). - Zur Geometrie der Zahlen, Math. Z., t. 49, 1943-44, p. 285-312.

[3] MAHLER (Kurt). - On a theorem of Minkowski on lattice points in non-convex point sets, J. London math. Soc., t. 19, 1944, p. 201-205.

[4] MAHLER (Kurt). - The theorem of Minkowski-Klawka, Duke math. J., t. 13, 1946, p. 611-621.

[5] MAHLER (Kurt). - On the area and densest packing of convex domains, Kon. Ned. Akad. Wetensch., Proc. Sect. Sc., t. 50, 1947, p. 108-118.

[6] MAHLER (Kurt). - On the minimum determinant and the circumscribed hexagons of a convex domain, Kon. Ned. Akad. Wetensch., Proc. Sect. Sc., t. 50, 1947, p. 692-703.

[7] MINKOWSKI (Hermann). - Gesammelte Abhandlungen, Tomes 1 et 2. - Leipzig et Berlin, B. G. Teubner, 1911.

[8] REINHARDT (Karl). - Über die dicheste gitterförnige Legerung kongruenter Bereiche in der Ebene und eine besondere Art konvexer Kurven, Abh. math. Seminar Hamburg. Univ., t. 10, 1934, p. 216-230.

[9] ROGERS (C. A.). - Existence theorems in the geometry of numbers, Annals of Math., Series 2, t. 48, 1947, p. 994-1002.

[10] SIEGEL (Carl Ludwig). - A mean value theorem in geometry of numbers, Annals of Math., Series 2, t. 46, 1945, p. 340-347.

[11] WEIL (André). - Sur quelques résultats de Siegel, Summa brasil. Math., t. 1, 1945/46, p. 21-39.