Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Michèle Dehen

Approximation des espaces harmoniques

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 14 (1970-1971), exp. nº 7, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1970-1971__14__A3_0>

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel (Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
14e-15e années, 1970-1972, n° 7, 8 p.

4 et 11 mars 1971

APPROXIMATION DES ESPACES HARMONIQUES

par Michèle DEHEN

(d'après les travaux de E. M. J. BERTIN [1] et [2])

En analyse numérique, beaucoup de problèmes peuvent être placés dans le contexte suivant. Soit C' une catégorie telle que chaque objet de C' soit un ensemble Ω , muni d'une certaine structure T . Si on veut énoncer un théorème P de T , on remplace l'ensemble Ω par un ensemble plus simple Ω_i , la structure T par une structure plus simple T_i , telle que les axiomes de T_i soient, à peu près, des théorèmes de T . On énonce ensuite un théorème P_i de T_i correspondant à P , et on vérifie si P_i et P se ressemblent assez ; si P_i est trop différent de P , on reprend pour une meilleure approximation Ω_j et T_j . Pour que les espaces structurés (Ω_i , T_i) soient encore des objets de la catégorie C' , il peut être utile de modifier celle-ci ; par exemple, pour l'étude des espaces harmoniques, on aura besoin de la catégorie ETM, dont les objets sont les espaces ν_D , les morphismes les correspondances m-continues, et les morphismes stricts les applications m-continues, et qui est plus large que la catégorie des espaces topologiques.

Si T est, par exemple, la structure déterminée par une équation différentielle elliptique sur Ω , l'espace sera un réseau discret, et T_i une structure harmonique discrète. Soit P le théorème " f est la solution d'un problème de Dirichlet", le théorème P_i " f_i est la solution du problème de Dirichlet discrétisé" sera accepté si $|f - f_i| < a$, pour un certain nombre $a > 0$.

Si (Ω_i , T_i) est une approximation de (Ω , T) , chaque point de Ω est approché par un ensemble de points de Ω_i , qui sera d'ailleurs souvent un sous-ensemble de Ω ; on pourra noter $f_i(x)$ l'ensemble des points de Ω_i qui approchent x , et f_i sera appelée une correspondance. On supposera que ces correspondances sont des morphismes dans une catégorie C , plus large que C' . On dira que " $f \subset g$ " si, quel que soit x (appartenant à l'objet source de f et g), $f(x) \subset g(x)$; on supposera que les morphismes de C' sont des éléments minimaux pour cette relation d'ordre. Pour introduire la notion de "procédé d'approximation de plus en plus précise", on considère une famille $(\Omega_i , T_i)_{i\in I}$, indexée par un ensemble préordonné I , telle que " $i \leqslant j$ " soit équivalent à " Ω_j est une meilleure approximation que Ω_i " , ce qui s'exprime par " Ω_i est une approximation de Ω_j au moyen d'une correspondance f_{ij} , et Ω_i une approximation de Ω par f_i , telle que $f_i = f_{ij}\, f_j$ ". On désire, en outre, que chaque point x de Ω soit caractérisé par ses approximations $(x_i)_I \in \prod f_i(x)$; lorsque ceci est vérifié, on introduit la relation d'équivalence " $(x_i) \sim (y_i)$, si, et seulement si, il existe une partie J , cofinale à I , telle que, pour tout j de J , et tout $i \leqslant j$, $x_i \in f_{ij}(y_j)$ ". Lorsque Ω est maximal, il est égal à l'ensemble des classes d'équivalences ; on le désigne alors par $\varprojlim \Omega_i$, par généralisation du cas où les f_{ij} sont des applications.

I. Structures semi-topologiques.

I.1. Espace semi-topologiques.

Définition I.1.1. - On appelle topologie ν_D , sur un ensemble Ω , une application α , de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans lui-même, vérifiant

(α_1) $\emptyset^\alpha = \emptyset$,

(α_2) $\forall\ A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A^\alpha \supset A$,

(α_3) $\forall\ A$, B , $(A \cup B)^\alpha = A^\alpha \cup B^\alpha$.

On appellera espace ν_D un espace Ω muni d'une telle application ; l'ensemble A^α est appelé la semi-adhérence de A , $A^1 = C((CA)^\alpha)$, le semi-intérieur de A ; pour un point x , on écrira x^α , au lieu de $\{x\}^\alpha$.

Définition I.1.2. - On appelle semi-topologie sur un ensemble Ω , toute topologie ν_D telle que

(α_4) $\forall\ A \subset \Omega$, $\forall\ (B_s)_{s\in S}$, avec, pour tout s , $B_s^\alpha \subset A^\alpha$, $(\cup B_s)^\alpha \subset A^\alpha$.

Définition I.1.3. - On dit qu'une partie A d'un espace ν_{D_1} est un ensemble semi-ouvert (resp. semi-fermé), s'il existe B tel que $A = B^1$ (resp. $A = B^\alpha$) .

Exemple de semi-topologie (cet exemple sera souvent repris dans cette étude). - Si i est un entier positif, on désigne par

$$\Omega_i = \{(m2^{-i} , n2^{-i}) \ ; \ (m , n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

La semi-topologie α_i est définie par

$$(m2^{-i},n2^{-i})^{\alpha_i} = \{(m2^{-i},n2^{-i}),(((m+1)2^{-i},n2^{-i}),((m-1)2^{-i},n2^{-i}),$$
$$(m2^{-i},(n+1)2^{-i}),(m2^{-i},(n-1)2^{-i})\}$$

et

$$A^{\alpha_i} = \cup\{x^{\alpha_i} \ ; \ x \in A\} .$$

Si Ω est un espace semi-topologique, si A est semi-ouvert, il existe un plus petit ensemble V, tel que $A = V^1$.

Définition I.1.4. - Dans un espace ν_D, on appelle semi-voisinage d'un point x, tout ensemble V tel que $x \in V^1$.

On appelle topologie associée d'un espace ν_D, (Ω, α), la topologie, $\beta = \beta(\alpha)$, engendrée par la base des ensembles semi-ouverts. On notera $\overline{A}$ (resp. A^0) l'adhérence (resp. l'intérieur) de A pour cette topologie.

On appelle topologie admise, par rapport à α, toute topologie δ, telle que $A^\alpha = (\bigcup_{x \in A} x^\alpha)^\delta$. Si α est une semi-topologie, la topologie associée est la topologie admise la moins fine.

I.2. Limites des morphismes.

Une correspondance f, d'un ensemble Ω dans un ensemble Ω', est une application de Ω dans $P(\Omega') - \{\emptyset\}$. On la désignera par

$$f^{-1}(A) = \{x \in \Omega\ ,\ fx \cap A \neq \{\emptyset\}\}\ , \qquad \bar{f}^{-1}(A) = \{x \in \Omega\ ,\ fx \subset A\}\ .$$

Définition I.2.1. - Soient Ω un espace ν_D, et F un filtre sur une partie $A \subset \Omega$; on dit que F semi-converge vers x, ou que x est une semi-limite de F, si F est plus fin que le filtre des semi-voisinages de x. Pour que x soit semi-adhérent à A, il faut et il suffit qu'il existe un filtre F sur A qui semi-converge vers x.

Définition I.2.2. - Soit f une correspondance d'un espace ν_D, (Ω, α), dans un autre, (Ω', α'), on dit que

f est m-continue si, $\forall A \subset \Omega$, $f(A^\alpha) \subset (fA)^{\alpha'}$;

f est continue si, $\forall A \subset \Omega$, $f(A^\beta) \subset (fA)^{\beta'}$;

f est f-continue si f est m-continue et continue.

Définition I.2.3. - Soit Ω un ensemble muni de deux topologies ν_D, α et α'

α est plus mince que α', $\alpha \succcurlyeq \alpha'$, si l'identité $(\Omega, \alpha) \dashrightarrow (\Omega', \alpha')$ est m-continue,

α est plus fine que α', $\alpha \geqslant \alpha'$, si l'identité $(\Omega, \alpha) \rightarrow (\Omega', \alpha')$ est f-continue.

Pour chacune de ces notions de morphisme, on peut définir des structures initiales et des structures finales.

I.3. Systèmes approximatifs d'ensembles, ou d'espaces ν_D .

En vue des applications, il peut être désirable que la limite projective d'un système d'espaces localement compacts soit localement compacte ; on impose des axiomes supplémentaires afin d'assurer cette propriété.

Définition I.3.1. - On appelle système approximatif d'ensembles tout système projectif monotone d'ensembles (Ω_i , f_{ij}) qui vérifie l'axiome suivant

$\forall\ i \in I$, $\forall\ p \in \Omega_i$, $\exists\ j \geqslant i$, $\forall\ q \in f_j\, f_i^{-1}\, p$, $\exists\ r \in \Omega_i$ tel que $f_j\, f_j^{-1}\, q \subset f_{ij}^{-1}\, r$.

Dans ce cas, l'ensemble $\Omega = \lim \mathrm{proj}\, \Omega_i$ est appelé limite approximative des Ω_i .

Définition I.3.2. - Si (Ω_i , f_{ij}) est un système projectif d'ensembles, et si (Ω_i' , f_{ij}') est un système approximatif d'ensembles, une famille (h_i) est dite un système approximatif d'applications de (Ω_i , f_{ij}) dans (Ω_i' , f_{ij}') , si, pour tout i , $h_i\, f_{ij} \subset f_{ij}'\, h_j$.

THÉORÈME I.3. - Si (h_i) est un système approximatif d'applications de (Ω_i , f_{ij}) dans (Ω_i' , f_{ij}') , il existe une application h : $\lim \mathrm{proj}\, \Omega_i \dashrightarrow \lim \mathrm{proj}\, \Omega_i$, et une seule, telle que, $\forall\ i \in I$, $f_i'\, h \subset \bigcup_{j \geqslant i} f_{ij}'\, h_j\, f_j$.

Définition I.3.3. - On dit qu'un système projectif est un système approximatif d'espaces ν_D , si, pour une partie cofinale J de I , et pour tous i , $j \in J$, $i \leqslant j$:

(B1) $x \in \Omega_i \Rightarrow (f_{ij}^{-1}\, x)^{\beta_j}$ est quasi-compact ;

(B2) f_{ij}^{-1} est p-continue ;

(B3) $f_{ij}\, f_{ij}^{-1}$ est f-continue et f-cocontinue ;

(B4) $\forall\ x \in \Omega_i$, il existe un semi-voisinage V de x tel que

$$\exists\ j \geqslant i\ ,\ \forall\ q \in f_j\, f_i^{-1}(V)\ ,\ \exists\ r \in \Omega_i \text{ tel que } f_j\, f_i^{-1}\, q \subset f_{ij}^{-1}\, r\ .$$

On dit alors que $\lim \mathrm{proj}\, (\Omega_i , \alpha_i)$ est la limite approximative du système.

On dit que le système est strictement approximatif s'il est strictement monotone et si

(B5) $\forall\ i$, $j \in J$, $i \leqslant j$, $f_j\, f_i^{-1}$ est continue et f-cocontinue.

L'axiome (B4) entraîne que (Ω_i , f_{ij}) est un système approximatif d'ensembles.

II. Liasses de fonctions.

II.1. Enveloppes et liasses de fonctions.

Dans ce paragraphe, on introduit les liasses de fonctions, généralisation des faisceaux de fonctions. Pour les fonctions harmoniques discrètes, et souvent pour les fonctions invariantes par rapport à un noyau, une fonction sur un ouvert U est nécessairement définie sur un sur-ensemble U^p ; pour avoir une bonne théorie locale, on devra de plus imposer que, si $\{U_i\}$ est un recouvrement de U , et si les restrictions d'une fonction à chaque U_i^p appartiennent à la liasse, cette fonction lui appartient aussi.

Définition II.1.1. - On dit qu'une partie V d'un espace ν_D est polie si $W^1 \supset V^1$ entraîne $W \supset V$.

Si (Ω , α) est un espace semi-topologique et si γ est une topologie admise, chaque partie ouverte U de (Ω , γ) possède un plus petit semi-voisinage U^p . Ce semi-voisinage est poli.

Définition II.1.2. - Si (Ω , α) est un espace semi-topologique, γ une topologie admise de α , et U un ouvert de (Ω , γ) , on appelle semi-frontière de U par rapport à γ , l'ensemble $\partial U = U^{p\gamma} - U$.

Dans la suite, on désignera par (Ω , α) un espace semi-topologique, γ une topologie admise de α , $\mathcal{U}$ l'ensemble des parties ouvertes, $\mathcal{O}$ l'ensemble des parties polies de (Ω , α) , R l'ensemble des réels, et $\mathcal{H} : \mathcal{H}U \dashrightarrow (U)$ une application qui à tout U de $\mathcal{U}$ associe un ensemble $\mathcal{H}(U)$ de fonctions de U^p dans R .

Définition II.1.3. - On dit que $(\Omega , \alpha , \gamma , \mathcal{H})$ est une liasse de fonctions s'il vérifie l'axiome suivant :

$$\text{si } U \in \mathcal{U} , \quad (U_s) \subset \mathcal{U} , \quad U \subset \bigcup U_s , \quad f : U^p \cup_s U_s^p \longrightarrow R$$
$$(\forall s , \quad f|U_s^p \in \mathcal{H}(U_s)) \Rightarrow (f|U^p \in \mathcal{H}(U)) .$$

Parmi les exemples de liasses, on peut citer

(a) les liasses de martingales,

(b) les liasses de solutions (ou de sur-solutions) d'équations différentielles, discrétisées le cas échéant.

Dans les deux cas précédents, se pose souvent le problème de l'existence d'une limite projective pour un système projectif de telles liasses ; entre autres, celui-ci pourra se présenter sous l'une des formes suivantes :

(α) étude de martingales indexées par un ensemble continu, à partir d'un système de martingales indexées par des ensembles dénombrables et discrets.

(β) étude des solutions d'une équation différentielle sur un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$, connaissant les solutions du problème discrétisé ; plus précisément, on peut étudier si le faisceau des fonctions harmoniques sur un ouvert de $\underset{\sim}{R}^2$ est une limite des faisceaux des solutions, sur un ouvert de $\Omega_i = \{(m2^{-i} , n2^{-i}) ; (m , n) \in \underset{\sim}{Z}^2\}$, de l'équation discrétisée $\Delta_i\, u = 0$.

Pour chaque $U \in \mathfrak{U}$, $\mathcal{H}(U)$ sera l'ensemble des fonctions harmoniques discrètes dans U^p , à valeurs dans $\underset{\sim}{R}$, vérifiant $\Delta_i\, u = 0$, sur U , où

$$\Delta_i\, u(m2^{-i},n2^{-i}) = 2^{2i}[u((m+1)2^{-i},n2^{-i})+u((m-1)2^{-i},n2^{-i})+u(m2^{-i},(n+1)2^{-i}) + u(m2^{-i} , (n - 1)2^{-i}) - 4u(m2^{-i} , n2^{-i})] .$$

On pourrait généraliser cet exemple à $\underset{\sim}{R}^n$ et à des équations différentielles plus générales.

Définition II.1.4. - On appelle espace encadré tout couple (A , A') , où A est un ensemble poli de Ω , partout dense dans $A' \supset A$.

On dit qu'un triplet $(A , A' , \mathcal{H}(A))$ est un espace prégulier si (A , A') est encadré, et si $\mathcal{H}(A)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(A , R)$ vérifiant :

(r1) Pour toute fonction continue bornée f , définie sur $\partial A = A' \setminus A^1$, il existe une fonction $\dot{H}_f$, et une seule, appartenant à $\dot{\mathcal{H}}(A)$, telle que $f = \dot{H}_f / A' \setminus A$; on pose $H_f = \dot{H}_i / A$,

(r2) $f , g \in \mathcal{C}_b(\partial A)$ (ensemble des fonctions continues bornées) $f \leqslant g \Rightarrow H_f \leqslant H_g$.

On dit que $(A , A' , \mathcal{H}(A))$ est un espace régulier s'il satisfait en outre à :

Pour toute famille non vide, filtrante à droite [resp. à gauche], $(u_i) \subset \mathcal{H}(A)$, majorée [resp. minorée] par une fonction H_g $(g \in \mathcal{C}_b(\partial A))$, $\sup(u_i)$ [resp. (u_i)] existe, et appartient à $\mathcal{H}(A)$.

Lorsque $(\Omega , \alpha , \gamma , H)$ est une liasse, lorsque $A = U^p$ et $A' = U^{p\gamma}$, on pose $\mathcal{H}(A) = \mathcal{H}(U)$.

III. Systèmes approximatifs de liasses.

On considère un système $(\Omega_i , \alpha_i , f_{ij})_I$, convergeant, strictement approximatif (définitions qui précisent la notion de système projectif) d'espaces semi-topologiques localement compacts, chaque Ω_i étant muni d'une liasse $(\Omega_i, \alpha_i, \beta_i, \mathcal{H}_i)$. On suppose les axiomes suivants :

(AH1) Pour tout $i \in I$, et tout $x \in \Omega_i$, il existe un système fondamental $\mathfrak{F}_{i,x}$ de semi-voisinages réguliers, tels que, pour tout $j \geqslant i$, et tout $V_i \in \mathfrak{F}_{i,x}$, $V_j = (f_{ij}^{-1} V_i^{\ell_i})^{p_j}$ soit un ensemble régulier dans Ω_j .

(AH2) Chaque famille $(A_j)_{j\geqslant i} = (V_j^{\beta_j})_{j\geqslant i} = ((f^{-1} V_i^{\ell_i})^{p\beta_j})_{j\geqslant i}$, où $V_i \in \mathfrak{F}_{i,x}$ est un système approximatif de sous-espaces de $(\Omega_i , \beta_i , f_{ij})$.

Définition III.1. - **On dit qu'une** famille $(V_j)_{j\geqslant i} = ((f^{-1} V_i^{\ell_i})^{p_j})_{j\geqslant i}$ est un système approximatif régulier si $V_i \in \mathfrak{F}_{i,x}$ pour un point $x \in \Omega_i$. Pour toute **partie** F de Ω , on appelle ensemble prégulier dans F , tout ensemble V tel que V^β soit compact dans F , et tel qu'il existe un $i \in I$, un $x \in \Omega_i$, et un $V_i \in \mathfrak{F}_{i,x}$ pour lequel $V = (f_i^{-1} V_i^{\ell_i})^p$; on dit alors que $((f_{ij}^{-1} V_i^{\ell_i})^{p_j})_{j\geqslant i}$ est un système approximatif régulier associé à V , et on écrira $V = \lim(V_j)_{j\geqslant i}$.

Si f est une fonction continue, définie sur ∂V , à valeurs dans R , On note f_j la restriction de f à ∂V_j . La famille $(f_j)_{j\geqslant i}$ converge uniformément vers f ; comme les V_j sont réguliers, chaque f_j admet un prolongement unique et continu, $u_j = H_{f_j}^{V_j} \in \mathcal{H}(V_j)$ à $V_j^{\beta_j}$.

Définition III.2. - On dit que $(\Omega , \alpha , \gamma , \mathcal{H})$ est une liasse préharmonique à valeurs dans R si :

(h1) $(\Omega , \alpha , \gamma , \mathcal{H})$ est une liasse de fonctions à valeurs dans R ,

(h2) tout point x de Ω admet une base de semi-voisinages réguliers et MP,

(h3) pour tout point x de Ω , il existe un voisinage U et une fonction $u \in \mathcal{H}(U)$, telle que $u(x) > 0$,

(h4) pour tout $U \in \mathfrak{U}$, si $O \in \mathfrak{U}$ admet une enveloppe, O^p , compacte et contenue dans U , alors il existe une fonction $k \in \mathcal{H}(U)$ majorant

$$\{k \in \mathcal{H}(O) : \|k\|_{g(O^p)} \leqslant 1\} ,$$

(h5) si u est l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) d'une famille filtrante croissante (resp. décroissante), $(u_i)_{i\in I}$, où $u_i \in \mathcal{H}(U)$, $U \in \mathfrak{U}$, et si cette famille est uniformément majorée par un élément de R , alors $u \in \mathcal{H}(U)$.

Définition III.3. - On dira que la liasse $(\Omega , \alpha , \gamma , \mathcal{H})$ est harmonique, si :

(h6) pour tout $U \in \mathfrak{U}$, $\mathcal{H}(U)$ est un espace vectoriel qui contient les constantes de R .

Définition III.4. - Soit $(\Omega_i , \alpha_i , f_{ij})$ un système strictement approximatif d'espaces semi-topologiques localement compacts tel que $\lim \text{proj } \alpha_i = \lim \text{proj } \beta_i$, et soit $\mathcal{H}_i$ une structure harmonique sur Ω_i . On dit que $(\Omega_i , \alpha_i , \mathcal{H}_i , f_{ij})$ est un système approximatif d'espaces harmoniques s'il vérifie certains axiomes de convergence. On désigne par $\lim \text{proj } (\Omega_i , \alpha_i , \mathcal{H}_i , f_{ij})$ l'espace

$$\lim \text{proj}(\Omega_i , \alpha_i , f_{ij}) ,$$

muni de $\mathcal{H} = \lim \text{proj } \mathcal{H}_i$, et on étudie des conditions suffisantes, notées de (h1) à (h6), pour que l'espace $\lim \text{proj}(\Omega_i , \alpha_i , \mathcal{H}_i , f_{ij})$ soit un espace harmonique.

Application. - On considère l'exemple, repris dans cet exposé, la famille

$$(\Omega_i , \alpha_i , \mathcal{H}_i , f_{ij})$$

vérifie alors les axiomes (h1,..., h6), lorsque $\mathcal{H}_i(V)$ est l'ensemble des fonctions harmoniques discrètes sur V^p ; c'est donc un système approximatif d'espaces harmoniques ; le faisceau des solutions sur R^2 de $\Delta u = 0$ coïncide avec le faisceau $\mathcal{H} = \lim \text{proj } \mathcal{H}_i$.

Conclusion. - La thèse de E. M. J. BERTIN permet d'étudier la limite de systèmes de liasses harmoniques vérifiant des conditions de projectivité.

Cependant, le problème suivant présente aussi un grand intérêt et n'a pas encore été étudié :

Associer à une liasse harmonique, vérifiant des axiomes analogues à ceux de M. BRELOT, une "approximation", c'est-à-dire un système approximatif de liasses harmoniques sur des espaces ν_d discrets, et des systèmes approximatifs réguliers associés à une base d'ensembles réguliers de la liasse initiale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTIN (E. M. J.). - Approximation des espaces harmoniques (Thèse Sc. math. Utrecht, 1969).

[2] BERTIN (E. M. J.). - Espaces harmoniques généralisés, Koninkl. nederl. Akad. Wetens. Proc., Series A : Math. Sc., t. 74, 1971, p. 10-25 ; ou Indagationes Math., 1971.

(Texte reçu le 29 juin 1971)

Michèle MASTRANGELO-DEHEN
40 rue des Boulangers
75005 PARIS