Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

JACQUES FARAUT

Semi-groupes de Feller invariants sur les espaces hyperboliques

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 15 (1971-1972), exp. nº 29, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1971-1972__15__A9_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
14e année, 1970-1972, n° 29, 17 p.
25 mai 1972

SEMI-GROUPES DE FELLER INVARIANTS SUR LES ESPACES HYPERBOLIQUES

par Jacques FARAUT

Récemment C. BERG [1] a démontré que, si X est un espace riemannien symétrique de type non compact et de rang 1, à toute forme de Dirichlet sur X, invariante et non nulle, est associé un espace de Dirichlet régulier. Rappelons que cette propriété n'a pas lieu dans le cas des espaces euclidiens. Pour qu'à une forme de Dirichlet invariante sur un espace euclidien corresponde un espace de Dirichlet, il faut et il suffit que l'inverse de la fonction définie négative qui lui correspond soit localement intégrable. C. BERG a démontré que dans le cas des espaces riemanniens symétriques de type non compact et de rang 1, cette condition est toujours vérifiée.

Nous allons présenter une autre forme de ce résultat, et pour simplifier l'exposé, nous nous placerons dans un cadre moins général, ce qui nous permettra de donner des démonstrations complètes qui n'exigent du lecteur aucune connaissance relative aux espaces riemanniens symétriques.

I. Introduction, énoncé du résultat

L'espace hyperbolique réel de dimension n est l'espace homogène $X = G/K$, où G est le groupe de Lorentz $SO_0(1, n)$ $(n \geqslant 2)$ et K le groupe $SO(n)$. Le groupe $SO_0(1, n)$ est la composante connexe de l'identité du groupe $SO(1, n)$ des transformations linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$ de déterminant 1 laissant invariante la forme quadratique

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 .$$

Le groupe $K = SO(n)$ est identifié au sous-groupe de G des transformations laissant Ox_0 fixe. L'espace X peut être identifié à l'ensemble des points $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ vérifiant

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 = 1 , \qquad x_0 > 0 ,$$

c'est la nappe supérieure d'un hyperboloide à deux nappes de révolution autour de Ox_0.

Si f est une fonction définie sur X, et g est un élément de G, nous posons

$$\tau_g f(x) = f(g^{-1} x) .$$

Nous noterons $C_0(X)$ l'espace des fonctions continues sur X tendant vers 0 à l'infini. Muni de la norme uniforme, c'est un espace de Banach.

Un opérateur A sur $C_0(X)$ est dit invariant s'il commute avec les transformations τ_g :

$$\forall\, g \in G\ , \qquad \tau_g\, A = A\, \tau_g\ .$$

Un semi-groupe de **Feller** invariant sur X est une famille $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs invariants positifs sur $C_0(X)$ vérifiant

$$P_0 = I\ , \quad P_t\, P_s = P_{t+s}\, , \ \|P_t\| \leqslant 1$$
$$\forall\, f \in C_0(X)\ , \quad \lim_{t\to 0} \|P_t\, f - f\| = 0\ .$$

Dans cet exposé, nous nous proposons de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME I.1. - Soit $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe de Feller invariant sur X. Si P_t n'est pas identiquement égal à l'identité, le semi-groupe de Feller $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ est intégrable, c'est-à-dire que, pour toute fonction f continue à support compact et positive, la fonction Vf, définie par

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t\, f(x)\, dt\ ,$$

est continue et tend vers 0 à l'infini.

Remarque. - L'espace euclidien considéré comme espace homogène du groupe des déplacements ne possède pas cette propriété. En particulier, en dimension 2, le semi-groupe de Gauss n'est pas intégrable.

Pour démontrer le théorème 1, nous utiliserons quelques propriétés d'analyse harmonique. Nous identifierons les fonctions sur X aux fonctions définies sur G invariantes à droite par K. Avec cette convention, tout opérateur borné invariant A, sur $C_0(X)$, est de la forme

$$Af = f * \mu\ ,$$

où μ est une mesure bornée sur G bi-invariante par K. Nous verrons qu'une telle mesure est symétrique. Nous pouvons considérer μ comme une mesure sur X invariante par K. L'opérateur A prend alors la forme suivante

$$Af(ga) = \int f(gx)\, d\mu(x)\ ,$$

où a est le point $a = (1, 0, 0, \ldots, 0)$.

Si $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe de Feller invariant sur X,

$$P_t\, f = f * \mu_t\ ,$$

où $\{\mu_t\}_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe de mesures positives sur G bi-invariantes par K, c'est-à-dire une famille de mesures positives sur G, bi-invariantes par K, vérifiant

$$\int d\mu_t \leqslant 1 ,$$

$$\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s} ,$$

$$\lim_{t\to 0} \mu_t = m_K \qquad \text{(vaguement)},$$

où m_K désigne la mesure de Haar normalisée de K, considérée comme mesure sur G. Et nous avons

$$P_t\, f(ga) = \int f(gx)\, d\mu_t(x) .$$

II. Fonctions propres de l'opérateur de Laplace

Si x et y sont deux points de $\mathbb{R}^{n+1}$, nous notons

$$[x , y] = x_0\, y_0 - x_1\, y_1 - \dots - x_n\, y_n .$$

La métrique riemannienne, définie sur X par $ds^2 = -[dx , dx]$, est invariante par G. La distance géodésique $r(x , y)$ de deux points x et y de X est donnée par $\operatorname{ch} r(x , y) = [x , y]$.

L'opérateur de Laplace-Beltrami, associé à cette métrique riemannienne, peut être défini de la façon suivante [11] (chap. X, § 5) : Soit f une fonction définie sur X, de classe C^2, et soit F la fonction définie sur le cône ouvert Y de $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid [x , x] > 0 ,\ \ x_0 > 0\}$$

homogène de degré 0, et dont la trace sur X est égale à f. Le laplacien Δf de f est la trace sur X de la fonction

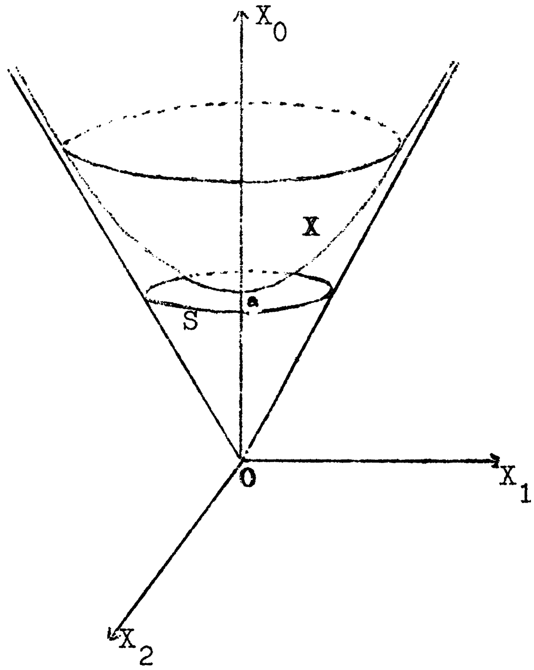
$$- \Box F = - \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} .$$

l'opérateur Δ est invariant, c'est-à-dire qu'il commute avec les transformations τ_g.

Soit F une fonction de classe C^2, définie sur le cône ouvert Y, homogène de degré $-s$ (s est un nombre complexe), et solution de l'équation $\Box F = 0$; la trace f sur X de la fonction F est une fonction propre de l'opérateur Δ :

$$\Delta f + s(n - 1 - s)\, f = 0$$

(cette relation s'obtient en calculant $\Box([x , x]^{s/2}\, F)$).



1. Fonctions sphériques.

Soit u un point de $\underset{\sim}{R}^{n+1}$, tel que

$$u_0 = 1 \ , \ \Sigma_{K=1}^{n} u_K^2 = 1 \ ,$$

c'est-à-dire un point de la sphère S de dimension $n - 1$, de centre a et de rayon 1 , située dans l'hyperplan $x_0 = 1$. Soit F la fonction définie sur le cône ouvert Y par $F(x) = [x , u]^{-s}$ (d'après l'inégalité de Schwarz nous avons $[x , u] > 0$).

La fonction F est homogène de degré $- s$, et est solution de l'équation $\square F=0$, il en résulte que

$$\Delta([x , u]^{-s}) + s(n - 1 - s)[x , u]^{-s} = 0 ,$$

par la suite, la fonction φ_s , définie sur X par

$$\varphi_s(x) = \int_S [x , u]^{-s} \, du ,$$

(du est la mesure sur S , invariante par K et de masse totale 1), est solution de

$$\Delta\varphi_s + s(n - 1 - s) \varphi_s = 0 ,$$

et est invariante par K , de plus $\varphi_s(a) = 1$.

Les fonctions φ_s sont appelées fonctions sphériques (relativement au groupe G

et au sous-groupe K). Posons

$$\lambda_s = s(n-1-s) .$$

PROPOSITION II.1. - Les solutions de $\Delta f + \lambda_s f = 0$, qui sont invariantes par K , sont proportionnelles à φ_s .

Une fonction f sur X , invariante par K , ne dépend que de la distance $r = r(a , x)$ de a à x . Pour une telle fonction, l'opérateur Δ s'écrit

$$\Delta f = (\operatorname{sh} r)^{1-n} \frac{d}{dr}\left[(\operatorname{sh} r)^{n-1} \frac{df}{dr}\right] .$$

Le théorème de Fuchs ([10], p. 203) donne le comportement en 0 des solutions de l'équation différentielle

$$(\operatorname{sh} r)^{1-n} \frac{d}{dr}\left[(\operatorname{sh} r)^{n-1} \frac{df}{dr}\right] + \lambda f = 0 ,$$

toute solution s'écrit $f = A_1 f_1 + A_2 f_2$ avec, quand r tend vers 0

$$f_1(r) \sim 1 ,$$

$$f_2(r) \sim r^{2-n} \quad \text{si} \quad n > 2 ,$$

$$f_2(r) \sim \log r \quad \text{si} \quad n = 2 .$$

Ainsi les solutions de cette équation différentielle, qui admettent une limite en 0 , constituent un espace vectoriel de dimension 1 .

Il s'en suit, puisque $\lambda_s = \lambda_{s-n-1}$, que $\varphi_s = \varphi_{n-1-s}$.

2. Propriété de moyenne des fonctions propres de l'opérateur de Laplace.

PROPOSITION II.2. - Soit f une solution de $\Delta f + \lambda_s f = 0$, alors f vérifie

$$\int_K f(xky)\, dk = f(x)\, \varphi_s(y) .$$

Remarquons que, quand k décrit K , le point xky décrit la sphère de centre x et de rayon $r(0 , y)$. Si $\mathfrak{M}_r f(x)$ désigne la moyenne de la fonction f sur la sphère de centre x et de rayon r , la relation ci-dessus s'écrit

$$\mathfrak{M}_r f(x) = f(x)\, \varphi_s(r) .$$

Démontrons la proposition. Soit f une solution de $\Delta f + \lambda_s f = 0$, pour x fixé dans G , considérons la fonction

$$F(y) = \int_K f(xky)\, dk$$

(dk désigne la mesure de Haar normalisée de K). La fonction F vérifie

$$\Delta F + \lambda_s F = 0 ,$$

et est invariante par K , elle est donc proportionnelle à la fonction sphérique φ_s :

$$F(y) = C\varphi_s(y) ,$$

en prenant $y = a$, nous obtenons $f(x) = C$, d'où le résultat annoncé.

COROLLAIRE II.3. - En particulier si $f = \varphi_s$, nous obtenons la relation fonctionnelle des fonctions sphériques

$$\int_K \varphi_s(xky)\, dk = \varphi_s(x)\, \varphi_s(y) .$$

3. Propriétés des fonctions sphériques.

PROPOSITION II.4. - Si $0 \leq \operatorname{Re} s \leq n - 1$, nous avons $|\varphi_s(x)| \leq 1$.

Puisque $|\varphi_s(x)| \leq \int_S [x , u]^{-\operatorname{Re} s}\, du$, il suffit de considérer le cas où s est réel, $0 \leq s \leq n - 1$. Sur $\underset{\sim}{R}$, l'application

$$s \longmapsto \varphi_s(x) = \int_S [x , u]^{-s}\, du$$

est convexe et vérifie $\varphi_{n-1}(x) = \varphi_0(x) = 1$, d'où le résultat annoncé.

Remarque. - On peut montrer que la fonction sphérique φ_s n'est bornée que si $0 \leq \operatorname{Re} s \leq n-1$ ([9], p. 345).

PROPOSITION II.5. - Si $0 < \operatorname{Re} s < n-1$ nous avons $\lim_{x\to\infty} \varphi_s(x) = 0$.

Soit $r = r(a , x)$ la distance géodésique de x à a . En calculant l'intégrale

$$\varphi_s(x) = \int_S [x , u]^{-s}\, du$$

en coordonnées sphériques, nous obtenons

$$\varphi_s(r) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma((n - 1)/2)} \int_0^{\pi} (\operatorname{ch} r - \cos\theta \operatorname{sh} r)^{-s} \sin^{n-2}\theta\, d\theta . \tag{1}$$

Puisque $|\varphi_s(x)| \leq \varphi_\sigma(x)$, $\sigma = \operatorname{Re} s$, il suffit de montrer la proposition pour s réel, $0 < s < n - 1$. En utilisant la majoration

$$\operatorname{ch} r - \cos\theta \operatorname{sh} r > \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)\, e^r ,$$

nous obtenons, pour $0 < s < (n - 1)/2$, $\varphi_s(r) \leq C_s\, e^{-rs}$, avec

$$C_s = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma((n - 1)/2)}\, 2^s \int_0^{\pi} (1 - \cos\theta)^{-s} \sin^{n-2}\theta\, d\theta ,$$

la proposition est donc démontrée pour $0 < s < (n - 1)/2$. Comme

$$\varphi_{n-1-s}(x) = \varphi_s(x) ,$$

la proposition est également démontrée pour $(n - 1)/2 < s < n - 1$. A cause de la convexité de l'application $s \longmapsto \varphi_s(x)$, nous avons

$$\varphi_{(n-1)/2}(x) \leq \frac{1}{2}\,[\varphi_s(x) + \varphi_{n-1-s}(x)] \;,$$

la proposition est donc aussi démontrée pour $s = (n-1)/2$.

PROPOSITION II.6. - Soit $s = \sigma + i\nu$, nous avons, si $x \neq a$,

$$\lim_{\nu\to\infty} \varphi_{\sigma+i\nu}(x) = 0 \;.$$

Faisons, dans l'intégrale (1), le changement de variable défini par,

$$\operatorname{ch} r - \cos\theta \operatorname{sh} r = e^t \;,$$

nous obtenons

$$\varphi_{\sigma+i\nu}(r) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma((n-1)/2)}\,(\operatorname{sh} r)^{2-n} \int_{-r}^{r} [e^r-e^t)(e^t-e^{-r})]^{(n-3)/2}\, e^{(1-\sigma)t}\, e^{-i\nu t}\, dt$$

Comme fonction de ν , $\varphi_{\sigma+i\nu}(r)$ se présente comme la transformée de Fourier (au sens ordinaire) d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est donc une fonction qui tend vers 0 quand ν tend vers l'infini.

III. Transformation de Fourier sphérique des mesures bornées bi-invariantes

1. L'algèbre de convolution $M^{\natural}(G)$.

Notons $M^{\natural}(G)$ l'algèbre de convolution des mesures sur G bornées et bi-invariantes par K . Nous allons voir que cette algèbre est commutative.

Si f est une fonction définie sur G , nous notons $\check{f}(g) = f(g^{-1})$, et si μ est une mesure sur G , $\check{\mu}$ est la mesure définie par

$$\int f\, d\check{\mu} = \int \check{f}\, d\mu \;.$$

PROPOSITION III.1. - Si f est une fonction, définie sur G , bi-invariante par K , alors f est symétrique, c'est-à-dire $f = \check{f}$.

De même, si μ est une mesure sur G bi-invariante par K , μ est symétrique, $\mu = \check{\mu}$.

Posons :

$$a_t = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \text{ch } t & \text{sh } t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \text{sh } t & \text{ch } t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

$$k_0 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

nous avons $a_t^{-1} = a_{-t} = k_0\, a_t\, k_0$.

Tout élément g de G peut s'écrire $g = k_1\, a_t\, k_2$, où k_1 et k_2 sont deux éléments de K . Si f est une fonction définie sur G , bi-invariante par K , nous avons

$$\begin{aligned} \check{f}(g) &= f(g^{-1}) = f(k_2^{-1}\, a_{-t}\, k_1^{-1}) \\ &= f(a_{-t}) = f(k_0\, a_t\, k_0) = f(a_t) = f(g) \ . \end{aligned}$$

COROLLAIRE III.2. - <u>L'algèbre de convolution</u> $M^{\natural}(G)$ <u>des mesures sur</u> G , <u>bi-invariantes par</u> K <u>et bornées, est commutative</u>.

Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures bornées sur G , nous avons

$$(\mu_1 * \mu_2)^{\vee} = \check{\mu}_2 * \check{\mu}_1 \ ;$$

en effet,

$$\begin{aligned} \int f\, d(\mu_1 * \mu_2)^{\vee} &= \iint \check{f}(xy)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \\ &= \iint f(y^{-1}\, x^{-1})\, d\mu_1(x)\, d\mu_2(y) \\ &= \int f\, d(\check{\mu}_2 * \check{\mu}_1) \ . \end{aligned}$$

Si, de plus, μ_1 et μ_2 sont bi-invariantes par K , il en est de même de $\mu_1 * \mu_2$, d'où

$$\mu_1 * \mu_2 = \check{\mu}_1 * \check{\mu}_2 = (\mu_2 * \mu_1)^{\vee} = \mu_2 * \mu_1 \ .$$

2. Transformation de Fourier sphérique des mesures bornées bi-invariantes (1).

La transformée de Fourier sphérique d'une mesure, bornée sur G, bi-invariante par K, est la fonction $\hat{\mu}$, définie sur

$$\{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant n-1\}$$

par $\hat{\mu}(s) = \int \varphi_s(x)\, d\mu(x)$. La fonction $\hat{\mu}$ est continue et bornée, holomorphe dans

$$\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}\, s < n-1\} ,$$

et puisque $\varphi_{n-1-s} = \varphi_s$, elle vérifie

$$\hat{\mu}(n-1-s) = \hat{\mu}(s) .$$

PROPOSITION III.3. - <u>La transformation de Fourier sphérique transforme le produit de convolution en produit simple : si</u> μ_1 <u>et</u> μ_2 <u>sont deux mesures de</u> $M^{\natural}(G)$,

$$\widehat{\mu_1 * \mu_2}(s) = \hat{\mu}_1(s)\, \hat{\mu}_2(s) .$$

En effet,

$$\widehat{\mu_1 * \mu_2}(s) = \iint \varphi_s(xy)\, d\mu_1(x)\, d\mu_2(y)$$

à cause de l'invariance de μ_2 par K, pour tout k de K,

$$\widehat{\mu_1 * \mu_2}(s) = \iint \varphi_s(xky)\, d\mu_1(x)\, d\mu_2(y)$$

et par suite

$$\widehat{\mu_1 * \mu_2}(s) = \int_X \int_X \left[\int_K \varphi_s(xky)\, dk\right] d\mu_1(x)\, d\mu_2(y) ,$$

en utilisant la relation fonctionnelle des fonctions sphériques (corollaire II.3), nous obtenons

$$\begin{aligned}\widehat{\mu_1 * \mu_2}(s) &= \int_X \varphi_s(x)\, d\mu_1(x) \int_X \varphi_s(y)\, d\mu_2(y) \\ &= \hat{\mu}_1(s)\, \hat{\mu}_2(s)\end{aligned}$$

3. Quelques propriétés des transformées de Fourier sphériques de mesures.

PROPOSITION III.4. - <u>Soit</u> μ <u>une mesure sur</u> G <u>bornée et bi-invariante par</u> K. <u>Si</u> $0 \leqslant \sigma \leqslant n-1$,

$$\lim_{\nu \to \infty} \hat{\mu}(\sigma + i\nu) = \mu(K) .$$

En effet, d'après la proposition II.6, si x n'appartient pas à K,

$$\lim_{\nu \to \infty} \varphi_{\sigma + i\nu}(x) = 0$$

(1) Pour un exposé général de la transformation de Fourier sphérique, voir l'exposé de GANGOLLI dans [8], p. 41.

le résultat annoncé est alors une conséquence du théorème de convergence dominée.

PROPOSITION III.5. - Soit μ une mesure sur G bornée et bi-invariante par K, de plus, μ est positive, $\int d\mu \leqslant 1$, $\mu \neq m_K$. Si $0 < \sigma < n-1$,

$$\sup_{\nu \in \underset{\sim}{R}} \hat{\mu}(\sigma + i\nu) < 1 .$$

LEMME. - Si $0 < \operatorname{Re} s < n-1$, $\{x \mid \varphi_s(x) = 1\} = K$.

Pour un tel s , d'après la proposition II.5,

$$\lim_{X \to \infty} \varphi_s(x) = 0 ,$$

donc l'ensemble $H = \{x \mid \varphi_s(x) = 1\}$ est compact. D'après la relation fonctionnelle (corollaire II.3),

$$\int_K \varphi_s(xky)\, dk = \varphi_s(x)\, \varphi_s(y) ,$$

et d'après l'inégalité (proposition II.4), $|\varphi_s(x)| \leqslant 1$; si deux points x et y sont dans H , leur produit xy est également dans H . De plus, la fonction φ_s , étant bi-invariante par K , est symétrique $\varphi_s(x) = \varphi_s(x^{-1})$, donc H est un sous-groupe compact de G contenant K . Or K est un sous-groupe compact maximal de G , donc $H = K$.

Démontrons maintenant la proposition. Supposons qu'il existe $s_0 = \sigma + i\nu_0$ tel que $\hat{\mu}(s_0) = 1$, c'est-à-dire $\int \varphi_{s_0}(x)\, d\mu(x) = 1$, on aurait alors

$$\operatorname{Supp}(\mu) \subset \{x \mid \varphi_{s_0}(x) = 1\} = K ,$$

et puisque la mesure μ est bi-invariante par K , on aurait $\mu = m_K$.

La proposition est donc démontrée puisque, d'après la proposition III.2,

$$\lim_{\nu \to \infty} \hat{\mu}(\sigma + i\nu) = \mu(K) < 1 .$$

IV. Formule de Plancherel

Soit f une fonction continue sur G , à support compact et bi-invariante par K . Nous pouvons la considérer comme une fonction sur X , invariante par K . La transformée de Fourier sphérique de f est la fonction $\hat{f}$, définie par

$$\hat{f}(s) = \int_X \varphi_s(x)\, f(x)\, dx ,$$

où dx désigne la mesure sur X invariante par G , définie par la forme différentielle $x_0^{-1}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$.

PROPOSITION IV. 1. - Il existe sur $[0, \infty[$ une mesure positive m telle que, pour toute fonction f continue à support compact sur G, bi-invariante par K,

$$\int |f(x)|^2\, dx = \int_{[0,\infty[} |\hat{f}(((n-1)/2) + i\nu)|^2\, dm(\nu) .$$

La mesure m est appelée mesure de Plancherel.

De plus, si nous posons

$$\tilde{f}(\nu) = \hat{f}(((n-1)/2) + i\nu) ,$$

l'application $f \longmapsto \tilde{f}$ se prolonge en un isomorphisme de $L^{2\natural}(G)$ sur $L^2([0,\infty[,m)$, où $L^{2\natural}(G)$ désigne l'espace des fonctions de carré intégrable sur G, bi-invariantes par K. C'est la transformation de Fourier-Plancherel sphérique ([9], p. 331).

(a) Dans une première étape, nous montrerons qu'il existe une mesure m sur $[0\,,\infty[$, telle que si f est une fonction de classe C^∞ sur G, à support compact, et bi-invariante par K,

$$f(e) = \int_{[0,\infty[} \hat{f}(((n-1)/2) + i\nu)\, dm(\nu) .$$

La fonction f peut être considérée comme une fonction définie sur X ne dépendant que de x_0. En utilisant la formule

$$\varphi_s(x) = \int_S [x\,,u]^{-s}\, du ,$$

nous obtenons

$$\hat{f}(s) = \int f(x_0)[x\,,u]^{-s}\, x_0^{-1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n .$$

Cette intégrale étant indépendante de u, nous pouvons choisir $u = (1,1,0,\ldots 0)$. Pour le calcul de cette intégrale, posons $x_1 = x_0 - e^t$, nous avons

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx_0 - e^t\, dt \\ &= x_0^{-1}(x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + \ldots + x_n\, dx_n) - e^t\, dt \\ &= e^{-t}(x_2\, dx_2 + \ldots + x_n\, dx_n) - x_0\, dt \end{aligned}$$

d'où

$$x^{-1}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n = -\, dt \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n ;$$

d'autre part, $x_0 = \operatorname{ch} t + \frac{1}{2} e^{-t}(x_2^2 + \ldots + x_n^2)$, d'où finalement

$$\hat{f}(s) = \int f[\operatorname{ch} t + \tfrac{1}{2} e^{-t}(x_2^2 + \ldots + x_n^2)]\, e^{-st}\, dx_2 \ldots dx_n\, dt$$

et en posant $y_k = e^{-t/2} x_k$, $2 \leqslant k \leqslant n$,

$$\hat{f}(((n-1)/2) + i\nu) = \int f[\operatorname{ch} t + \tfrac{1}{2}(y_2^2 + \ldots + y_n^2)]\, e^{-i\nu t}\, dy_2 \ldots dy_n\, dt .$$

Si nous posons

$$F_f(t) = \int f[\operatorname{ch} t + \tfrac{1}{2}(y_2^2 + \ldots + y_n^2)]\, dy_2 \ldots dy_n$$

nous obtenons

$$\hat{f}(((n-1)/2) + i\nu) = \int F_f(t)\, e^{-i\nu t}\, dt \;.$$

Ainsi la transformation de Fourier sphérique se présente comme la composée de deux transformations, la deuxième étant la transformation de Fourier classique.

Nous allons terminer la démonstration dans les cas particuliers $n = 2$ et $n = 3$.

Pour $n = 2$, nous avons

$$F_f(t) = G(\operatorname{ch} t) = 2\int_0^\infty f(\operatorname{ch} t + \frac{1}{2}y^2)\, dy \;.$$

C'est l'équation d'Abel. Si nous supposons que f est de classe C^∞, nous avons

$$\begin{aligned} f(1) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty G'(1 + \frac{1}{2}r^2)\, dr \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty G'(\operatorname{ch} t)\, \operatorname{ch}\frac{t}{2}\, dt \end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto G(\operatorname{ch} t)$ est une fonction paire de classe C^∞ à support compact dans la transformée de Fourier classique est la fonction $\nu \longmapsto f(\frac{1}{2} + i\nu)$, d'où

$$G(\operatorname{ch} t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(\frac{1}{2} + i\nu)\cos \nu t\, d\nu$$

$$G'(\operatorname{ch} t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(\frac{1}{2} + i\nu)\,\frac{\sin \nu t}{\operatorname{sh} t}\,\nu\, d\nu \;,$$

et par suite,

$$f(1) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \hat{f}(\frac{1}{2} + i\nu)\,\frac{\sin \nu t}{\operatorname{sh} t/2}\,\nu\, d\nu\, dt \;.$$

Or

$$\int_0^\infty \frac{\sin \nu t}{\operatorname{sh} t/2}\, dt = \pi \operatorname{th} \pi\nu \;,$$

d'où finalement

$$f(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \hat{f}(\frac{1}{2} + i\nu)\,\nu \operatorname{th} \pi\nu\, d\nu \;.$$

Pour $n = 3$, nous avons

$$F_f(t) = G(\operatorname{ch} t) = 2\pi\int_0^\infty f(\operatorname{ch} t + \frac{1}{2}r^2)\, r\, dr$$

et si nous supposons que f est de classe C^∞, $f(1) = -\frac{1}{2\pi}G'(1)$, or

$$G(\operatorname{ch} t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(1 + i\nu)\cos \nu t\, d\nu \;,$$

$$G'(1) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(1 + i\nu)\,\nu^2\, d\nu \;,$$

d'où finalement

$$f(1) = {}_{2\pi^2}\int_0^\infty \hat{f}(1 + i\nu)\,\nu^2\, d\nu \;.$$

(b) Démontrons maintenant la proposition IV.1. Soit f une fonction de classe C^∞ sur G , à support compact, et bi-invariante par K . Posons

$$g(x) = \int_G f(yx)\,\overline{f(y)}\,dy \;,$$

nous avons

$$g(e) = \int |f(y)|^2\,dy$$

et

$$\hat{g}(((n-1)/2) + i\nu) = |\hat{f}(((n-1)/2) + i\nu)|^2 \;,$$

en utilisant le résultat démontré en (a), nous obtenons

$$\int |f(y)|^2\,dy = \int_{[0,\infty[} |\hat{f}(((n-1)/2) + i\nu)|^2 dm(\nu) \;.$$

D'autre part, on peut montrer que l'application $f \longmapsto F_f$ est un isomorphisme de l'espace des fonctions de classe C^∞ sur G , à support compact, et bi-invariantes par K sur l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à support compact et paires. Notons

$$\tilde{f}(\nu) = \hat{f}(((n-1)/2) + i\nu) \;.$$

Il résulte de ce qui précède que l'application $f \longmapsto \tilde{f}$ se prolonge en un isomorphisme de $L^{2\natural}(G)$ sur $L^2([0\,,\infty[\,,\,m)$.

V. Semi-groupes de mesures et fonctions définies négatives

Soit $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de mesures positives sur G , bi-invariantes par K , c'est-à-dire une famille de mesures sur G , bi-invariantes par K , vérifiant

$$\int d\mu_t \leq 1 \;,$$

$$\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s} \;, \quad \mu_0 = m_K \;,$$

$$\lim_{t\to 0} \mu_t = m_K \qquad \text{(vaguement).}$$

Soit $\hat{\mu}_t$ la transformée de Fourier sphérique de la mesure μ_t . Pour

$$s = ((n-1)/2) + i\nu \;,$$

ν réel, la fonction φ_s est réelle, et tend vers 0 à l'infini. Par suite, la fonction f , définie sur $[0\,,\infty[$ par $f(t) = \hat{\mu}_t(((n-1)/2) + i\nu)$, est réelle, continue en 0 , et vérifie

$$f(t+s) = f(t)\,f(s) \;, \qquad |f(t)| \leq 1 \;,$$

il en résulte qu'il existe un nombre $q(\nu)$, positif ou nul, tel que

$$\hat{\mu}_t(((n-1)/2)+i\nu) = e^{-tq(\nu)} ,$$

la fonction q est continue sur $\underset{\sim}{R}$, positive ou nulle, et paire.

DÉFINITION V.1 ([1], p. 13). - Une fonction q associée de cette façon à un semi-groupe de mesures positives sur G , bi-invariantes par K , est appelée fonction définie négative.

PROPOSITION V.1 ([1], p. 22). - Si q est une fonction définie négative, non identiquement nulle, alors $\inf_{\nu\in\underset{\sim}{R}} q(\nu) > 0$.

La fonction q est associée à un semi-groupe de mesures $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$. Par hypothèse, il existe $t > 0$ tel que $\mu_t \neq m_K$, et, d'après la proposition III.5, nous avons pour un tel t

$$\sup \hat{\mu}_t(((n-1)/2)+i\nu) < 1$$

et puisque $\hat{\mu}_t(((n-1)/2)+i\nu) = e^{-tq(\nu)}$, le résultat annoncé s'en déduit.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème énoncé au début de cet exposé :

THÉORÈME I.1. - Soit $\{P_t\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Feller invariant sur X . Si P_t n'est pas identiquement égal à l'identité, le semi-groupe de Feller $\{P_t\}_{t\geq 0}$ est intégrable, c'est-à-dire que, pour toute fonction f continue, à support compact et positive, la fonction Vf définie par $Vf(x) = \int_0^\infty P_t\, f(x)\, dt$ est continue, et tend vers 0 à l'infini.

Nous avons $P_t\, f = f * \mu_t$, où $\{\mu_t\}$ est un semi-groupe de mesures positives sur G , bi-invariantes par K . Soit q la fonction définie négative qui lui est associée, d'après la proposition V.1, il existe une constante positive α telle que $q(\nu) \geq \alpha > 0$.

Soit f une fonction continue sur G , à support compact, bi-invariante par K , et positive. Il résulte de la formule de Plancherel que nous avons

$$\int_G (f * f)\, d\mu_t = \int_{[0,\infty[} |\tilde{f}(\nu)|^2\, e^{-tq(\nu)}\, dm(\nu)$$

et par suite

$$\int_0^\infty [\int (f * f)\, d\mu_t]\, dt = \int |f(\nu)|^2 \frac{1}{q(\nu)}\, dm(\nu) \leq \frac{1}{\alpha} \int |f(\nu)|^2\, dm(\nu) ,$$

cela montre qu'il existe une mesure de Radon positive K sur G , bi-invariante par $\mathcal{K}$, telle que

$$\mathcal{K} = \int_0^\infty \mu_t \qquad \text{(intégrale vague).}$$

Si f est une fonction continue sur G , à support compact, et bi-invariante par K , posons $h(\nu) = 1/q(\nu)\, \tilde{f}(\nu)$; la fonction h appartient à $L^2([0\,,\infty[\,,m)$, il existe donc, d'après la proposition IV.1, une fonction F de $L^{2\natural}(G)$ telle que $h(\nu) = \tilde{F}(\nu)$. Pour toute fonction g , continue sur G , à support compact, et bi-invariante par K , d'après la formule de Plancherel,

$$\int (f * \mathcal{K})(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \int F(x)\, \overline{g(x)}\, dx ,$$

donc $F = f * \mathcal{K}$, et

$$\|f * \mathcal{K}\|_2 < \frac{1}{\alpha} \|f\|_2 .$$

Si f et g sont deux fonctions continues sur G , à supports compacts et bi-invariantes par K , la fonction $f * g * \mathcal{K}$ est une fonction continue sur G qui tend vers 0 à l'infini, comme produit de convolution de deux fonctions de carré intégrable.

Soit f une fonction continue positive sur X à support compact, elle peut être majorée par une fonction de la forme $f_1 * f_2$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions continues positives sur X à support compact, invariantes par K , ainsi $f * \mathcal{K}$ tend vers 0 à l'infini, d'où le résultat annoncé, car $Vf = f * \mathcal{K}$.

Remarques.

1° Il est possible de donner la forme explicite du générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller invariant. Soit $(D_A\,, A)$ un tel générateur, son domaine D_A contient l'espace des fonctions de classe C^2 à support compact. Pour une telle fonction f , nous avons

$$Af(x) = a\Delta f(x) - cf(x) + \int_{]0,\infty[} [\mathfrak{M}_r f(x) - f(x)]\, d\sigma(r) ,$$

où a et c sont deux constantes positives ou nulles, σ est une mesure positive sur $]0\,,\infty[$, telle que

$$\int \frac{r^2}{1 + r^2}\, d\sigma(r) < \infty .$$

Δ est l'opérateur de Laplace, et $\mathfrak{M}_r f(x)$ est la moyenne de la fonction f sur la sphère de rayon r et de centre x . C'est un cas particulier d'un théorème de HUNT ([5], p. 290).

De cette formule se déduit la représentation des fonctions définies négatives :

$$q(\nu) = a[((n-1)/2)^2 + \nu^2] + c + \int_{]0,\infty[} [1 - \varphi_{((n-1)/2)+i\nu}(r)]\, d\sigma(r) ;$$

c'est un cas particulier de la formule de Lévy-Khinčin, démontrée par GANGOLLI ([2], p. 235).

2° Soit V une application linéaire positive de l'espace $C_K(X)$ des fonctions continues à support compact dans $C_0(X)$. Si V est invariante, et vérifie le principe complet du maximum, on peut montrer que V est un noyau de Hunt, c'est-à-dire qu'il existe un semi-groupe de Feller invariant $\{P_t\}_{t\geq 0}$ tel que, pour toute fonction f de $C_K(X)$,

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t\, f(x)\, dt .$$

La démonstration utilise le théorème de Hunt-Lion (voir [7], p. 403, et [4] p. 137) et le fait que K est un sous-groupe compact maximal de G.

3° Un noyau de Hunt invariant V se prolonge en un opérateur borné sur $L^2(X)$. Soit $\{P_t\}_{t\geq 0}$ le semi-groupe de Feller invariant associé à V, nous avons

$$P_t\, f = f * \mu_t ,$$

où $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de mesures positives, bi-invariantes par K, soit $\mathcal{K}$ la mesure de Radon positive, bi-invariante par K, définie par $\mathcal{K} = \int_0^\infty \mu_t\, dt$, nous avons $Vf = f * \mathcal{K}$.

Soit q la fonction définie négative associée à $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$:

$$\hat{\mu}_t(((n-1)/2) + i\nu) = e^{-tq(\nu)} ;$$

posons $\alpha = \inf_{\nu\in\mathbb{R}} q(\nu)$, nous avons $\alpha > 0$ (proposition V.1) et la norme de V opérant sur $L^2(X)$ est égale à $1/\alpha$.

Il est remarquable que, bien que la mesure $\mathcal{K}$ ne soit pas bornée en général, l'opérateur V se prolonge en un opérateur borné sur $L^2(X)$. Ce résultat doit être rapproché du phénomène de Kunze-Stein ([6], p. 52, voir aussi [3]).

Exemples. - L'opérateur de Laplace Δ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller invariant qui, d'après le théorème I.1, est intégrable pour tout $n \geq 2$. Le noyau de Hunt associé est de la forme

$$Vf(x) = \int_X k[r(x\,,\,y)]\, f(y)\, dy ;$$

pour $n = 2$, nous avons

$$k(r) = \frac{1}{2\pi} \log \cot h\, \frac{r}{2} ,$$

et pour $n = 3$,

$$k(r) = \frac{1}{4\pi} (\cot h\, r - 1) .$$

La mesure $\mathcal{K}$, qui lui est associée, n'est pas bornée. Nous avons en effet, pour $n = 2$,

$$\int d\mathcal{K} = 2\pi \int_0^\infty k(r)\, \mathrm{sh}\, r\, dr = \infty .$$

La fonction définie négative associée à ce semi-groupe est

$$q(\nu) = ((n-1)/2)^2 + \nu^2 ,$$

nous avons $\alpha = \inf_{\nu \in \mathbb{R}} q(\nu) = ((n-1)/2)^2$, et la norme de l'opérateur $\tilde{V}$ opérant sur $L^2(X)$ est égale à $1/\alpha = ((n-1)/2)^{-2}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERG (C.). - Dirichlet forms on symmetric spaces. - København, Københavns Universitets, Matematisk Institut, 1972 (Preprint Series, 6).

[2] GANGOLLI (R.). - Isotropic infinitely divisible measures on symmetric spaces, Acta Math., Uppsala, t. 111, 1964, p. 213-246.

[3] HERZ (C.). - Sur le phénomène de Kunze-Stein, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, Série A, p. 491-493.

[4] HIRSCH (F.). - Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 22, 1972, fasc. 1, p. 89-210 (Thèse Sc. math. Paris, 1971).

[5] HUNT (G. A.). - Semi-groups of measures on Lie groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 81, 1956, p. 264-293.

[6] KUNZE (R. A.) and STEIN (E. M.). - Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 1-62.

[7] LION (G.). - Familles d'opérateurs et frontières en théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 2, p. 389-453.

[8] Symmetric spaces. - New York, M. Dekker, 1972 (Pure and applied Mathematics. Dekker, 8).

[9] TAKAHASHI (R.). - Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés, Bull. Soc. math. de France, t. 91, 1963, p. 289-433.

[10] VALIRON (G.). - Equations fonctionnelles, applications, 2e édition. - Paris, Masson, 1950.

[11] VILENKIN (N. J.). - Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes. - Paris, Dunod, 1969 (Monographies universitaires de Mathématiques, 33).

(Texte reçu le 4 mai 1973)

Jacques FARAUT
Université de Strasbourg
Mathématiques
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX