ROGER GODEMENT

# Sommes continues d'espaces de Hilbert, I

*Séminaire N. Bourbaki*, 1952, exp. nº 19, p. 117-122

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__117_0>

# SOMMES CONTINUES D'ESPACES DE HILBERT, I

par Roger GODEMENT

## 1. Champs de vecteurs continus.

Soit Z un espace localement compact, à chaque point $\zeta$ duquel est attaché un espace de Hilbert $\mathcal{H}(\zeta)$ ; un champ de vecteurs sur Z est une fonction $x(\zeta)$ dont la valeur en $\zeta \in Z$ est un élément de $\mathcal{H}(\zeta)$ .

On rencontre dans la nature des familles $\Lambda$ de champs de vecteurs que nous qualifierons de fondamentales lorsqu'elles vérifient les axiomes suivants :

$(\Lambda_1)$ : $\Lambda$ est un espace vectoriel complexe ;

$(\Lambda_2)$ : pour tout $x \in \Lambda$ , la fonction scalaire $\|x(\zeta)\|$ est continue sur Z ;

$(\Lambda_3)$ : pour chaque $\zeta \in Z$ , les vecteurs $x(\zeta)$ $(x \in \Lambda)$ sont partout denses dans $\mathcal{H}(\zeta)$ .

Lorsqu'une famille fondamentale $\Lambda$ est donnée, on peut définir la notion de champ de vecteurs continu : $x(\zeta)$ sera continu en $\zeta_0$ si, pour tout $\varepsilon > 0$ , il existe $y \in \Lambda$ et un voisinage U de $\zeta_0$ dans Z tels que

$$\zeta \in U \text{ implique } \|x(\zeta) - y(\zeta)\| < \varepsilon .$$

Soit $C_\Lambda$ la famille des champs de vecteurs continus relativement à la famille fondamentale $\Lambda$ ; on a les propriétés suivantes, presque toutes triviales :

a. $C_\Lambda$ est un module sur l'anneau des fonctions scalaires continues ; il est fermé pour la topologie de la convergence compacte ; si $x$ , $y$ sont continus, il en est de même de la fonction scalaire $(x , y)$ ; pour que $x$ soit continu, il est nécessaire et suffisant qu'on puisse l'approcher uniformément sur tout compact par des champs de vecteurs de la forme $\sum f_i(\zeta)x_i(\zeta)$ , où les $x_i \in \Lambda$ et où les $f_i$ sont des fonctions scalaires continues au sens ordinaire. Conséquence de la continuité du produit scalaire : si des $x_i$ continus prennent en $\zeta_0$ des valeurs linéairement indépendantes, il en est de même au voisinage de $\zeta_0$ (écrire le déterminant de Gram). On déduit de là que les $\zeta \in Z$ où $\mathcal{H}(\zeta)$ est de dimension $\leqslant n$ ($n$ fini) forment un fermé ; donc les $\zeta \in Z$ où $\mathcal{H}(\zeta)$ est exactement de dimension $n$ (finie) forment un ensemble localement compact dans Z . Si tous les $\mathcal{H}(\zeta)$ sont séparables, ces conditions sont aussi suffisantes pour être sûr de l'existence d'au moins une famille fondamentale.

b. Théorème de prolongement d'Urysohn : soit un compact $K \subset Z$ ; les restrictions à $K$ des $x \in \Lambda$ forment une famille fondamentale sur $K$, en sorte que l'on sait ce que signifie l'expression "un champ de vecteurs défini et continu sur $K$" ; ceci étant, tout champ de vecteurs défini et continu sur $K$ est prolongeable en un champ de vecteurs défini et continu sur $Z$ tout entier.

Conséquence : il existe toujours un champ de vecteurs continu dont les valeurs en des points donnés (en nombre fini) soient arbitraires.

2. Espaces $L^2_\Lambda(\mu)$.

On part d'une famille fondamentale $\Lambda$ ; on désigne par $\mathcal{L}_\Lambda$ l'ensemble des champs de vecteurs continus et à support compact sur $Z$ (relativement à $\Lambda$). Soit $\mu$ une mesure de Radon positive sur $Z$. Pour un champ de vecteurs arbitraire $x$, posons

$$N_2(x) = \left\{ \overline{\int} \| x(\zeta) \|^2 . \, d\mu(\zeta) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

où le symbole du second membre désigne l'intégrale supérieure par rapport à $\mu$ de la fonction positive $\| x(\zeta) \|$. On dira qu'un champ de vecteurs est de carré sommable relativement à $\Lambda$ et à $\mu$ si l'on peut l'approcher, au sens de la semi-norme $N_2$, par des éléments de $\mathcal{L}_\Lambda$ ; on note $\mathcal{L}^2_\Lambda(\mu)$ l'ensemble de ces champs de vecteurs. C'est évidemment un espace vectoriel ; désignons par $\mathcal{N}$ le sous-espace des champs de vecteurs nuls presque partout, c'est-à-dire tels que $N_2(x) = 0$, et soient $L^2_\Lambda(\mu)$ l'espace quotient $\mathcal{L}^2_\Lambda(\mu)/\mathcal{N}$, et $x \to \tilde{x}$ l'application canonique de $\mathcal{L}^2_\Lambda(\mu)$ sur $L^2_\Lambda(\mu)$ ; alors l'expression

$$\| \tilde{x} \|_2 = N_2(x)$$

est une norme sur $L^2_\Lambda(\mu)$, et on a les théorèmes suivants, parfaitement analogues à ceux qu'on connait pour les fonctions scalaires :

1° $L^2_\Lambda(\mu)$ est un espace vectoriel normé complet ; si des champs de vecteurs $x_n$ de carré sommable vérifient $\sum N_2(x_n) < +\infty$, alors la série $\sum x_n(\zeta)$ est presque partout absolument convergente, sa somme $x(\zeta)$ est un champ de vecteurs de carré sommable, et $\tilde{x}$ est, dans $L^2_\Lambda(\mu)$, la somme de la série de terme général $\tilde{x}_n$.

2° Si $x$ et $y$ sont deux champs de vecteurs de carré sommable, la fonction scalaire $\langle x(\zeta), y(\zeta) \rangle$ est sommable, et l'expression

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \int \langle x(\zeta), y(\zeta) \rangle . \, d\mu(\zeta)$$

permet de munir $L^2_\Lambda(\mu)$ d'une structure d'espace de Hilbert.

REMARQUE. - On peut aussi construire des espaces $L^p$ en introduisant les semi-normes

$$N_p(x) = \left\{ \int \|x(\zeta)\|^p d\mu(\zeta) \right\}^{1/p} ;$$

on a encore le théorème 1 ; on peut aussi étendre le théorème de Lebesgue sur les suites presque partout convergentes et majorées de fonctions sommables etc.

On appellera $L^2_\Lambda(\mu)$ la somme continue (relativement à $\Lambda$ et à $\mu$) des espaces $\mathcal{H}(\zeta)$. Il n'est pas difficile de voir que, lorsque $Z$ est discret et que $\mu$ est formée d'une masse $+1$ placée en chaque point de $Z$, on retrouve la notion habituelle de somme directe (en effet, dans ce cas, tout champ de vecteurs est continu). On peut aussi remplacer les $\mathcal{H}(\zeta)$ par des Banach.

## 3. Champs de vecteurs localement mesurables.

THÉORÈME DE LUSIN. Si un champ de vecteurs $x$ est de carré sommable, pour tout compact $K \subset Z$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K' \subset K$ sur lequel $x$ est continu et qui vérifie $\mu(K \cap \complement K') < \varepsilon$.

Ce théorème se démontre, comme dans le cas classique, en observant que $x$ est la limite, au sens de $L^2_\Lambda(\mu)$, d'une suite de champs de vecteurs continus ; il faut en déduire que cette suite converge uniformément sur des compacts arbitrairement voisins de $K$, ce qui est facile.

On dira qu'un champ de vecteurs $x$ est localement mesurable s'il possède la propriété exprimée par le théorème de Lusin. Ces champs de vecteurs forment un module sur l'anneau des fonctions scalaires mesurables ; le produit scalaire de deux champs de vecteurs mesurables est une fonction mesurable ; si une suite de champs de vecteurs localement mesurables converge presque partout vers un champ de vecteurs $x$, celui-ci est localement mesurable. Enfin pour que $x$ soit de carré (par exemple) sommable, il faut et il suffit que :

a. $x$ soit localement mesurable ;

b. on ait $N_2(x) < +\infty$

## 4. Structure de $L^2_\Lambda(\mu)$.

On va maintenant introduire un axiome supplémentaire de dénombrabilité :

($\Lambda_4$) : il existe une suite $x_n \in \Lambda$ telle que les $x_n(\zeta)$ soient partout denses dans $\mathcal{H}(\zeta)$ quel que soit $\zeta \in Z$ (en fait, il suffirait que ce soit vérifié pour presque tout $\zeta$ seulement, et on pourrait aussi supposer que les $x_n$ sont seulement localement mesurables).

Partons alors de ces $x_n$, et appliquons-leur, pour chaque $\zeta \in Z$, le procédé d'orthonormalisation de Schmidt ; on obtient une suite $e'_n$ de champs de vecteurs qui possède visiblement les propriétés suivantes

a. Tous les $e'_n$ sont localement mesurables ;

b. Pour tout $\zeta \in Z$, les $e'_n(\zeta)$ qui ne sont pas nuls forment une base orthonormale de $\mathcal{H}(\zeta)$.

On va maintenant modifier les $e'_n$ et construire une suite $e_n$ ; tout d'abord, on définit

$e_1(\zeta)$ : dans la suite ordonnée $e'_n(\zeta)$, c'est le premier vecteur non nul ; une fois défini $e_1$, on passe à $e_2$ ;

$e_2(\zeta)$ : parmi les vecteurs de la suite $e'_n(\zeta)$ qui suivent $e_1(\zeta)$, c'est le premier qui ne soit pas nul ; il est clair qu'on peut poursuivre ce procédé indéfiniment, sauf si, à la n-ième opération, on a épuisé tous les vecteurs non nuls de la suite $e'_p(\zeta)$ ; dans cette éventualité, on pose $e_p(\zeta) = 0$ pour $p > n$.

Ces constructions étant effectuées, on voit (mais on ne démontre pas, car ce serait fastidieux) que :

a'. tous les $e_n(\zeta)$ sont mesurables ;

b'. si la dimension de $\mathcal{H}(\zeta)$ est $n(\zeta)$ $(\leqslant +\infty)$, alors les $e_p(\zeta)$ avec $p \leqslant n(\zeta)$ forment une base orthonormale de $\mathcal{H}(\zeta)$, et les autres sont nuls.

Une famille de champs de vecteurs possédant les propriétés a' et b' est appelée par von NEUMANN "famille mesurable" (??). On va maintenant s'en servir pour élucider la structure de $L^2_\Lambda(\mu)$, et montrer comment cette structure peut être rendue triviale par des procédés canoniques (cette dernière précision est essentielle, un espace de Hilbert étant toujours trivial).

PROPOSITION 1. - Soit $e_n$ une famille mesurable ; pour qu'un champ de vecteurs $x$ soit localement mesurable, il faut et il suffit que toutes les fonctions $\langle x(\zeta), e_n(\zeta)\rangle$ le soient.

En effet, l'équation

$$x(\zeta) = \sum \langle x(\zeta), e_n(\zeta)\rangle \cdot e_n(\zeta)$$

montre qu'alors $x$ est la limite d'une suite de champs de vecteurs mesurables.

La proposition 1 exprime l'identité de la mesurabilité "faible" et de la mesurabilité "forte".

Pour $n \leq +\infty$, désignons maintenant par $Z_n$ l'ensemble des $\zeta \in Z$ où $\mathcal{H}(\zeta)$ est de dimension $n$ ; $Z_n$ est localement mesurable (et même localement compact pour $n < +\infty$). Pour chaque $n$, on peut donc définir dans $L^2_\Lambda(\mu)$ un opérateur $E_n$ en posant

$$E_n x(\zeta) = \begin{cases} x(\zeta) & \text{si } \zeta \in Z_n \\ 0 & \text{si } \zeta \notin Z_n \end{cases} ;$$

Il est visible que :

a. les $E_n$ sont des projecteurs deux à deux orthogonaux ;

b. le domaine des valeurs de $E_n$ est le sous-espace $\mathcal{H}_n$ des champs de vecteurs nuls en dehors de $Z_n$, et $L^2_\Lambda(\mu)$ est la somme directe des sous-espaces $\mathcal{H}_n$.

Par suite, tout revient à examiner la structure de l'espace $\mathcal{H}_n$. Pour cela, choisissons une fois pour toutes un prototype $H_n$ pour les espaces de Hilbert de dimension $n$, et prenons, aussi une fois pour toutes, une base orthogonale $a_p$ de $H_n$. Pour $x \in \mathcal{H}_n$, on a

$$\begin{aligned} x(\zeta) &= \sum_{p\leq n} \langle x(\zeta), e_p(\zeta)\rangle \cdot e_p(\zeta) && \text{sur } Z_n, \\ &= 0 && \text{en dehors de } Z_n ; \end{aligned}$$

associons alors à $x$ la fonction

$$x'(\zeta) = \sum \langle x(\zeta), e_p(\zeta)\rangle \cdot a_p$$

à valeurs dans l'espace fixe $H_n$ ; on a

$$\|\tilde{x}\|_2^2 = \int_{Z_n} \|x(\zeta)\|^2 d\mu(\zeta) = \sum_{p\leq n} \int_{Z_n} |\langle x(\zeta), e_p(\zeta)\rangle|^2 d\mu(\zeta) =$$

$$= \int_{Z_n} \|x'(\zeta)\|^2 d\mu(\zeta) .$$

il suit immédiatement de là que $\mathcal{H}_n$ est canoniquement isomorphe (par $x \to x'$) à l'espace des fonctions à valeurs dans $H_n$ qui sont de carré sommable pour $\mu$ sur $Z_n$. Ceci utilise naturellement la proposition 1.

Or ce dernier espace peut être lui aussi trivialisé canoniquement. Désignons en effet par $L^2_C(Z_n)$ l'espace des fonctions scalaires de carré sommable pour $\mu$ sur

$Z_n$ , et construisons le produit tensoriel $L^2_C(Z_n) \otimes H_n$ ; si l'on associe à l'élément $\sum f_i \otimes a_i$ ($f_i \in L^2_C(Z_n)$ , $a_i \in H_n$) la fonction $\sum f_i(\zeta) a_i$ définie sur $Z_n$ , on constate aussitôt qu'on a un isomorphisme des deux espaces en question. En conséquence, on obtient le résultat définitif suivant : une famille mesurable étant choisie, la somme continue $L^2_\Lambda(\mu)$ est canoniquement isomorphe à la somme (discrète) des espaces $L^2_C(Z_n) \otimes H_n$ !

BIBLIOGRAPHIE

[1] GODEMENT (Roger). - Sur la théorie des représentations unitaires, Annals of Math., Series 2, t. 53, 1951, p. 68-124.

[2] von NEUMANN (John). - On rings of operators, Reduction theory, Annals of Math., Series 2, t. 50, 1949, p. 401-485.