

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

ARNAUD DE LA PRADELLE

Approximation des fonctions harmoniques à l'aide d'un théorème de G. F. Vincent-Smith

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 13 (1969-1970), exp. n° 3,
p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1969-1970__13__A2_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATION DES FONCTIONS HARMONIQUES
À L'AIDE D'UN THÉORÈME DE G. F. VINCENT-SMITH

par Arnaud de LA PRADELLE

Introduction. - Dans le paragraphe 1, nous exposerons, après des rappels sur la théorie des cônes de fonctions numériques, la démonstration du théorème d'approximation du type "Stone-Weierstrass" donné par G. F. VINCENT-SMITH dans [8]. Dans le paragraphe 2, nous améliorerons l'application qu'il en donne, en théorie axiomatique des fonctions harmoniques, au problème d'approcher toute fonction continue sur l'adhérence d'un ouvert relativement compact ω , par des fonctions harmoniques au voisinage de $\bar{\omega}$. Nous nous affranchirons de la condition que les fonctions surharmoniques au voisinage de $\bar{\omega}$, dont les restrictions à $\bar{\omega}$ sont continues, séparent linéairement ω^* . Dans le paragraphe 3, nous étudierons le problème de l'approximation d'une fonction $f \in C(\bar{\omega})$ par des fonctions harmoniques au voisinage de $\bar{\omega}$, et à l'aide d'une hypothèse de séparation locale, on montrera que ce problème est de caractère local.

1. Rappels et théorème (voir [3]).

L'espace de base X est compact. On note C un cône convexe, stable par enveloppe inférieure finie, $C \subset C(X)$.

On désigne par $\mathcal{M}^+$ le cône des mesures positives sur X , et on suppose qu'il existe $p \in C$, $p > 0$.

DÉFINITION 1. - Si μ et $\nu \in \mathcal{M}^+$, on dit que μ est balayée de ν (notée $\mu \underset{(C)}{<} \nu$), si

$$\mu(f) \leq \nu(f), \quad \forall f \in C.$$

$\mu < \nu$ définit une relation de préordre sur $\mathcal{M}^+$.

On montre que, pour toute $\nu \in \mathcal{M}^+$, il existe $\mu \underset{(C)}{<} \nu$, μ minimale, et même que si S est un sous-ensemble fermé de X , ayant la propriété que toute $v \in C$ est positive sur X si, et seulement si, elle est positive sur S , on peut choisir $\mu < \nu$, μ minimale, telle que $\mu(X - S) = 0$.

La relation fondamentale de la théorie du balayage s'écrit

$$\hat{f}(x) = \sup_{\mu < \varepsilon_x} \int f d\mu ,$$

avec

$$(\hat{f}(x))_C = \inf\{g, f < g \in C\} .$$

Quand il n'y a pas de confusion possible, on écrit simplement $\hat{f}$, et on a la caractérisation :

$$\begin{aligned} (\mu \in \mathcal{M}^+, \mu \text{ minimale}) &\iff (\mu(f) = \inf\{\mu(g) ; f < g \in C\}, \forall f \in -C) \\ &\iff (\mu(f) = \mu(\hat{f})) . \end{aligned}$$

DÉFINITION 2. - f est dite C-concave si, $\forall x \in X$ et $\forall \mu < \varepsilon_x$, on a

$$\int^* f d\mu \leq f(x) .$$

On note $\hat{C}$ le cône convexe des fonctions C-concaves s. c. i.

PROPOSITION 3. - S'il existe $q \in C$, $q < 0$, alors, pour toute $v \in \hat{C}$, il existe un ensemble $\{v_i\} \subset C$, filtrant croissant tel que

$$v = \sup v .$$

DÉFINITION 4. - A fermé $\subset X$ est une C-face si, pour tout $x \in A$ et toute $\mu < \varepsilon_x$, on a

$$\text{Supp } \mu \subset A .$$

PROPRIÉTÉS 5.

(a) A fermé $\subset X$ est une C-face si, et seulement si, il existe $v \in \hat{C}$ telle que

$$v^{-1}(0) = A .$$

(b) Si A est une C-face et si $v \in C$, il est évident que

$$(v)_A^{+\infty} = \begin{cases} v & \text{sur } A , \\ +\infty & \text{ailleurs} , \end{cases}$$

est C-concave s. c. i.

(c) Toute intersection non vide de C-faces est une C-face, et, par suite, toute C-face contient une C-face minimale (ZORN).

(d) $\underset{(C)}{<} \iff \underset{\hat{C}}{<}$, et par suite $\partial C = \partial \hat{C}$.

On note par A_x la plus petite C -face contenant x (elle n'est pas nécessairement minimale).

On suppose dorénavant qu'il existe $q \in C$, $q < 0$.

DÉFINITION 6. - On note ∂C , et on désigne par frontière de Choquet, l'ensemble des $x \in X$ tels que A_x soit minimale.

DÉFINITION 7. - On dit que x et y sont linéairement séparés par C , s'il existe $u, v \in C$ tels que

$$u(x) v(y) \neq u(y) v(x) .$$

Celle-ci est plus forte que la séparation, elle lui est équivalente si $1 \in C$.

PROPRIÉTÉS 8.

$$1^\circ \quad \partial C = \bigcap_{t \in -C} \{\hat{t} = t\} .$$

2° Si $x, y \in \partial C$, on a $A_x \neq A_y$ si, et seulement si, C sépare linéairement x et y .

3° Si $f \in \hat{C}$, on a $f \geq 0$ (resp. $f > 0$) sur X si, et seulement si, $f \geq 0$ (resp. > 0) sur ∂C .

Soient L et M deux sous-espaces vectoriels de $C(X)$.

On note $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ les deux plus petits cônes convexes stables par $\inf$, contenant respectivement L et M .

DÉFINITION 9. - On dit que L a la propriété de séparation faible de Riesz (notée "p. s. f. R"), si, $\forall (f_1, f_2, g_1, g_2) \subset L$ tel que

$$\sup(f_1, f_2) < \inf(g_1, g_2) ,$$

il existe $h \in L$ tel que

$$\sup(f_1, f_2) \leq h \leq \inf(g_1, g_2) .$$

Soit $\mathcal{S}$ un cône convexe stable par $\inf$, contenu dans $C(X)$, on désigne par L un sous-espace de fonctions $\mathcal{S}$ -affines continues.

DÉFINITION 10. - On dit que $(\mathcal{S}, L)$ est un simplexe géométrique si, pour toute $f, g \in \mathcal{S}$, $f < g$, il existe $h \in L$ tel que

$$f \leq h \leq g .$$

Il revient au même de dire que $(\mathcal{L}, L)$ a la p. s. f. R, ou que $(\mathcal{L}, L)$ est un simplexe géométrique.

Interprétation géométrique. - Si L sépare X , et contient les constantes, l'injection $X \xrightarrow{i} L'$ est continue, et l'enveloppe convexe fermée de $i(X)$ est un compact K par $\sigma(L', L)$; les formes linéaires affines sur K s'identifient aux éléments de L , et dire que L a la p. s. f. R, c'est exactement dire que K est un simplexe de Choquet.

DÉFINITION 11. - Etant donnés deux cônes $C_1, C_2 \subset \mathcal{C}(X)$ stables par inf, et tels qu'il existe $p_i > 0$, $p_i \in C_i$, et $q_i \in C_i$, $q_i < 0$ ($i = 1, 2$), on dira que ∂C_1 est complètement inclus dans ∂C_2 (noté $\partial C_2 \ll \partial C_1$), si $\partial C_2 \subset \partial C_1$, et si toute C_1 -face minimale contient une C_2 -face minimale unique.

Il s'agit bien d'une relation d'ordre sur les frontières de Choquet.

LEMME 12. - Soient C_1 et C_2 deux cônes convexes stables par inf, $C_1, C_2 \subset \mathcal{C}(X)$, tels qu'il existe $p_i, q_i \in C_i$, $p_i > 0$, $q_i < 0$ ($i = 1, 2$), et tels que $\widehat{C_1} \subset \widehat{C_2}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Pour toutes C_2 -faces minimales A_1, A_2 , $A_1 \neq A_2$, il existe des C_1 -faces B_1, B_2 , minimales distinctes, $A_i \subset B_i$ ($i = 1, 2$);

(2) $\partial C_2 \subset \partial C_1$, et C_2 sépare linéairement les points de ∂C_2 qui sont linéairement séparés par C_2 ;

(3) $\partial C_2 \ll \partial C_1$.

Démonstration. - On remarque d'abord que l'inclusion $\widehat{C_1} \subset \widehat{C_2}$ et la propriété 5 (d) entraînent que toute C_1 -face est une C_2 -face, et donc que toute C_1 -face contient une C_2 -face minimale, on en tire immédiatement que (1) $\iff$ (3).

(3) $\iff$ (2) résulte de la propriété 8, 2°.

On suppose dans ce qui suit qu'il existe $\ell \in L$, $\ell > 0$.

PROPOSITION 13. - Soient $\mathcal{S}$ un cône convexe stable par inf, $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}(X)$, tel qu'il existe $p, q \in \mathcal{S}$, $p > 0$, $q < 0$, et L un ensemble de fonctions $\mathcal{S}$ -affines continues, alors $(\mathcal{S}, L)$ est un simplexe géométrique, si, et seulement si:

1° L a la p. s. f. R;

2° $\partial \mathcal{S} \ll \partial \mathcal{L}$.

Démonstration. - La condition est nécessaire. Soient $x \in \partial \mathcal{S}$ et $f \in -\mathcal{L}$, on a $f(x) = (\widehat{f(x)})_{\mathcal{S}} = \inf\{v \in \mathcal{S}, v(x) > f(x)\} = \inf\{h \in L, h(x) > f(x)\} = (\widehat{f(x)})_{\mathcal{S}}$.

On en déduit que $x \in \partial \mathcal{L}$ et que, si $x_1, x_2 \in \partial \mathcal{S}$ sont linéairement séparés par $\mathcal{S}$, ils le sont également par $\mathcal{L}$.

Si $\{f_1, f_2, g_1, g_2\} \subset L$, $\sup(f_1, f_2) < \inf(f_1, f_2)$, on a

$$\inf(g_1, g_2) \in \hat{\mathcal{S}} \quad \text{et} \quad \sup(f_1, f_2) \in -\hat{\mathcal{S}}.$$

A l'aide du lemme de Dini et de la proposition 3, on en déduit $-u, v \in \mathcal{S}$ tels que

$$\sup(f_1, f_2) < u < v < \inf(f_1, f_2),$$

puis la p. s. f. R.

La condition est suffisante. Soient $-f, g \in \mathcal{S}$, $f < g$, et B une $\mathcal{L}$ -face minimale. On pose

$$\alpha = \inf\{\lambda; \lambda \ell \geq f \text{ sur } B\},$$

et

$$D = \{x \in B, (\alpha \ell - f)(x) = 0\} = \{x \in X, (\alpha \ell - f)_B^{+\infty}(x) = 0\};$$

D est une $\mathcal{S}$ -face qui contient une $\mathcal{S}$ -face minimale A , $A \subset D \subset B$. On introduit de même

$$\beta = \sup\{\lambda; \lambda \ell \leq g \text{ sur } B\},$$

et

$$D' = \{x \in X; (g - \beta \ell)_B^{+\infty}(x) = 0\}$$

On a encore $A \subset D' \subset B$. Comme $\alpha < \beta$, il existe γ tel que $\alpha < \gamma \ell < \beta$ sur B et $(\gamma \ell)_B^{+\infty} \in \hat{\mathcal{L}}$, donc $(\gamma \ell)_B^{+\infty} = \sup\{\omega_i \in \mathcal{L}, \omega_i \nearrow\}$ et, d'après le lemme de Dini, il existe $h_i \in L$ ($i = 1, 2, \dots, n$) tel que

$$f < \inf(h_1, \dots, h_n) < (\gamma \ell)_B^{+\infty}.$$

Montrons qu'il existe $h \in L$, $f < h < \inf(h_1, \dots, h_n)$. On considère pour cela la famille

$$\mathfrak{F} = \{h \in L, h < \inf(h_1, \dots, h_n)\}.$$

$\mathfrak{F}$ est filtrante croissante, parce que L a la p. s. f. R. $\bar{k} = \sup\{h; h \in \mathfrak{F}\}$ est donc $\mathcal{L}$ -affine s. c. i., et $\bar{k} = \inf(h_1, \dots, h_n)$ sur $\partial \mathcal{L}$ d'après la propriété 8, 1°, et, par suite, $\bar{k} > f$ sur $\partial \mathcal{S} \subset \partial \mathcal{L}$; finalement, $\bar{k} > f$ sur X . D'après le lemme de Dini, on en déduit une $h \in L$,

$$f < h < \inf(h_1, \dots, h_n).$$

On remarque d'autre part que $\inf(h_1, \dots, h_n) < g$ sur B , et que la famille

$$\mathfrak{F}' = \{h \in L, f < h\}$$

est filtrante décroissante, d'après ce que l'on vient de voir. $\underline{k} = \inf\{h; h \in \mathfrak{F}'\}$ est donc $\mathcal{L}$ -affine s. c. s., et $\underline{k} < g$ sur B . B étant une $\mathcal{L}$ -face minimale arbitraire, on a $\underline{k} - g < 0$ sur $\partial\mathcal{S} \subset \partial\mathcal{L}$, donc sur X . D'après le lemme de Dini, il existe donc $h \in L$ tel que

$$f < h < g.$$

C. Q. F. D.

THÉOREME 14. - Soient $\mathcal{S} \subset W \subset C(X)$ deux cônes convexes stables par $\inf$, tels qu'il existe $p, q \in \mathcal{S}$, $p > 0$, $q < 0$. On désigne par M l'espace des fonctions W -affines continues, et L un sous-espace de fonctions $\mathcal{S}$ -affines continues. Si $(\mathcal{S}, L)$ est un simplexe géométrique, si $\partial W \subset \partial\mathcal{S}$, et si $\mathcal{S}$ sépare linéairement les points de ∂W qui sont linéairement séparés par W , alors (W, L) est un simplexe géométrique, et L est uniformément dense dans M .

Démonstration. - On a $\partial W \ll \partial\mathcal{S} \ll \partial\mathcal{L}$, et L a la p. s. f. R d'après la proposition 13. On conclut, d'après la même proposition, que (W, L) est un simplexe géométrique. En appliquant le lemme de Dini pour tout $\varepsilon > 0$, et $f \in M$, il existe $s, t \in W$ et $\ell \in L$, tels que

$$f - \varepsilon p < s < \ell < t < \varepsilon p + f,$$

grâce à la proposition 3.

2. Application axiomatique.

Rappel axiomatique de la théorie des Roumain ([2]). - L'espace de base Ω est localement compact et, à tout ouvert $\omega \subset \Omega$, on associe un espace vectoriel $\mathcal{H}(\omega) \subset C(\omega)$ vérifiant l'axiome des faisceaux. Les fonctions de $\mathcal{H}(\omega)$ sont appelées fonctions harmoniques.

Un ouvert relativement compact $\omega \subset \Omega$ est dit régulier, si sa frontière ω^* est non vide et si, pour toute $f \in C(\omega^*)$, il existe un prolongement continu unique à $\bar{\omega}$, tel que sa restriction à ω , notée H_f^ω , appartienne à $\mathcal{H}(\omega)$, et que l'on ait $H_f^\omega \geq 0$ dans ω dès que f est ≥ 0 . On peut donc écrire

$$H_f^\omega(x) = \int f \, d\rho_x^\omega,$$

où ρ_x^ω est une mesure de Radon portée par ω^* . ρ_x^ω est appelée la mesure harmonique au point $x \in \omega$.

Une fonction v est dite hyperharmonique dans un ouvert ω , si elle est s. c. i., $> -\infty$, et si, pour tout $x \in \omega$, il existe un voisinage $V_v(x)$ de x contenu dans ω , tel que, pour tout ouvert régulier δ , $\bar{\delta} \subset V_v(x)$ et, pour tout $y \in \delta$, on ait

$$v(y) \geq \int^* v \, d\rho_y^\delta.$$

Un ouvert ω est dit de type M. P., si toute fonction v hyperharmonique dans ω est ≥ 0 , si v est ≥ 0 en dehors d'un compact K_v de X , et si, pour tout $x \in \omega^*$, on a

$$\liminf_{y \rightarrow x} v(y) \geq 0.$$

On suppose que les axiomes suivants sont vérifiés :

(H₀) Pour tout $x \in \Omega$, il existe h harmonique au voisinage de x telle que $h(x) > 0$.

(H₁) Les ouverts réguliers forment une base d'ouverts de Ω .

(H₂) Il existe un recouvrement de Ω par des ouverts de type M. P.

(H₃) Pour tout ouvert ω , l'enveloppe supérieure d'un ordonné filtrant croissant $\{h_i\}$ de fonctions harmoniques, majorées par une constante, est harmonique.

Dans l'axiomatique de H. BAUER, les fonctions hyperharmoniques dans Ω séparent linéairement Ω ⁽¹⁾, et on en déduit le principe du minimum. Ici on suppose, à défaut de séparation, que le principe du minimum est vérifié selon (H₂). Une théorie axiomatique, vérifiant les conditions de BAUER localement, vérifie évidemment (H₀), (H₁), (H₂).

Indiquons les propriétés suivantes :

(H₀) et (H₃) entraînent la locale connexité de Ω .

Si ω est un ouvert de type M. P., tout sous-ouvert de ω est lui-même de type M. P.

Problème de Dirichlet pour ouvert. - Soit ω un ouvert relativement compact de type M. P., $\subset \Omega$, de frontière ω^* non vide. Pour toute fonction numérique f , définie sur ω^* , on note $\mathcal{H}_f^{(v)}$ la famille des v hyperharmoniques dans ω , vérifiant, en tout point-frontière $y \in \omega^*$,

$$\liminf_{x \rightarrow y} v(x) \geq f(y), \text{ et } > -\infty.$$

(¹) Avec la convention $0 \pm \infty = 0$.

On pose $\overline{H}_f^{\omega}(x) = \inf\{v ; v \in \overline{\mathcal{H}}_f^{\omega}\}$.

DÉFINITION 15. - f est dite résolutive, si $\overline{H}_f^{\omega}$ est finie, et si $\underline{H}_f^{\omega} = \overline{H}_f^{\omega}$. On note $\underline{H}_f^{\omega}$ la valeur commune.

Les fonctions résolutives forment un espace vectoriel.

On notera par $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{W}$) le cône convexe des fonctions continues sur $\overline{\omega}$, prolongeables surharmoniquement au voisinage de $\overline{\omega}$ (resp. surharmoniques dans ω). $\mathcal{S}$ et $\mathcal{W}$ sont stables par inf, et $\mathcal{S} \subset \mathcal{W}$. On suppose de plus qu'il existe $p, q \in \mathcal{S}$, $p > 0$, $q < 0$.

On démontre, comme dans le cas classique, que l'espace vectoriel fermé (dans $\mathcal{C}(\omega^*)$) engendré par $\mathcal{W}|_{\omega^*}$ est un sous-espace de fonctions résolutives.

DÉFINITION 16. - $x_0 \in \omega^*$ est dit point-frontière $\mathcal{E}$ -régulier, si on

$$\lim_{x \rightarrow x_0} H_f^{\omega}(x) = f(x_0), \quad \text{pour toute } f \in \mathcal{E},$$

où $\mathcal{E}$ est un sous-cône de $\overline{\mathcal{W}}$.

Si x_0 est $\mathcal{E}$ -régulier, il est aussi $\mathcal{E}$ -régulier, et on note $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ l'ensemble des points $\mathcal{E}$ -réguliers.

Problème de Dirichlet pour compact ([4]). - Soient $E \subset \Omega$, E compact, $E^* \neq \emptyset$ tel qu'il existe un ouvert ω de type M. P., $\omega \supset E$, et f définie sur E^* . On note $\overline{\mathcal{H}}_f^E$ la famille des fonctions v hyperharmoniques au voisinage de E , et vérifiant

$$\liminf_{E \ni x \rightarrow y \in E^*} v(x) \geq f(y), \quad \text{pour tout } y \in E^*,$$

et

$$\overline{K}_f^E(x) = \inf\{v(x) ; v \in \overline{\mathcal{H}}_f^E\}, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

On introduit de même $\underline{K}_f^E(x) = \overline{K}_{(-f)}^E(x)$.

DÉFINITION 17. - f est dite résolutive, si $\overline{K}_f^E$ est finie, et si $\underline{K}_f^E = \overline{K}_f^E$, et on note $\underline{K}_f^E$ la valeur commune.

Pour tout fermé $F \subset \Omega$, on note $\mathcal{S}(F)$ (resp. $\mathcal{L}(F)$) le cône (resp. l'espace vectoriel) des fonctions continues sur F qui sont les restrictions à F de fonctions hyperharmoniques au voisinage de F (resp. harmoniques au voisinage de F). On suppose qu'il existe $p, q \in \mathcal{S}(E)$, $p > 0$, $q < 0$.

Les fonctions résolutives forment un espace vectoriel, et on démontre comme dans le cas classique que toute fonction $v \in \mathcal{S}(E)$ est résolutive.

DÉFINITION 18. - $x_0 \in E^*$ est dit point-frontière $\mathcal{E}$ -stable pour E , si on a

$$K_f^E(x_0) = f(x_0), \quad \text{pour toute } f \in \mathcal{E},$$

où $\mathcal{E}$ est un sous-cône de $\overline{\mathcal{S}}$.

Si x_0 est $\mathcal{E}$ -stable, il est aussi $\overline{\mathcal{E}}$ -stable, et on note $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ l'ensemble des points $\mathcal{E}$ -stables.

PROPOSITION 19 ([4]). - Si $v \in \mathcal{S}(E)$, et si $\{\omega_i\}$ est un ensemble filtrant décroissant d'ouverts tels que $\bigcap \omega_i = E$, on a

$$K_v^E(x) = \sup_{\omega_i} \overline{H_v^{\omega_i}}(x) = \lim_{\omega_i} \overline{H_v^{\omega_i}}(x).$$

COROLLAIRE 20. - $(\mathcal{S}(E), L(E))$ est un simplexe géométrique.

En effet, si $-u, v$ sont surharmoniques au voisinage de E , telles que $-u|_E$ et $v|_E$ appartiennent à $\mathcal{S}(E)$, et que $u|_E < v|_E$, il existe ω_i tel que

$$u \leq \overline{H_v^{\omega_i}} \leq v.$$

COROLLAIRE 21. - $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) = E^* \cap \partial\mathcal{S}(E)$.

Démonstration. - Soit u sous-harmonique au voisinage de E , telle que $u|_E \in -\mathcal{S}(E)$. On a, en notant de la même façon u et ses traces sur E^* et ω_i^* ,

$$K_u^E = \inf_{\omega_i} \overline{H_u^{\omega_i}} = \inf\{v \in \mathcal{S}, u < v\} = \hat{u}.$$

On conclut que $K_u = u$ pour toute $u \in -\mathcal{S}(E)$ si, et seulement si, $u = \hat{u}$.

COROLLAIRE 22 (Pour le cas classique, voir M. BRELOT [4]). - $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\mathcal{E}) = E^*$ si, et seulement si, $L|_{E^*}$ est uniformément dense dans $\overline{\mathcal{E} - \mathcal{E}}|_{E^*}$.

Démonstration. - Pour toute u' sousharmonique au voisinage de E , telle que $u'|_E = u \in \mathcal{E}$, $\overline{H_{u'}^{\omega_i}}$ tend uniformément vers $K_u = u$ sur E^* , d'après le lemme de Dini, d'où le résultat par différence.

Réciproquement, si pour tout $\varepsilon > 0$ et $v \in S$, on a, sur E^* , $h - \varepsilon p < v < h + \varepsilon p$ pour un $h \in L(E)$, on en déduit $h - \varepsilon p < K_v < h + \varepsilon p$, puis $K_v = v$ sur E^* .

PROPOSITION 23. - $\partial W \cap \omega^* \subset R(S)$.

Démonstration. - Soient $x_0 \in \partial W \cap \omega^*$, $u \in -W$ et $v \in W$, $u < v$. On a $u \leq H_u^\omega \leq v$ dans ω . On en déduit que $H_u^\omega \leq \hat{u}$ dans ω . $\hat{u}$ étant s. c. s., on peut écrire

$$\limsup_{x \in \omega \rightarrow x_0} H_u^\omega(x) \leq \limsup_{\omega \ni x \rightarrow x_0} \hat{u}(x) = \hat{u}(x_0) = u(x_0).$$

Il est trivial que

$$\liminf_{\omega \ni x \rightarrow x_0} H_u^\omega(x) \geq u(x_0),$$

et on conclut que x_0 est régulier.

On aura besoin du lemme suivant.

LEMME 24. - Soient $\mathcal{E}$ un cône convexe, $\mathcal{E} \subset W$, et A une $\mathcal{E}$ -face minimale non vide de $\bar{\omega}$, alors $A \cap \omega^* \neq \emptyset$.

Démonstration. - Soit B une W -face minimale contenue dans A . $0_B^{+\infty} \in \hat{W}$ est hyperharmonique et, si $B \cap \omega^* = \emptyset$, on aurait $\liminf (0_B^{+\infty} + q) = +\infty$, et ω étant de type M. P., on en déduit $0_B^{+\infty} > -q$, ce qui est impossible si B est non vide. On conclut que $B \cap \omega^* \neq \emptyset$, et a fortiori $A \cap \omega^* \neq \emptyset$.

THÉORÈME 25. - Si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- 1° S sépare linéairement les points de $R(S)$ qui sont linéairement séparés par W ;
- 2° $R(S) = R_S(S)$;

alors L est uniformément dense dans M .

Démonstration. - D'après la proposition 23 et le corollaire 21, la condition 2° implique que $\partial W \cap \omega^* \subset \partial S \cap \omega^*$. Le lemme précédent implique que, si A est une W -face minimale, il existe nécessairement B telle que $B \cap A \neq \emptyset$, et donc telle que $A \subset B$. On en déduit que $\partial W \subset \partial S$. Enfin la condition 1° entraîne que $\partial W \ll \partial S$, d'après la propriété 8, 2°, et le lemme 12. On conclut que L est dense dans M , d'après le corollaire 20 et le théorème 14.

COROLLAIRE 26 (G. F. VINCENT-SMITH [8]). - Si S sépare linéairement ω^* , et si $R_S = R$, L est uniformément dense dans M .

Remarque. - Le corollaire 26 s'étend au cas d'un ouvert non relativement compact, à frontière métrisable, lorsque l'espace de base est dénombrable à l'infini (voir [6]).

DÉFINITION 27 ([3], p. 521). - Un ouvert relativement compact ω , $\omega^* \neq \emptyset$, est dit faiblement déterminant si, pour toute fonction s surharmonique ≥ 0 , localement bornée au voisinage de $\bar{\omega}$, harmonique dans ω , il existe une famille croissante $\{h_i\}$ de fonctions continues sur $\bar{\omega}$, harmoniques dans ω , et telle que

$$s(x) = \sup h_i(x), \quad \text{pour tout } x \in \omega^*.$$

THÉOREME 28. - Si S sépare linéairement les points de ω^* qui sont linéairement séparés par W , et si ω est faiblement déterminant, alors L est uniformément dense dans M si, et seulement si,

$$R(S) = R_S(S).$$

On s'appuie sur le résultat suivant.

LEMME 29. - Si S sépare linéairement les points de ω^* qui sont linéairement séparés par W , et si ω est faiblement déterminant, alors (W, M) est un simplexe géométrique, et

$$\partial W \cap \omega^* = R(S).$$

Démonstration. - Soient $s \in W$, et u sousharmonique continue ≤ 0 , au voisinage de $\bar{\omega}$, telle que $u|_{\bar{\omega}} = t$ vérifie

$$t < s \quad \text{sur } \omega^*.$$

La régularisée s. c. s. t' de la fonction, égale à H_t^W dans ω , et à u ailleurs, est ≤ 0 , sousharmonique et localement bornée, et on a

$$(1) \quad t \leq t' < s \quad \text{sur } \omega^*.$$

Comme ω est faiblement déterminant, on en déduit que

$$t' = \hat{t} \quad \text{sur } \omega^*,$$

et on peut trouver $h \in M$ tel que

$$t \leq t' \leq h \leq s.$$

Notons $\mathcal{U}_c$ le cône des fonctions sousharmoniques continues et ≤ 0 au voisinage de $\bar{W}$. Si $x_0 \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$, on a

$$(2) \quad t(x_0) = t'(x_0) = (\hat{t}(x_0))_W, \quad \text{pour toute } t \in -\mathcal{U}_c.$$

On vérifie que

$$(3) \quad \bigcap_{t \in -W} \{t = (\hat{t})_W\} = \bigcap_{t \in W-W} \{t = (\hat{t})_W\},$$

et que l'application $\varphi \mapsto (\hat{\varphi}(x))_{W|_{\omega^*}}$ de $\mathcal{C}(\omega^*)$ dans $\mathbb{R}$ est continue pour tout $x \in \omega^*$.

On en déduit, à l'aide de (3), appliqué aux restrictions à ω^* des fonctions de $\mathcal{U}_c$ et de W , que si $\mathcal{U}_c - \mathcal{U}_c|_{\omega^*}$ est dense dans $\overline{W - W}|_{\omega^*}$, on a

$$(4) \quad \bigcap_{t \in -W|_{\omega^*}} \{t = (\hat{t})_{W|_{\omega^*}}\} = \bigcap_{t \in -\mathcal{U}_c|_{\omega^*}} \{t = (\hat{t})_{W|_{\omega^*}}\}.$$

Or il est évident d'après le principe du minimum que, pour toute $t \in -W$, on a, en posant $t' = t|_{\omega^*}$,

$$\{t = (\hat{t})_W\} \cap \omega^* = \{t' = (\hat{t}')_{W|_{\omega^*}}\},$$

et donc, d'après (4), on peut écrire

$$\omega^* \cap \bigcap_{t \in -W} \{t = (\hat{t})_W\} = \omega^* \cap \bigcap_{t \in -\mathcal{U}_c} \{t = (\hat{t})_W\}.$$

D'après (2) et la propriété 8, 1°, on en déduit que $x_0 \in \omega^* \cap \partial W$, et finalement $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subset \omega^* \cap \partial W$; puis l'égalité, d'après la proposition 23.

Il suffit pour cela de montrer que $\mathcal{U}_c - \mathcal{U}_c|_{\omega^*}$ est bien dense dans $\overline{W - W}|_{\omega^*}$. Comme il existe une fonction $h > 0$, harmonique au voisinage de $\bar{W}$, toute fonction $v \in \mathcal{S}$ s'obtient comme le sup d'un ordonné filtrant croissant de fonctions $v_i \in -\mathcal{U}_c|_{\omega^*}$, et $\mathcal{S}$ sépare linéairement les points de ω^* qui sont linéairement séparés par W . On en déduit qu'il en est de même pour $\mathcal{U}_c$, et on obtient la densité grâce au théorème de Stone-Weierstrass.

Montrons que (W, M) est un simplexe géométrique.

On considère μ, ν minimales par rapport à W , portées par ω^* ; elles sont aussi minimales par rapport à $W|_{\omega^*}$, et vérifient

$$\mu(h) = \nu(h), \quad \text{pour toute } h \in M.$$

On a donc

$$\mu(t) = \mu((\hat{t})_{W|_{\omega^*}}) \quad \text{et} \quad \nu(t) = \nu((\hat{t})_{W|_{\omega^*}}), \quad \text{pour toute } t \in -W|_{\omega^*}.$$

Pour toute $t \in -\mathcal{U}_c|_{\omega^*}$, on a, d'après (1),

$$\mu((\hat{t})_{W|_{\omega^*}}) = \inf_{t \leq h \in M} \mu(h) = \inf_{t \leq h \in M} \nu(h) = \nu((\hat{t})_{W|_{\omega^*}}),$$

et donc

$$\mu(t) = \nu(t), \quad \text{pour toute } t \in -\mathcal{U}_c|_{\omega^*};$$

puis

$$\mu(t) = \nu(t), \quad \text{pour toute } t \in -W|_{\omega^*},$$

par densité. Ceci montre que $(W|_{\omega^*}, M|_{\omega^*})$ est un simplexe géométrique, il en est de même pour (W, M) d'après le principe du minimum.

Démonstration du théorème 28. — La condition est suffisante, d'après le théorème 25.

La condition est nécessaire. Si $L = M$, désignons par $\mathcal{M}$ le plus petit cône convexe stable par $\inf$, et contenant M , on a $\partial \mathcal{L} = \partial \mathcal{M}$. (W, M) étant un simplexe géométrique, $\partial W \ll \partial \mathcal{M}$, et donc $\partial W \ll \partial \mathcal{L}$. Comme $\partial S \ll \partial \mathcal{L}$, toute W -face minimale rencontre une S -face minimale, et $\partial W \ll \partial S$. Si $x_0 \in \mathcal{R}(S)$, $x_0 \in \omega^* \cap \partial W$, et $x_0 \in \mathcal{R}_s(S)$. On obtient ainsi l'inclusion $\mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}_s(S)$. L'inclusion inverse se voit en remarquant que, pour toute $t \in -\mathcal{U}_c$, on a

$$K_t^{\bar{\omega}} \geq t' \geq t$$

(t' étant définie comme dans la relation (1) du lemme 29), et en utilisant la densité de $\mathcal{U}_c - \mathcal{U}_c|_{\omega^*}$ dans $S - S|_{\omega^*}$.

3. Caractère local de l'approximation.

On supposera que la propriété $(H_2^!)$ est vérifiée :

$(H_2^!)$ Pour tout $x \in \Omega$, il existe un voisinage v_x de x , tel qu'il existe un potentiel localement borné p dans v_x , avec $p(x) > 0$.

Il est équivalent de dire que, pour tout $x \in \Omega$, il existe un voisinage compact K_x de x , tel que $S(K_x)$ sépare linéairement K_x . L'axiomatique de Bauer est donc vérifiée localement (*), et en particulier $(H_2^!)$ entraîne (H_2) .

(*) avec l'axiome de convergence affaibli (H_4) .

PROPOSITION 30. - Si (H_2') est vérifiée, et si $x_0 \in E^*$ est tel que, pour tout voisinage V de x_0 , il existe un compact K , voisinage de x_0 , $K \subset V$, tel que x_0 soit $S(E \cap K)$ -stable pour $E \cap K$, alors x_0 est $S(E)$ -stable pour E .

Démonstration. - Si x_0 était $S(E)$ -instable pour E , il existerait une fonction hyperharmonique v au voisinage de E , telle que

$$\liminf_{C(E) \ni x \rightarrow x_0} v(x) > v(x_0) .$$

On peut alors se donner un voisinage K compact de x_0 , tel que x_0 soit $S(E \cap K)$ -stable pour $E \cap K$, et que $S(K)$ sépare linéairement les points de K d'après (H_2') . On se donne alors $\varphi \in C((E \cap K)^*)$ telle que $v(x_0) < \varphi(x_0)$, $\varphi \leq \hat{v}$ où $\hat{v}$ désigne la fonction s. c. i. définie sur $(E \cap K)^*$ par

$$\hat{v}(y) = \liminf_{C(E \cap K) \ni x \rightarrow y} v(x) .$$

On a alors $K_{\varphi}^{E \cap K} \leq v$ sur $E \cap K$, et donc

$$K_{\varphi}^{E \cap K}(x_0) < \varphi(x_0) ,$$

et x_0 est $S(E \cap K)$ -instable d'après (H_2') , ce qui est impossible.

Remarque. - On a seulement besoin que, pour tout $x \in E^*$, il existe un voisinage v_x de x et un potentiel localement borné p dans v_x , $p(x) > 0$.

Grâce à l'inégalité $K_V^E(x_0) \leq K_V^{E \cap V}(x_0) \leq v(x_0)$, pour tout voisinage compact V de x_0 , et toute fonction $v \in S(E)$, on a la réciproque suivante.

PROPOSITION 31. - Si $x_0 \in E^*$ est $S(E)$ -stable pour E , x_0 est $S(E)$ -stable pour $E \cap V$, où V est un voisinage compact de x_0 .

Soient $f \in C(E)$, et F un fermé de E ; on désigne par $S'(F)$ (resp. $\mathcal{L}'(F)$) le plus petit cône convexe stable par inf, contenant $f|_F$ et $S(F)$ (resp. $f|_F$ et $\mathcal{L}(F)$), et qui est contenu dans $C(F)$.

THÉORÈME 32. - Si (H_2') est vérifiée, et si $f \in C(E)$ est telle que $S(E)$ sépare linéairement les points de $E^* \cap \partial \mathcal{L}'(E)$ qui sont linéairement séparés par $\mathcal{L}'(E)$, alors $f \in L(E)$ si, et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage compact V de x , tel que

$$f|_{V \cap E} \in \overline{L(V \cap E)} .$$

On aura besoin du lemme suivant.

LEMME 33. - Soient X compact, et C un cône convexe stable par inf, $C \subset \mathcal{C}(X)$, tel qu'il existe $p, q \in C$, $p > 0$, $q < 0$, et soit F un fermé $\subset X$. Si A est une C -face minimale, alors $A \cap F$ est une $C|_F$ -face minimale.

Démonstration. - $A \cap F$ est évidemment une $C|_F$ -face. Celle-ci est minimale, d'après l'inégalité

$$u|_F(x) \leq (\widehat{u|_F(x)})_{C|_F} \leq (\widehat{u(x)})_C,$$

pour toute $u \in -C$ et $x \in F$. Ceci montre que $\partial C \cap F \subset \partial C|_F$. La propriété 8, 2°, permet aisément de conclure.

Démonstration du théorème 32. - On remarque d'abord que f est nécessairement harmonique dans l'intérieur $\mathring{E}$ de E si $\mathring{E} \neq \emptyset$, et que, dans ce cas, $f \in M(E)$. Il s'agit de montrer que l'on a $\partial \mathcal{L}'(E) \ll \partial \mathcal{L}(E)$, d'après le théorème 14. Soit donc A' une $\mathcal{L}'(E)$ -face minimale, on a $A' \cap E^* \neq \emptyset$ (lemme 24). Soient $y_0 \in A' \cap E^*$, et un voisinage compact V de y_0 tel que $f|_{V \cap E} \in \overline{L(V \cap E)}$. D'après (H_2') , il existe un voisinage compact V' de y_0 , $V' \subset V$, tel que $S(V')$ sépare linéairement V' , et on aura encore $f|_{V' \cap E} \in \overline{L(V' \cap E)}$. On posera donc $V = V'$. D'après le lemme 33, $A' \cap V \cap E$ est une $\mathcal{L}'(E)|_{V \cap E}$ -face minimale et, d'après l'inclusion $\mathcal{L}'(E)|_{V \cap E} \subset \mathcal{L}'(V \cap E)|_{V \cap E}$, $A' \cap V \cap E$ est une $\mathcal{L}'(V \cap E)|_{V \cap E}$ -face minimale, notée A'_V . D'après l'hypothèse, on a $\overline{\mathcal{L}'(V \cap E)|_{V \cap E}} = \overline{\mathcal{L}(V \cap E)|_{V \cap E}}$, et par suite A'_V est aussi une $\mathcal{L}(V \cap E)|_{V \cap E}$ -face minimale qui contient une seule $S(V \cap E)|_{V \cap E}$ -face minimale, notée C_V (d'après la proposition 13 et le corollaire 20). D'autre part, on a $C_V \cap E^* \neq \emptyset$ (corollaire 21); tout point de $C_V \cap E^*$ est $S(V \cap E)$ -stable pour $E \cap V$; d'après la proposition 30, tous ces points sont aussi $S(E)$ -stables pour E . Il existe donc une $S(E)$ -face minimale, soit C , telle que $C \cap A \neq \emptyset$, et donc telle que $C \cap A' \neq \emptyset$. C est contenue dans une $\mathcal{L}(E)$ -face minimale, soit A , et $A \cap A' \neq \emptyset$. On conclut que $A' \subset A$, puis que $\partial \mathcal{L}'(E) \subset \partial \mathcal{L}(E)$.

On a l'inclusion forte. En effet, on vient de voir que si A' est une $\mathcal{L}'(E)$ -face minimale, il existe une $S(E)$ -face C telle que $A' \cap C \cap E^* \neq \emptyset$. Si A'_1 et A'_2 sont deux $\mathcal{L}(E)$ -faces minimales distinctes, il leur correspond des $S(E)$ -faces C_1 et C_2 , $A'_i \cap C_i \cap E^* \neq \emptyset$ ($i = 1, 2$). C_1 et C_2 sont donc distinctes, parce que $S(E)$ sépare linéairement les points de $\partial \mathcal{L}' \cap E^*$ qui sont linéairement séparés par $\mathcal{L}'$ (lemme 12). $(L(E), S(E))$ étant un simplexe géométrique, il existe deux $\mathcal{L}(E)$ -faces minimales et distinctes telles que $A_i \supset C_i$ ($i = 1, 2$). On en déduit $A_i \cap A'_i \neq \emptyset$ ($i = 1, 2$), puis $A_i \supset A'_i$ ($i = 1, 2$).

COROLLAIRE 34. - Si $(H_2^!)$ est vérifiée, si $f \in C(E)$, et si $f|_{E^*} \in \overline{S(E) - S(E)}|_{E^*}$, alors $f \in L(E)$ si, et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage compact V de x , tel que

$$f|_{V \cap E} \in \overline{L(V \cap E)}.$$

COROLLAIRE 35. - Si $S(E)$ sépare linéairement E^* , et si $f \in C(E)$, alors $f \in L(E)$ si, et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage compact V de x , tel que

$$f|_{V \cap E} \in \overline{L(V \cap E)}.$$

Si $S(E)$ sépare linéairement E^* , on peut en effet voir, comme dans le cas classique, que la stabilité est de caractère local, ce qui est mieux que la proposition 30.

Le théorème 32 a été montré, dans le cas classique, par Robert Loyd LUDWIG [7] en utilisant Hahn-Banach. Il s'étend sans difficulté au cas non compact dans le même cadre que [6], en supposant E^* métrisable et Ω dénombrable à l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAUER (H.). - Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 22).
- [2] BOBOC (N.), CONSTANTINESCU (C.) and CORNEA (A.). - Axiomatic theory of harmonic functions. Non negative superharmonic functions, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 15, 1965, p. 283-312.
- [3] BOBOC (N.) and CORNEA (A.). - Convex cones of lower semicontinuous functions, Revue roum. Math. pures et appl., t. 13, 1967, p. 471-525.
- [4] BRELOT (M.). - Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes, Bull. Soc. math. France, t. 73, 1945, p. 55-70.
- [5] DENY (J.). - Systèmes totaux de fonctions harmoniques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 1, 1949, p. 103-113.
- [6] de LA PRADELLE (A.). - A propos du mémoire de G. F. Vincent-Smith sur l'approximation des fonctions harmoniques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 19, 1969, fasc. 2, p. 355-370.
- [7] LUDWIG (Robert Loyd). - Approximation of harmonic functions, Dissertation, University of California, Los Angeles, 1969.
- [8] VINCENT-SMITH (G. F.). - Uniform approximation of harmonic functions, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 19, 1969, fasc. 2, p. 339-353.

(Texte reçu le 9 février 1970)