Michèle Mastrangelo-Dehen

Semi-groupes d'opérateurs sur un convexe compact et calcul de perturbations

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 14 (1970-1971), exp. n° 12, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1970-1971__14__A5_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
14e-15e années, 1970-1972, n° 12, 12 p.

18 novembre 1971

SEMI-GROUPES D'OPÉRATEURS SUR UN CONVEXE COMPACT ET CALCUL DE PERTURBATIONS

par Michèle MASTRANGELO-DEHEN

Dans cet exposé, on étudie l'action d'un semi-groupe d'opérateurs affines sur un simplexe ; on montre que si ce semi-groupe vérifie certaines conditions, alors il peut globalement être représenté par une mesure sur l'ensemble des trajectoires continues dans l'ensemble des points extrémaux de ce simplexe. On applique ensuite cette étude au calcul des perturbations au moyen d'intégrations par rapport à cette mesure. Je remercie François ARIBAUD pour ses suggestions qui m'ont beaucoup aidée.

Définitions et notations [2]. - On notera :

K un simplexe, convexe compact, d'un espace vectoriel topologique localement convexe E, et on supposera K métrisable pour sa topologie ;

D un sous-semi-groupe de $\underset{\sim}{R}_+$, dénombrable et partout dense ;

$\mathfrak{Q}$ l'ensemble des parties finies de $\underset{\sim}{R}_+$;

$\mathfrak{S}$ l'ensemble des sous-semi-groupes monogènes de D ;

Ω l'ensemble des fonctions continues de $\underset{\sim}{R}_+$ dans l'espace $\overline{\mathcal{E}(K)}$, adhérence des points extrémaux de K ;

$(V_t)_{t\in\underset{\sim}{R}_+}$ un semi-groupe d'opérateurs affines sur K, vérifiant $V_t(K) \subset K$.

X un espace vectoriel de formes linéaires continues sur E qui sépare les points de K, muni de la semi-norme de la convergence uniforme sur K. On note X_1 sa boule unité.

On supposera l'hypothèse suivante :

(c) $\qquad \forall\, x \in K\ ,\ V_t\, x$ converge vers x lorsque t tend vers 0.

On dit alors que (V_t) est un semi-groupe fortement continu.

1. Étude d'un semi-groupe d'opérateurs sur un simplexe.

On peut remarquer que le théorème de Gustave CHOQUET permet de déduire de l'hypothèse $V_t(K) \subset K$ que, pour tous $t \in \underset{\sim}{R}_+$, $x \in K$; on peut déterminer une mesure, $p^t(x\ ,\ .)$, et une seule, portée par $\mathcal{E}(K)$, et qui vérifie :

$$\forall\, \xi \in X :\ p^t(x\ ,\ \xi) = \langle \xi\ ,\ V_t(x)\rangle = \xi[V_t(x)]\ ,$$

où $\langle . , . \rangle$ désigne la dualité entre X et K .

Lorsque K n'est pas un simplexe, l'étude qui suit peut aussi se faire sous la condition suivante :

Soit X un espace de Banach séparable qui soit un C_σ-espace au sens de LIDENSTRAUSS et ROSENTHAL [1], alors X est complémentable dans $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{E}(K)})$.

Soit X^0 un supplémentaire topologique de X dans $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{E}(K)})$, il existe alors une mesure, et une seule, définie sur $\overline{\mathcal{E}(K)}$, $p^t(x , .)$, qui vérifie :

$$\forall \xi \in X : \; p^t(x , \xi) = \xi[V_t(x)] \quad \text{et} \quad \forall \xi \in X^0 , \; p^t(x , \xi) = 0 .$$

Toute l'étude qui suit, avec l'hypothèse

" X est un espace vectoriel quelconque, et K est un simplexe",

pourrait être transposée avec

" X est un C_σ-espace de Banach séparable, et K un convexe compact quelconque".

Tous les résultats obtenus resteraient vrais en remplaçant partout $\mathcal{E}(K)$ par $\overline{\mathcal{E}(K)}$.

Si $\mathcal{T}$ est un sous-ensemble de $\underset{\sim}{R}_+$, tel que $\mathcal{T} \cap [0 , t]$ soit fini et $\{0,t\} \subset \mathcal{T}$, on note

$$\mathcal{T} \cap [0 , t] = \mathcal{T}_t = \{0 = t_0 , t_1 , t_2 , \dots , t_i = t\} .$$

Un élément de $[\mathcal{E}(K)]^{\mathcal{T}\cap[0,t]} \subset K^{\mathcal{T}\cap[0,t]}$ sera désigné par

$$\omega = (\omega(t_0) , \omega(t_1) , \dots , \omega(t_k) , \dots , \omega(t_i)) .$$

Si $\mathcal{T} \cap [0 , t] \in \mathcal{D}$, on définit une mesure sur $\mathcal{E}(K)^{\mathcal{T}\cap]0,t]}$ par

$$W_x^{\mathcal{T}_t}(dx_{t_1}, dx_{t_2}, \dots, dx_{t_i}) = p^{t_1}(x, dx_{t_1}) \, p^{t_2-t_1}(x_{t_1}, dx_{t_2}) \dots p^{t_i-t_{i-1}}(x_{t_{i-1}}, dx_{t_i}) .$$

La valeur de $W_x^{\mathcal{T}_t}$, sur un pavé mesurable de $\mathcal{E}(K)^{\mathcal{T}\cap]0,t]}$, $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i$, s'exprime explicitement par

$$W_x^{\mathcal{T}_t}(A_1 \times \dots \times A_i) = \int_{A_1} \dots \Big[\int_{A_{i-2}} \Big(\int_{A_{i-1}} p^{t_i-t_{i-1}}(x_{t_{i-1}}, A_i) \, p^{t_{i-1}-t_{i-2}}(x_{t_{i-2}}, dx_{t_{i-1}})\Big)$$
$$\times \, p^{t_{i-2}-t_{i-3}}(x_{t_{i-3}} , dx_{t_{i-2}}) \dots p^{t_1}(x , dx_{t_1})\Big] .$$

PROPOSITION 1.1. - <u>Soit</u> D <u>une partie dénombrable de</u> $\underset{\sim}{R}_+$. <u>On peut déterminer, pour tout</u> $x \in K$, <u>une mesure</u> W_x^D <u>sur l'espace produit</u> $\mathcal{E}(K)^D$, <u>dont la projection sur toute partie finie</u> $\mathcal{T}_t$ <u>soit égale à</u> $W_x^{\mathcal{T}_t}$.

Démonstration. - Les mesures $p^t(y , .)$ sont des probabilités ; il en est donc de même pour les $W_x^{\mathcal{E}_t}$.

Comme $\mathcal{E}(K)^D$ est un produit dénombrable, on peut appliquer le théorème de Prokhorov, et déduire l'existence d'une limite projective de mesures.

Dans la suite, D désignera un semi-groupe dénombrable et partout dense dans $\underset{\sim}{R}_+$. Au moyen de lemmes assez techniques, on montrera que la mesure W_x^D , définie sur $\mathcal{E}(K)^D$ par les mesures $p^t(x , .)$, est portée par l'ensemble des applications de D dans $\mathcal{E}(K)$, uniformément continues sur tout borné de D . L'hypothèse (c) jouera un rôle essentiel. On note $\|.\|$ une distance sur K compatible avec la topologie de celui-ci.

LEMME 1.2. - Lorsque l'hypothèse (c) est vérifiée, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\delta^{-1} \rho(\varepsilon , \delta) = \delta^{-1} \sup_{t<\delta} \int_{\{y\in K, \|y,x\|>\varepsilon\}} p^t(x , dy)$$

converge vers 0 lorsque δ tend vers 0 .

Démonstration. - Si $\delta^{-1} \rho(\varepsilon , \delta)$ ne convergeait pas vers 0 , $\exists\, \alpha > 0$, $\forall\, n\in\underset{\sim}{N}$, $\exists\, t_n < 1/n$

$$\delta^{-1} \int_{\{\|y,x\|>\varepsilon\}} p^{t_n}(x , dy) > \alpha .$$

Ce qui s'écrit encore, si χ_A désigne la fonction caractéristique de A , $\exists\, \alpha>0$, $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$, $\exists\, t_n < 1/n$

$$\chi_{\{\|y,x\|>\varepsilon\}}(V_{t_n}(x)) > \alpha/n .$$

Le semi-groupe V_t vérifie donc,

$$\forall\, n , \quad V_{t_n} x \notin B(x , \varepsilon)$$

ce qui est contraire à l'hypothèse (c).

LEMME 1.3. - Soient $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $x \in K$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots \leqslant t_r$ et

$$t_n - t_1 < \delta ,$$

alors l'ensemble

$$A = \{\omega \in \mathcal{E}(K)^D ; \ \exists\, j \in \{1 , 2 ,\dots, n\} ; \ \|\omega(t_n) , \omega(t_j)\| > \varepsilon\}$$

vérifie

$$W_x^D(A) \leqslant 2\rho(\varepsilon , \delta) .$$

Démonstration. - Si on pose

$$B = \{\omega \in \mathcal{E}(K)^D ; \|\omega(t_1) , \omega(t_n)\| \geqslant \varepsilon/2\} , \quad c_j = \{\omega \in \mathcal{E}(K)^D ; \|\omega(t_j) , \omega(t_n)\| > \varepsilon/2\}$$

$D_j=\{\omega\in\mathcal{E}(K)^D \; ; \; \|\omega(t_1),\omega(t_j)\|>\varepsilon \;\text{ et, }\; \forall\, k\in\{1,2,\dots,(j-1)\} \;,\; \|\omega(t_1),\omega(t_k)\|\leqslant\varepsilon\}$,

on voit que

$$A\subset B\bigcup_{j=1}^{n}(C_j\cap D_j) \;,$$

par suite

$$W_x^D(A)\leqslant W_x^D(B)+\sum_{j=1}^{n} W_x^D(C_j\cap D_j) \;.$$

Or

$$W_x^D(C_j\cap D_j)\leqslant\int_{\mathcal{E}(K)^{\{t_1,t_2,\dots,t_n\}}} p^{t_1}(x\;,\;dx_{t_1})\;\dots\;p^{t_j-t_{j-1}}(x_{t_{j-1}}\;,\;dx_{t_j})$$

$$\times\, p^{t_n-t_j}(x_{t_j}\;,\;dx_{t_n})\,\chi_{D_j}(x_{t_1}\;,\dots,\;x_{t_j})\,\chi_{C_j}(x_{t_j}\;,\;x_{t_n})$$

$$\leqslant\rho((\varepsilon/2),\delta)\int_{\mathcal{E}(K)^{\{t_1,t_2,\dots,t_j\}}} p^{t_1}(x,dx_{t_1})\dots p^{t_j-t_{j-1}}(x_{t_{j-1}},dx_{t_j})\,\chi_{D_j}(x_{t_1},\dots,x_{t_j})$$

$$\leqslant\rho((\varepsilon/2)\;,\;\delta)\;.$$

Or

$$W_x^D(B)\leqslant\rho((\varepsilon/2)\;,\;\delta)$$

par suite

$$W_x^D(A)\leqslant 2\rho((\varepsilon/2)\;,\;\delta)\;.$$

LEMME 1.4. - <u>Sous l'hypothèse</u> (c), <u>la mesure</u> W_x^D <u>est portée par l'ensemble des trajectoires uniformément continues sur tout borné de</u> D .

<u>Démonstration</u>. - Si Φ est l'ensemble des fonctions de D dans $\mathcal{E}(K)$ uniformément continues sur tout borné de D , Φ est le boréléen

$$\Phi=\bigcap_{k\in\underset{\sim}{N}}\bigcup_{\varepsilon>0}\bigcup_{\delta>0} F(k\;,\;\varepsilon\;,\;\delta)\;,$$

où $F(k\;,\;\varepsilon\;,\;\delta)$ est le complémentaire de l'ouvert $G(k\;,\;\varepsilon\;,\;\delta)$, défini par

$$G(k,\varepsilon,\delta)=\{\omega\in\mathcal{E}(K)\;,\;\;\exists\; s,t\in[0,k]\;,\;\;|s-t|<\delta\;,\;\;\|\omega(t),\omega(s)\|>4\varepsilon\}\;.$$

On peut décomposer $[0\;,\;k]$ en k/δ intervalles contigus de longueur δ . Si $\omega\in G(k\;,\;\varepsilon\;,\;\delta)$, on voit que s et t appartiennent au même intervalle ou à deux intervalles contigus ; il existe donc un intervalle $[t_1\;\dots\;t_n]$ de la subdivision pour lequel

$$\omega\in E=\{\omega\in\mathcal{E}(K)^D\;;\;\;\exists\;(j,k)\in\{1\;,\;2\;,\dots,\;n\}^2\;,\;\;j\leqslant k\;,\;\;\|\omega(t_j),\omega(t_k)\|>2\varepsilon\}\;.$$

Or E est contenu dans l'ensemble A du lemme 1.3, par suite,

$$W_x^D(G(k\;,\;\varepsilon\;,\;\delta))\leqslant k\delta^{-1}\,2\rho((\varepsilon/2)\;,\;\delta)\;.$$

Au lemme 1.2, on a vu que, lorsque k et ε sont fixés, cette expression converge vers 0 lorsque δ tend vers 0. On en déduit que

$$W_x^D(\Phi) = W_x^D(\mathcal{E}(K)^D) .$$

Remarque. - Ces démonstrations sont analogues à celles de l'appendix A de [2], moyennant la transposition à cette étude.

THÉORÈME 1.5. - Il existe une mesure, et une seule, W_x, portée par l'ensemble Ω des trajectoires continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\overline{\mathcal{E}(K)}$, dont les projections sur les parties finies de D soient les mesures W_x^D.

Cette mesure vérifie :

$$\forall\ \xi \in X\ ,\quad \xi(V_t(x)) = \int_\Omega \xi(\omega(t))\ W_x(d\omega) .$$

Démonstration. - Comme D est partout dense dans $\mathbb{R}_+$, l'ensemble Φ, des trajectoires uniformément continues sur tout borné de D, est isomorphe à un sous-ensemble de Ω. On note W_x la mesure sur Ω, image par cet isomorphisme de W_x^D.

Il est immédiat que, $\forall\ t \in D$, $\forall\ \xi \in X$,

$$\xi(V_t\ x) = \int_\Omega \xi(\omega(t))\ W_x(d\omega) .$$

Conclusion. - Comme D est partout dense, cette relation est vérifiée sur $\mathbb{R}_+$. On a donc déterminé une mesure sur Ω qui représente globalement le semi-groupe.

2. Étude de perturbations du semi-groupe.

Dans ce paragraphe, on conserve les définitions précédentes en les limitant au cas particulier suivant :

K est la boule unité faiblement compacte d'un espace de Banach E (E est alors réflexif). On considère, en outre, un semi-groupe $(H_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, qui représente une "perturbation" de $(V_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

On suppose que (V_t), (H_t) sont des semi-groupes de contractions linéaires, c'est-à-dire que, $\forall\ t$,

$$V_t(K) \subset K \quad \text{et} \quad H_t(K) \subset K ,$$

et que (V_t) et (H_t) vérifient l'hypothèse (c).

On peut alors construire les générateurs infinitésimaux A et B de (V_t) et (H_t), et prolonger tous ces opérateurs à E. On sait que $\mathcal{D}(A)$ et $\mathcal{D}(B)$ sont partout dense dans E.

On suppose que $(A + B)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe

$$(S_t)_{t \in \underset{\sim}{R}^+}$$

de contractions de E

$$\forall\, t \ , \quad S_t(K) \subset K \ .$$

[Des conditions nécessaires et suffisantes, pour qu'il en soit ainsi, sont exposées dans YOSIDA [5] ou bien dans TROTTER [3] et [4].]

Alors, d'après un théorème de Trotter,

$$\forall\, x \in E : \quad S_t(x) = \lim_{n \to \infty} (V^{t/n}\, H^{t/n})^n\, x \ .$$

Dans la suite, on se propose d'exprimer directement S_t au moyen d'une intégration d'une fonction dépendant de (H_t) par rapport à la mesure W_x associée à (V_t) , et définie sur l'espace Ω des trajectoires dans $\overline{\mathcal{E}(\mathbf{X})}$.

Pour tous $t \in \underset{\sim}{R}_+$, $x \in \mathcal{E}(\mathbf{X})$, il existe un scalaire $\{H_t(x)\} \in \underset{\sim}{C}$, appelé rapport de $H_t(x)$, tel que :

$$\forall\, \xi \in \mathbf{X} : \quad \xi \circ H_t(x) = \{H_t(x)\} . \xi(x) \ .$$

Cette représentation s'obtient comme une limite d'intégrales sur des produits $\mathcal{E}(K)^{\mathcal{T} \cap]0,t]}$ (où $\mathcal{T} \cap]0\ ,\ t]$ est un ensemble discret $\{t_1\ ,\ t_2\ ,\dots,\ t_i = t\}$) de la forme

$$\text{(U)} \qquad \xi\, [U_t^{\mathcal{T}}(x)] = \int_{\mathcal{E}(K)^{\mathcal{T} \cap]0,t]}} \{\prod_{k=1}^{i} H_{(t_k - t_{k-1})}(\omega(t_k))\}\ \xi(\omega(t))\ W_x^{\mathcal{T}\, x}(d\omega) \ .$$

PROPOSITION 2.1. - <u>Si</u> T <u>est un semi-groupe monogène contenu dans</u> $\underset{\sim}{R}_+$, $T = \underset{\sim}{N}\alpha$, <u>où</u> $\alpha > 0$, <u>les opérateurs</u>

$$\{U_t^T = U_t^{T \cap]0,t]}\}_{t \in T}$$

<u>forment un semi-groupe</u>.

<u>Démonstration</u>. - Si r et s appartiennent à T , et si $t = r + s$, on note :

$T \cap]0,r] = T_r = \{\emptyset\ ,\ r_1\ ,\ r_2\ ,\dots,\ r_i = r\}$ et $\omega_r \in \mathcal{E}(K)^{T \cap]0,r]}$;

$T \cap]0,s] = T_s = \{\emptyset\ ,\ s_1\ ,\ s_2\ ,\dots,\ s_j = s\}$ et $\omega_s \in \mathcal{E}(K)^{T \cap]0,s]}$;

$T \cap]0,t] = T_t = \{t_1, t_2, \dots, t_i = r \dots t_j = s \dots t_k = r + s\}$ et $\omega \in \mathcal{E}(K)^{T \cap]0,t]}$.

Appliquant la formule (U), on voit que, pour tout $\xi \in X$,

$$\xi[U_r^T \circ U_s^T(x)] = \int_{\mathcal{E}(K)^{T_r}} \prod_{h=1}^{i} \{H_\alpha(\omega_r(r_h))\}\ \xi[U_s^T(\omega_r(r))]\ W_x^{T_r}(d\omega_r)$$

$$= \int_{\mathcal{E}(K)^{T_r}} \prod_{h=1}^{i} \{H_\alpha(\omega_r(r_h))\} \int_{\mathcal{E}(K)^{T_s}} \prod_{\ell=1}^{j} \{H_\alpha(\omega_s(s_\ell))\}\ \xi[\omega_s(s)]\ W_{\omega_r(r)}^{T_s}(d\omega_s)\ W_x^{T_r}(d\omega_r)$$

$$= \int_{\mathcal{E}(K)^{T_r} \times \mathcal{E}(K)^{T_s} = \mathcal{E}(K)^{T_t}} \prod_{h\in\{1,2,\dots,i\},\ell\in\{1,2,\dots,j\}} \{H_\alpha[\omega_r(r_h)]\}\{H_\alpha[\omega_s(s_\ell)]\}$$
$$\xi[\omega_s(s)]\ W_x^{T_r}(d(\omega_r \times \omega_s))$$

$$= \int_{\mathcal{E}(K)^{T_t}} \prod_{h=1}^{k} \{H_\alpha[\omega(t_h)]\}\ \xi[\omega(t)]\ W_x^{T_t}(d\omega) = \xi[U_t^T\ x] .$$

PROPOSITION 2.2. - Si (V_t) [resp. (H_t)] est un semi-groupe de générateur infinitésimal A [resp. B], et si x appartient aux domaines de définition de A et de $B \circ A$, alors

$$t^{-1}(U^T\ x - x) = A + B)x + O(t)x \quad \text{avec} \quad t \neq 0 ,$$

où $O(t) \xrightarrow{t\to 0} 0$. On supposera dans la suite que $\overline{\underset{\sim}{D}A \cap \underset{\sim}{D}(BA)} = K$.

Démonstration. - Pour tout $\mathcal{E}$ de X, on voit que :

$$\lim_{t\to 0, t\neq 0, t\in T} t^{-1}(\xi[U_t^T\ x - x]) = t^{-1}\ \xi[U_{t_1}^T\ x - x]$$
$$= t_1^{-1}\{\int_{\mathcal{E}(K)} \{H_{t_1}(\omega(t_1))\}\ \xi[\omega(t_1)]\ p^{t_1}(x\ ,\ d\omega(t_1)) - \xi(x)\}$$
$$= t_1^{-1}\{\xi[H_{t_1} \circ V_{t_1}\ x - x]\} = t_1^{-1}\ \xi[(I + Bt_1 + t_1\ O'(t_1))(I + At_1 + t_1\ O''(t_1))\ x - x]$$
$$= \xi[(A + B)x + t_1\ BAx + t_1^{-1}(H_{t_1} - I - t_1\ B)(V_{t_1} - I - t_1\ A)\ x] .$$

Lorsque $x \in \underset{\sim}{D}(A) \cap \underset{\sim}{D}(B.A)$, l'expression

$$t_1\ BAx + t_1^{-1}(H_{t_1} - I - t_1\ B)(V_{t_1} - I - t_1\ A)\ x$$

s'écrit $O(t_1).x$, où $O(t_1)$ est un opérateur affine sur K, qui converge vers 0 lorsque $t_1 \to 0$. La proposition est donc démontrée.

On peut conclure de ce qui précède que, si T est un semi-groupe monogène de D, les opérateurs $(U_t^T)_{t\in T}$, définis par

$$\text{(W)} \qquad \forall\ \xi \in X\ ,\quad \xi[U_t^T\ x] = \int_{\mathcal{E}(K)^D} \{\prod_{k=1}^{i} H_{(t_k - t_{k-1})}(\omega(t_k))\}\ \xi[\omega(t)]\ W_x^D(d\omega)\ ,$$

forment un semi-groupe d'opérateurs dont le "générateur infinitésimal discret", au sens de la proposition 2.2, converge fortement vers $(A + B)$ lorsque le générateur de T tend vers zéro.

Dans la suite on fixe d'abord un point t dans D, et on étudie l'existence d'une limite des opérateurs $(U_t^T)_{t\in T}$ lorsque T décrit un système de semi-groupes monogènes de D, cofinal pour la réunion. Lorsque cette limite existe pour tout $t \in D$, on étudie le prolongement de l'application $(t \longmapsto \lim_{T\in\mathcal{S}} U_t^T)$ à $\underset{\sim}{R}_+$.

Définitions supplémentaires. - On définit :

$\mathfrak{B}_x = \{ \ \xi \in X_1$ tel que $\xi[.(u)]$ soit localement uniformément W_x-intégrable au sens suivant : $\forall\ t \in \underset{\sim}{R}_+$, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ S$ compact de Ω, $\exists\ \mathcal{V}_t$ voisinage de t, $\forall\ u \in \mathcal{V}_t$:

$$\int_{\Omega\setminus S} |\xi[\omega(u)]|\ W_x(d\omega) < \varepsilon \quad \} .$$

$\mathcal{B} = \{ \quad (H_t)_{t\in\underset{\sim}{R}_+}$ semi-groupe d'opérateurs affines sur K vérifiant

$$C = \sup_{u\in\underset{\sim}{R}_+, y\in\mathcal{E}(K)} \{ | \{H_u(y)\} | \} < \infty$$

et, $\forall\ S$ compact de Ω, $\forall\ R$ borné de $\underset{\sim}{R}_+$,

$$\sup_{\omega\in S, u\in R} \{ | \{H_v(\omega(u))\} | \} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad v \longrightarrow 0 \quad \} .$$

PROPOSITION 2.3. - Soient $x \in \mathbf{K}$, $\xi \in \mathfrak{B}_x$, $(H_t) \in \mathcal{B}$, alors la famille

$$\{(t \longmapsto \xi[U_t^T\ x])\}_{T\in\mathcal{S}, T\ni t}$$

est uniformément équicontinue sur tout borné de D.

Démonstration. - Si t et $(t + h)$ appartiennent à $T = \underset{\sim}{N}\alpha$,

$$T \cap \left]0\ ,\ t\right] = \{t_1\ ,\ t_2\ ,\ \dots\ ,\ t_i = t\} ,$$

$$T \cap \left]0\ ,\ t + h\right] = \{t_1\ ,\ t_2\ ,\ \dots\ ,\ t_j = t + h\} ,$$

$$|\xi[U_{t+h}^T\ x] - \xi[U_t^T\ x]|$$

$$= |\int_{\mathcal{E}(K)^T} \{\textstyle\prod_{k=1}^{j} \{H_\alpha[\omega(t_h))\}\ \xi(\omega(t + h)) - \prod_{\ell=1}^{i} \{H_\alpha(\omega(t_\ell))\}\ \xi(\omega(t))\}\ W_x^T(d\omega)|$$

$$= |\int_\Omega \{\dots\}\ W_x(d\omega)| .$$

Si S est un compact de Ω, et si

$$E_{\delta_\eta} = \{\omega \in \Omega :\ \exists\ u\ ,\ v \in D\ ,\ |u - v| < \delta\ ,\ |\omega(u) - \omega(v)| > \eta\}$$

on voit que le module est majoré par

1° $\int_{\Omega\setminus S} \sup_{u\in\underset{\sim}{R}_+, y\in\mathcal{E}(K)} \{ | \{H_u(y)\} | \} . |\xi(\omega(t + h)) - \xi(\omega(t))|\ W_x(d\omega)$

2° $\int_S |\prod_{k=1}^{j} \{H_\alpha(\omega(t_k))\} - \prod_{\ell=1}^{i} \{H_\alpha(\omega(t_\ell))\}| . |\xi(\omega(t))|\ W_x(d\omega)$

3° $\int_{S\setminus E_{\delta\eta}} |\prod_{k=1}^{j} \{H_\alpha(\omega(t_k))\}| . |\xi(\omega(t + h)) - \xi(\omega t))|\ W_x(d\omega)$.

4° $\int_{S\cap E_{\delta\eta}} |\prod_{k=1}^{j}\{H_\alpha(\omega(t_k))\}|.|\xi(\omega(t+h)-\omega(t))|\ W_x(d\omega)$.

1° Comme $C<\infty$ et comme les applications $\xi(.(u))$ sont localement uniformément W_x-intégrables, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ S$ compact de Ω , $\exists\ \alpha_1>0$, $\forall\ \lambda<\alpha_1$,

$$\int_{\Omega\setminus S}|\xi(\omega(t+\lambda))|\ W_x(d\omega) < (\varepsilon/2).C^{-1} .$$

2° Si, par exemple, $j\geqslant i$, comme l'ensemble S est équicontinu, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \alpha_2>0$, $\forall\ h<\alpha_2$ (tel que $t+h\in T$),

$$|\prod_{k=1}^{j}\{H_\alpha(\omega(t_k))\} - \prod_{\ell=1}^{i}\{H_\alpha(\omega(t_\ell))\}| < \varepsilon.W_x(|\xi(.(t))|)^{-1} .$$

3° Comme S est compact dans Ω , $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \eta>0$

$$|y-z|<\eta \Rightarrow |\xi(y-z)| < \varepsilon/CW_x(S) .$$

Par suite, pour tout $\delta>0$ et tout $h<\delta$,

$$\int_{K\setminus E_{\delta\eta}}|\prod_{k=1}^{j}\{H_\alpha(\omega(t_k))\}|.|\xi(\omega(t+h)-\omega(t))|\ W_x(d\omega) < \varepsilon .$$

4° Le compact S et le réel η étant donnés, on a vu, lors de la démonstration du lemme 1.4, que, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \alpha_3>0$ tel que

$$\sup_{\omega\in S,u<\alpha_3}|\xi(\omega(t+u)-\omega(t))| < 1$$

et $\forall\ \delta<\alpha_3$,

$$W_x(E_{\delta\eta}) < \varepsilon/C .$$

Si l'on pose $\alpha=\inf(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3)$, on voit que, si h et δ sont des réels positifs majorés par α , si η est déterminé comme au 3°, chacune des intégrales des 1°, 2°, 3°, 4° est majorée par ε . On peut conclure à l'énoncé de la proposition.

Définition. - Soit B un opérateur linéaire de K dans E tel que, pour tout $x\in\xi(K)$, il existe un scalaire $\{B(x)\}$ tel que, $\forall\ \xi\in X$,

$$\xi[B(x)] = \{B(x)\}\xi(x) .$$

Si D est la réunion d'une suite croissante de semi-groupes monogènes $(T_\eta)_{\eta\in\mathbb{N}}$, si $q\leqslant n$, si $t\in T_q$, et si

$T_n\cap[0,t) = \{0=t_0,t_1,\ldots,t_j=t\}$, $T_q\cap[0,t) = \{0=s_0,s_1=t_{\ell_1},\ldots,s_k=t_{\ell_k},\ldots,s_i=t\}$,

on pose

$$a_{nq}^{t}(\omega) = \sum_{k=1}^{i}|\{\sum_{h=\ell_{k-1}+1}^{\ell_k}\{B(\omega(t_h))\}(t_h-t_{h-1})\} - \{B(\omega(s))\}(s_k-s_{k-1})| .$$

PROPOSITION 2.4. - <u>Si la suite double</u> $(a_{nq}^{t}(\omega))_{n,q\in\mathbb{N}}$ <u>converge vers</u> 0 (<u>lorsque</u> n <u>et</u> q , <u>tendent vers l'infini</u>), <u>uniformément en</u> $\tilde{\omega}$ <u>sur tout compact de</u> Ω , alors la suite

$$\{\xi[U_t^{T_n} x] = \int_\Omega \exp(\Sigma_{T_n \cap]0,t]}(t_k - t_{k-1})\{B(\omega(t_k))\}\ \xi(\omega(t))\ W_x(d\omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

(où $\xi \in \mathfrak{L}_x$, $(e^{tB})_{t \in \mathbb{R}^+} \in \mathcal{B}$, $t \in D$) converge dans $\mathbb{C}$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Démonstration. – Il suffit de vérifier que cette suite est de Cauchy. D'après la majoration de la première intégrale dans la proposition 2.3, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ S$ compact de Ω , $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_{\Omega \setminus S} \exp \Sigma_{T_n \cap]0,t]}(t_k - t_{k-1})\{B(\omega(t_k))\}\ \xi(\omega(t))\ W_x(d\omega)\right| < \varepsilon/2 .$$

Le compact S étant donné, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous n , $q \geqslant n_0$ et tout $\omega \in S$, $a^t_{nq}(\omega) < \varepsilon$; on voit alors que

$$|\xi[U_t^{T_n} x - U_t^{T_q} x]| \leqslant \varepsilon + \int_S \Big|\exp\{\Sigma_{k=1}^{i}\ \Sigma_{h=\ell_{k-1}+1}^{\ell_k}(t_h - t_{h-1})\{B(\omega(t_h))\}\}$$

$$- \exp\{\Sigma_{k=1}^{i}(s_k - s_{k-1})\{B(\omega(s_k))\}\}\Big| . |\xi(\omega(t))|\ W_x(d\omega) .$$

Comme cette dernière intégrale converge vers 0 lorsque n et q tendent vers l'infini, on peut conclure.

Remarque 2.5. – Pour que les $\{a^t_{nq}(\omega)\}$ convergent vers 0 uniformément sur tout compact de Ω et pour tout t , il suffit que $\{B(.)\}$ soit une fonction intégrale au sens de Riemann.

DÉFINITIONS. – On dira que le couple d'opérateurs (A , B) est admissible, s'il existe un semi-groupe $D \subset \mathbb{R}_+$, dénombrable et partout dense, réunion d'une suite (T_n) de semi-groupes monogènes, et un ensemble $\mathfrak{L}$ partout dense dans la boule unité de X tels que, $\forall\ x \in K$, $\forall\ \xi \in \mathfrak{L}$, la suite

$$(t \longmapsto \xi(U_t^{T_n} x))_{n \in \mathbb{N}}$$

soit uniformément équicontinue sur tout borné de D , et converge en tout point $t \in D$.

D'après 2.3 et 2.5, pour que (A , B) soit admissible, il suffit que $\bigcap_{x \in K} \mathfrak{L}_x$ soit partout dense dans K et que $\{B\}$ soit intégrable au sens de Riemann. On peut remarquer qu'il existe un point y , et un seul, dans K , qui vérifie, $\forall\ \xi \in \mathfrak{L}$

$$\xi(y) = \lim_{n \to \infty, t \in T_n} \xi[U_t^{T_n}(x)] .$$

(a) Montrons l'unicité : Si y et z vérifient

$$\forall\ \xi \in \mathfrak{L} :\ \xi(y) = \xi(z) = \lim_{n \to \infty, t \in T_n} \xi[U_t^{T_n}(x)] ,$$

on déduit du fait que $\mathfrak{L}$ est partout dense dans X_1 et de celui que X_1 sépare les points de K , que $y = z$.

(b) Montrons l'existence : La topologie $\sigma(K , \mathcal{L})$ est une topologie séparée sur K , plus faible que la topologie initiale du compact K ; elle est donc identique à cette topologie initiale.

La suite $(U_t^{T_n})_{n \in \underset{\sim}{N}}$ admet donc au moins un point adhérent, y .

On note alors U_t l'opérateur défini, pour tout $t \in \underset{\sim}{R}_+$, par, $\forall x \in K$, $\forall \xi \in \mathcal{L}$,

$$\xi(U_t\ x) = \lim_{n\to\infty, t_n \to t, t_n \in T_n} \xi(U_{t_n}^{T_n}\ x) .$$

Par passage à la limite, on voit que $t \longmapsto \xi[U_t\ x]$ est une application continue, et que les opérateurs U_t forment un semi-groupe d'opérateurs affines continus vérifiant $U_t(K) \subset K$.

PROPOSITION 2.6. - <u>Si</u> (A , B) <u>est admissible, les opérateurs</u> $(U_t)_{t \in \underset{\sim}{R}_+}$ <u>forment un semi-groupe de générateurs infinitésimal</u> $(A + B)$.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de vérifier que, $\forall \xi \in \mathcal{L}$, $\forall x \in K$,

(E) $$\frac{\partial}{\partial t} \xi(U_t\ x) = \xi((A + B)\ U^t\ x) .$$

La relation (E) est vérifiée sur le semi-groupe D , et on sait que les applications

$$(t \longmapsto \xi(U_t\ x)) \quad \text{et} \quad (t \longmapsto \xi[(A + B)\ U^t\ x])$$

sont uniformément continues sur tout borné R de $\underset{\sim}{R}_+$, par suite, $\forall \alpha > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x$, $t' \in R$,

$$|t - t'| < \eta \Rightarrow |\xi(U_t\ x) - \xi(U_{t'}\ x)| < \alpha \quad \text{et} \quad |\xi[(A + B)(U_t\ x - U_{t'}\ x)] < \alpha .$$

Comme (E) est vérifiée sur D , $\forall u \in D$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\forall h < \delta$:

$$|h^{-1}\ \xi[(U_{u+h}\ x - U_u\ x) - (A + B)\ U_u\ x]| < \varepsilon .$$

Si $t \in R$, si $h < \delta$, il existe deux éléments u et v de D tels que, posant $\alpha = h\varepsilon$, on ait pour tout $\xi \in \mathcal{L}$:

$$|h^{-1}\ \xi[U_u\ x - U_v\ x] - \xi[(A + B)\ U_v\ x]| < \varepsilon ,$$

$$|\xi[(A + B)(U_t\ x - U_v - x)]| < \varepsilon ,$$

$$|h^{-1}\ \xi[(U_{t+h} - U_u)x]| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |h^{-1}\ \xi[(U_t - U_v)x] < \varepsilon .$$

On voit que, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t \in \underset{\sim}{R}_+$, $\exists \delta > 0$, $\forall h < \delta$, $\forall \xi \in \mathcal{L}$,

$$|h^{-1}\ \xi[(U_{t+h} - U_t)x] - \xi[(A + B)\ U_t\ x]| < 4\varepsilon .$$

La relation (E) est donc vérifiée sur $\underset{\sim}{R}_+$.