

# SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

J. C. TAYLOR

**Le compactifié de Martin d'un domaine Lipschitzien borné dans  $R^n$**

*Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel*, tome 15 (1971-1972), exp. n° 27, p. 1-3

[http://www.numdam.org/item?id=SB CD\\_1971-1972\\_\\_15\\_\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB CD_1971-1972__15__A7_0)

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LE COMPACTIFIÉ DE MARTIN D'UN DOMAINE LIPSCHITZIEN BORNÉ DANS  $R^n$

par J. C. TAYLOR

Introduction. - Dans [3], R. A. HUNT et R. L. WHEEDEN ont démontré le résultat suivant.

THÉORÈME. - Soit  $D \subset R^n$  un domaine lipschitzien borné. On démontre que  
1° la fermeture  $\bar{D}$  coïncide avec le compactifié de Martin du domaine  $D$ ,  
2° chaque point de la frontière de Martin est minimal.

Ici nous exposons une démonstration de ce théorème qui diffère par quelques détails de celle de [3].

1. Le compactifié de Martin.

Soient  $D \subset R^n$  un domaine borné, et  $G(W, Z)$  la fonction de Green du domaine  $D$ , défini pour le faisceau harmonique classique (c'est-à-dire correspondant à l'opérateur de Laplace).

Soit  $W_0 \in D$  et soit

$$K(W, Z) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z = W = W_0 \\ (G(W, Z))/(G(W_0, Z)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $K_W^*(Z) = K_Z(W) = K(W, Z)$ .

DÉFINITION 1.1. - Le compactifié de Martin du domaine  $D$  est le compactifié  $\tilde{D}$  tel que

- 1° toutes les fonctions  $K_W$ ,  $W \in D$ , se prolongent continûment à  $\tilde{D} \setminus \{W, W_0\}$ ,
- 2° leurs prolongements séparent les points de  $\tilde{D} \setminus D$ .

PROPOSITION 1.2. - Il existe une application continue unique  $j : \tilde{D} \rightarrow D$  telle que  $j(x) = x$ ,  $\forall x \in D$ , si et seulement si, chaque suite  $(y_n) \subset D$  convergente dans  $\tilde{D}$  converge dans  $\bar{D}$ .

2. Le lemme de Carleson ([2], p. 398).

THÉORÈME 2.1. [CARLESON]. - Soient  $D$  un domaine lipschitzien borné dans  $R^n$ , et  $W_0 \in D$ .

Soient  $\bar{z} \in \partial D$  et  $U$  un voisinage de  $\bar{z}$  dans  $R^n$ .

Il existe alors

1° des voisinages relativement compacts de  $\bar{z}$  (dans  $R^n$ ),  $U_i$ , tels que

$$U_1 \subset \bar{U}_1 \subset U_2 \subset \bar{U}_2 \subset U_3 \subset \bar{U}_3 \subset U$$

2° une constante  $L_1 = L_1(U_1, U_2, U_3)$  telles que

$$u(W) \leq L_1 u(W_0), \quad \forall W \in D \setminus \bar{U}_2$$

pour toute fonction  $u$  qui

(a) est surharmonique sur  $D$  et harmonique dans  $D \setminus \bar{U}_1$  ;

(b) s'annule continûment sur  $\partial D \setminus \bar{U}_1$ .

COROLLAIRE 2.2. - Il existe une application continue unique surjective

$$j : \tilde{D} \rightarrow \bar{D}$$

avec  $j(x) = x$ ,  $\forall x \in D$ .

DÉFINITION 2.3. - Une fonction  $h \geq 0$  et harmonique est dite une fonction de Bouligand associée à  $\bar{z} \in \partial D$  si  $h \neq 0$ , et si  $h$  s'annule continûment sur  $\partial D \setminus \{\bar{z}\}$ .

COROLLAIRE 2.4. - Pour chaque  $\bar{z} \in \partial D$ , il existe au moins une fonction de Bouligand associée.

COROLLAIRE 2.5. - Soient  $A_1, A_2 \subset \partial D$  deux compacts disjoints. On a alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , un voisinage  $\theta$  de  $A_2$  tel que

$$h(W) \leq \varepsilon h(W_0), \quad W \in \theta \cap D$$

pour toute fonction de Bouligand  $h$  associée à  $\bar{z} \in A_1$ .

COROLLAIRE 2.6. - Soient  $\bar{z} \in D$ , et  $h$  une fonction de Bouligand associée à  $\bar{z}$ . On a alors

$$h(W) = \int K(W, \tilde{z}) \mu(d\tilde{z}), \quad \mu \in \mathcal{M}^+(\tilde{D} \setminus D)$$

qui implique que  $\mu$  est portée par  $j^{-1}\{\bar{z}\}$ . Par conséquent, à tout  $\bar{z} \in \partial D$ , il existe une fonction de Bouligand minimale associée

$$K(W, \tilde{z}) = \lim_{Z_n \rightarrow \tilde{z}} K(W, Z_n), \quad (Z_n) \subset D.$$

3. Le lemme de Hunt et Wheeden ([3] lemme 3.2).

PROPOSITION 3.1. - Soient  $D$  un domaine lipschitzien borné dans  $R^n$ , et  $\bar{Z} \in \partial D$ . Il existe alors une constante  $L_2$  telle que, pour tout couple  $(h, k)$  de fonctions de Bouligand associées à  $\bar{Z}$ , on ait

$$h \leq L_2 k .$$

Remarque. - Il suffit de démontrer ce résultat pour les domaines "starlike" parce que, pour tout voisinage  $U$  de  $\bar{Z}$  et toute fonction de Bouligand  $h$  associée à  $\bar{Z}$ ,  $\hat{R}_{C_U} h$  est un potentiel.

COROLLAIRE 3.2. - La fonction  $j$  du corollaire 2.2 est un homéomorphisme. Autrement dit,  $\tilde{D} = \bar{D}$ . Par conséquent, tous les points frontière sont minimaux.

4. Remarque.

Le lemme de Carleson donne une espèce d'inégalité de Harnack "jusqu'à la frontière". BRELOT ([1], p. 217) a donné une autre condition frontière qui implique le théorème 2.1.

PROPOSITION 4.1. - Soit  $D$  un domaine borné régulier avec la propriété suivante :

$\forall Z \in \partial D$ , il existe une boule  $B$  (fermée) telle que l'inverse par rapport à  $\partial B$  de  $D \cap B$  est contenu dans  $D$ .

On voit alors que le théorème 2.1 est valable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRELOT (M.). - Etude générale des fonctions harmoniques et surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier, Annales Univ. Grenoble, Nouvelle Série, t. 22, 1946, p. 205-219.
- [2] CARLESON (L.). - On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables, Ark. for Mat., t. 4, 1962, p. 393-399.
- [3] HUNT (R. A.) and WHEEDEN (R. H.). - Positive harmonic functions on Lipschitz domains, Trans. Amer. math. Soc., t. 147, 1970, p. 507-527.
- [4] MARTIN (R. S.). - Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 49, 1941, p. 137-172.

(Texte reçu le 4 mai 1973)

J. C. TAYLOR  
 Department of Mathematics  
 McGill University  
 MONTREAL (Canada)

---