Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Bernard Saint-Loup

Sur le problème de Dirichlet de la frontière de Choquet

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. n° 7, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A7_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
12e année, 1967/68, n° 7
1er février 1968

SUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET DE LA FRONTIÈRE DE CHOQUET

par Bernard SAINT-LOUP

Introduction. - H. BAUER avait étudié le problème de Dirichlet abstrait en cherchant des conditions portant sur les valeurs prises par les fonctions sur la frontière de Šilov. E. M. ALFSEN donne des conditions nécessaires et suffisantes à partir des valeurs prises par les fonctions sur la frontière de Choquet. E. M. ALFSEN n'utilise pas les résultats de H. BAUER, mais sa démonstration est techniquement assez voisine.

La deuxième partie de cet exposé consiste en la généralisation au cas non métrisable du problème du prolongement affine d'une application d'un convexe compact dans un convexe compact.

Définitions.

X : espace topologique compact séparé.

L : espace vectoriel de fonctions continues sur X à valeurs réelles possédant les propriétés suivantes :

L sépare les points,

L contient les constantes,

L est fermé.

∂X : frontière fine (de Choquet) associée à L .

$\overline{\partial X}$: frontière de Šilov pour L (car L contient les constantes et sépare les points).

$M(X)$: espace vectoriel des mesures de Radon sur X ,

$$\mu \sim \nu \iff \mu \text{ et } \nu \in M(X) \text{ et } \int F\, d\mu = \int F\, d\nu\ , \quad \forall\ F \in L\ .$$

$N(X)$: mesures L-orthogonales,

$$N(X) = \{\mu\ ,\ \mu \in M(X) \text{ et } \int F\, d\mu = 0\ ,\ \forall\ F \in L\}\ .$$

$M(\partial X)$: mesures frontières,

$$M(\partial X) = \{\mu\ ,\ \mu \in M(X) \text{ et } \mu(A) = \partial\ ,\ \forall\ A \text{ ensemble de Baire de } X\ ,\ A \cap \partial X = \emptyset\}.$$

$$M^+(\overline{\partial X}) = \{\mu\ ,\ \mu \in M(X)\ ,\ \mu \geqslant 0\ , \text{ support de } \mu \text{ contenu dans } \overline{\partial X}\}\ .$$

1. Rappel des résultats de Bauer.

Définitions.

$$\mathfrak{M}_x = \{\mu \ , \quad \mu \in M^+(\overline{\partial X}) \quad \text{et} \quad \mu \sim \varepsilon_x\} \ ,$$

$$\hat{L} = \{F \ , \quad F \in \mathcal{C}(X) \quad \text{et} \quad \forall\, x \in X \ , \quad \forall\, \mu \in \mathfrak{M}_x \ , \text{ on a } F(x) = \int F\, d\mu\} \ .$$

THÉORÈME. - Soit $F \in \mathcal{C}(\overline{\partial X})$ et possédant la propriété suivante :

(P) $$\forall\, x \in X \ , \quad \forall\, \mu \ \text{ et } \ \nu \in \mathfrak{M}_x \ , \qquad \int F\, d\mu = \int F\, d\nu \ .$$

Alors $\overline{F}$ défini par $\overline{F}(x) = \int F\, d\mu \quad (\mu \in \mathfrak{M}_x)$ est bien défini et appartient à $\hat{L}$.

Exemple : Dans R^2 , on considère le bord X du carré K

$$[(0 \ , \ 0) \ , \ (0 \ , \ 1) \ , \ (1 \ , \ 0) \ , \ (1 \ , \ 1)] \ .$$

Soit L l'espace des fonctions définies sur X qui sont les restrictions à X des fonctions affines sur R^2 .

Il est immédiat de vérifier que $\hat{L}$ est l'ensemble des fonctions continues sur X qui sont affines sur chacun des côtés, car une mesure $\geqslant 0$ de barycentre x est nécessairement portée par le côté du carré qui porte x .

Remarquons que pour obtenir une fonction qui puisse être prolongée en une fonction affine de R^2 , il aurait fallu une condition supplémentaire, par exemple

$$F(0 \ , \ 0) + F(1 \ , \ 1) = F(0 \ , \ 1) + F(1 \ , \ 0) \quad ,$$

ce qui peut s'écrire

$$\int F\, d\mu = 0 \ , \qquad \mu = \varepsilon_{0,0} + \varepsilon_{1,1} - \varepsilon_{0,1} - \varepsilon_{1,0} \ .$$

μ est portée par la frontière de Šilov de L , et est orthogonale à toutes les fonctions de L . Mais on ne peut parler du barycentre de μ , car $\varepsilon_{1,0} + \varepsilon_{1,1}$ n'a pas de barycentre dans X .

2. Conditions nécessaires pour qu'une application F bornée de ∂X dans R puisse être prolongée en une application $\overline{F}$ de L telle que $\overline{F}_{|\partial X} = F$.

1° Définition. - x point de Šilov singulier pour F réelle bornée définie sur ∂X ,

$$\begin{cases} x \in \overline{\partial X} \ , \\ \sup[a(x) \ ; \quad a \in L \ , \quad a_{|\partial X} \leqslant F] < \inf[b(x) \ ; \quad b \in L \ , \quad b_{|\partial X} \geqslant F] \ . \end{cases}$$

2° Condition nécessaire (i).

(i) Il n'y a pas de point de Šilov singulier pour F .

Il suffit de prendre $a = b = F$.

Nous montrerons plus ou moins la nécessité de la forme de cette condition.

3° PROPOSITION. - Si F vérifie (i), alors F est uniformément continue sur ∂X .

Soient F_1 et F_2 les fonctions définies sur $\overline{\partial X}$ par

$$F_1(x) = \overline{\lim_{\substack{y\to x \\ y\in\partial X}}}\ F(y) \ , \qquad F_2(x) = \underline{\lim_{\substack{y\to x \\ y\in\partial X}}}\ F(y) \ .$$

Soient x un point de $\overline{\partial X}$, et $\varepsilon > 0$. Utilisons (i) :

$$\exists\ a \text{ et } b \in L \quad \text{tels que} \quad \begin{cases} a(x) \leqslant b(x) \quad \text{et} \quad |b(x) - a(x)| \leqslant \varepsilon \ , \\ a_{|\partial X} \leqslant F \leqslant b_{|\partial X} \ . \end{cases}$$

On en déduit, en utilisant la continuité de a et de b ,

$$F_1(x) = \overline{\lim}\ F(y) \leqslant \overline{\lim}\ b_{|\partial X}(y) = b(x) \ ,$$

$$F_2(x) = \underline{\lim}\ F(y) \geqslant \underline{\lim}\ a_{|\partial X}(y) = a(x) \ ,$$

$$a(x) \leqslant F_2(x) \leqslant F_1(x) \leqslant b(x) \leqslant a(x) + \varepsilon \ .$$

D'où $F_1 = F_2$ sur $\overline{\partial X}$, $F = F_1 = F_2$ sur ∂X , et F_1 et F_2 sont continues sur $\overline{\partial X}$. Comme $\overline{\partial X}$ est compact, F se prolonge de manière unique en une application continue sur $\overline{\partial X}$.

4° Définitions de $\int F\, d\mu$ pour $\mu \in M(\partial X)$ (F vérifiant (i)).

(a) Soit $\widetilde{F}$ le prolongement continu de F à $\overline{\partial X}$. La quantité $\int \widetilde{F}\, d\mu$ est bien définie, puisque $\overline{\partial X}$ est compact et que μ est une mesure de Radon.

(b) Considérons le σ-anneau engendré par les ensembles de Baire de X et ∂X . Prolongeons μ en μ' qui ne sera plus une mesure de Radon,

$$\mu'(X) = \mu(A) \qquad \text{si} \quad X = (A \cap \partial X) \cup (B \cap \complement\partial X) \ ,$$

A et B ensembles de Baire de X (μ' est bien défini car $\mu \in M(\partial X)$).

(Remarque : $\mu'(\partial X) = \mu(X)$, ce qui n'était pas vrai en général même si ∂X était borélien.)

Soit F' un prolongement continu de F à X. F' est μ'-intégrable. De même $\chi_{\partial X}$ est aussi μ'-intégrable et est bornée.

On peut définir $\int F' \chi_{\partial X} d\mu' = \int_{\partial X} F' d\mu'$.

(c) Montrons que ces deux nombres sont égaux : Il suffit de revenir à la définition des intégrales, et d'utiliser la relation de définition de μ' et le fait que $\mu \in M(\partial X)$.

E. M. ALFSEN utilise la notion (b), car cela lui permet de définir $\int F \, d\mu$ sans parler de prolongement.

5° Condition (ii).

(ii) $$\int F \, d\mu = 0 \ , \qquad \forall \ \mu \in N(\partial X) \ .$$

Cette condition est nécessaire, et elle n'a de sens que si (i) est vérifiée (ou F uniformément continue).

6° THÉORÈME. - Une fonction bornée à valeurs réelles, définie sur la frontière de Choquet ∂X d'un espace vectoriel L de fonctions continues sur un espace compact X, L étant fermé, contenant les constantes et séparant les points, peut être étendue en une fonction de L si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Il n'y a pas de points de Šilov singulier pour F ;

(ii) F est annulé par toute mesure frontière L-orthogonale.

Remarque : Le théorème de H. Bauer nous permet d'affirmer que la fonction $\overline{F}$ définie par $\overline{F}(x) = \int F \, d\mu$ $(\mu \in \mathfrak{M}_x)$ est bien définie et appartient à $\hat{L}$. La condition (ii) va entraîner que $\overline{F}$ appartient à L .

LEMME 1. - Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un recouvrement de $\overline{\partial X}$ par une famille finie $(B_i)_{i \in I}$ d'ensembles boréliens de X disjoints tels que

$$\forall \ i \in I \ , \quad \exists \ a_i \ \text{et} \ b_i \ \text{tels que} \begin{cases} a_i(x) \leqslant F(x) \leqslant b_i(x) \ , & \forall \ x \in \partial X \ , \\ b_i(x) - a_i(x) \leqslant \varepsilon \ , & \forall \ x \in B_i \ . \end{cases}$$

Démonstration. - Il suffit d'utiliser (i). En effet, à tout point x de $\overline{\partial X}$ on peut associer un couple (a_i , b_i) tel que

$$a_i \leqslant F \leqslant b_i \quad \text{sur } \partial X \ , \qquad a_i \ \text{et} \ b_i \in L \ ,$$

$$0 \leqslant b_i(x) - a_i(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Posons $D_i(x) = (b_i - a_i)^{-1} \left]0 , \varepsilon\right[$. Comme $D_i(x)$ est un ouvert, et que $\overline{\partial X}$ est compact, on en extrait un nombre fini qui recouvre $\overline{\partial X}$. Par intersection on en déduit la suite des (B_i) cherchée.

Démonstration du théorème.

$$M_1^+(\partial X) = \{\mu \ , \ \ \mu \in M(\partial X) \ , \ \ \mu \geqslant 0 \ \text{ et } \int d\mu \leqslant 1\} \ ,$$

$$M_1^+(\overline{\partial X}) = \{\mu \ , \ \ \mu \in M^+(\overline{\partial X}) \ \text{ et } \int d\mu \leqslant 1\} \ ,$$

$$L'_{+1} = \{\mu \ ; \ \ \mu \in M(X) \ \text{ et } \int d\mu \leqslant 1\} \ .$$

Définissons $\overline{F}$ le prolongement de F par $\overline{F}(x) = \int_{\partial X} F \, dm$, $m \in \mathfrak{M}_x$.

Pour montrer que $\overline{F}$ appartient à L , nous allons montrer que $\int_{\partial X} F \, dm$ définit une forme linéaire continue sur L' , munie de la topologie $\sigma \, (L' , L)$.

Définitions.

$$\varphi' : L'_{+1} \to R \ , \qquad \varphi'(\nu) = \int_{\partial X} F \, dm \ ,$$

m étant un élément de $M_1^+(\partial X)$ tel que $\int a \, dm = \int a \, d\nu$, $\forall \ a \in L$.

L'existence de dm résulte du théorème de Choquet-De Leeuw-Bishop, et φ' est bien définie d'après (i) et (ii).

$$\psi : X \to L'_{+1} \ , \qquad \psi(x) = \varepsilon_x \ ,$$

$$\varphi : M_1^+(\overline{\partial X}) \to R \ , \qquad \omega(\mu) = \int \widetilde{F} \, d\mu \ ,$$

$$\rho : M_1^+(\overline{\partial X}) \to L'_{+1} \ ,$$

$\rho(\mu)$ étant l'élément de L'_{+1} caractérisé par

$$\rho(\mu)(a) = \int a \, d\mu \ , \qquad \forall \ a \in L \ ,$$

$$\begin{tikzcd}
 & M_1^+(\overline{\partial X}) \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
X \arrow[r, "\psi"] & L'_{+1} \arrow[r, "\varphi'"] & R
\end{tikzcd}$$

Munissons L'_{+1} de la topologie induite par $\sigma(L' , L)$, et $M_1^+(\overline{\partial X})$ de la topologie induite par $\sigma[M(\overline{\partial X}) , \mathcal{C}(\overline{\partial X})]$.

Les applications ψ , ρ et φ sont continues. La continuité de φ' va résulter du lemme suivant : Supposons le diagramme commutatif.

$M_1^+(\overline{\partial X})$ pour la topologie $\sigma[M(\overline{\partial X}) , C(\overline{\partial X})]$ est compact, ρ est une application continue surjective (d'après le théorème de Choquet-De Leeuw-Bishop). φ' est l'application quotient par ρ associée à φ . Comme φ était continue, φ' est continue.

φ' étant continue sur L'_{+1} , φ' se prolonge en une application sur L' par linéarité. D'après un théorème de Banach sur les formes linéaires faiblement continues sur un dual, φ' prolongée est continue, et il existe $g \in L$ telle que $\int g \, d\nu = \varphi'(\nu)$ pour toute $\nu \in L'$. Prenons $\nu = \varepsilon_x$,

$$\int g \, d\nu = g(x) = \varphi'[\psi(x)] = \int F \, dm = \overline{F}(x) , \qquad dm \in \mathcal{M}_x .$$

D'où $\overline{F}$ appartient à L et coïncide avec F sur la frontière de Choquet de L $(dm = \varepsilon_x)$.

Démontrons maintenant le lemme admis. Le diagramme est commutatif : $\varphi = \varphi' \circ \rho$.

Soient $\mu \in M_1^+(\overline{\partial X})$ et $\varepsilon > 0$. Utilisons le lemme 1. Posons $\mu_i = \chi_{B_i} \mu$. On a, par définition,

$$\varphi'[\rho(\mu_i)] = \int_{\partial X} F \, dm_i \qquad \begin{cases} dm_i \in M_1^+(\partial X) , \\ \int_{\overline{\partial X}} a \, d\mu_i = \int_{\partial X} a \, dm_i , \quad \forall a \in L ; \end{cases}$$

$$a_i \leqslant F \leqslant b_i \qquad \text{et} \qquad b_i|_{B_i} - a_i|_{B_i} \leqslant \varepsilon ,$$

$$a_i \text{ et } b_i \in L .$$

$$\int_{\overline{\partial X}} a_i \, d\mu_i = \int_{\partial X} a_i \, dm_i \leqslant \int_{\partial X} F \, dm_i \leqslant \int_{\partial X} b \, dm_i = \int_{\overline{\partial X}} b \, d\mu_i ,$$

$$\int_{\overline{\partial X}} a_i \, d\mu_i \leqslant \int_{\overline{\partial X}} \widetilde{F} \, d\mu_i \leqslant \int_{\overline{\partial X}} b_i \, d\mu_i .$$

D'où

$$\left|\int_{\partial X} F \, dm_i - \int_{\partial X} \widetilde{F} \, d\mu_i\right| \leqslant \int_{\overline{\partial X}} (b_i - a_i) \, d\mu_i = \int_{\overline{\partial X}} (b_i - a_i) \, \chi_{B_i} \, d\mu ,$$

$$|\varphi'[\rho(\mu_i)] - \varphi(\mu_i)| \leqslant \varepsilon \int_{\overline{\partial X}} \chi_{B_i} \, d\mu .$$

D'où, par linéarité, on obtient

$$|\varphi'[\rho(\mu)] - \varphi(\mu)| \leqslant \varepsilon\|\mu\| \quad .$$

Comme cette inégalité est vraie quel que soit ε, on a la commutativité du diagramme.

Nécessités des conditions.

(a) (i) entraîne la continuité uniforme de F. Mais la continuité uniforme et la condition (ii), qui alors a un sens, ne sont pas suffisantes.

Exemple :

$$X = \{(i) \cup (-i) \cup [0 , 1]\} \quad ,$$

$$L = \{F , \quad F \in \mathcal{C}(X) \quad \text{et} \quad F(0) = \frac{F(i) + F(-i)}{2}\} \quad .$$

On obtient $\partial X = X - \{0\}$. En effet, on a

$$\forall\, x \neq 0 \ , \qquad \exists\, F \in L \quad \text{telle que} \quad F(x) = 1 \quad \text{et} \quad |F(y)| < 1 \ , \quad \forall\, y \neq x \ ,$$

et

$$\text{si} \quad x = 0 \ , \qquad \varepsilon_0 \sim \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_{-i}}{2} \quad .$$

$N(\partial X)$ est vide, car 0 n'appartient pas à ∂X, et les mesures L-orthogonales sont proportionnelles à $\varepsilon_0 - \dfrac{\varepsilon_i + \varepsilon_{-i}}{2}$.

La fonction f ainsi définie fournit le contre-exemple :

$$F(i) = 1 \ ,$$

$$F(-i) = 1 \ ,$$

$$F(x) = 0 \ , \qquad \forall\, x \in \,]0 , 1[\quad .$$

En effet, (ii) n'est pas à vérifier, et F est uniformément continu sur ∂X.

(b) (i) n'entraîne pas (ii).

Exemple :

$$X = \{(x , y) \in R^2 \ , \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \ , \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\} \quad ,$$

$$L : \{\text{fonctions affines continues}\} \quad ,$$

$$\partial X = (0 , 0) \cup (0 , 1) \cup (1 , 0) \cup (1 , 1) \quad .$$

Soit

$$F : \partial X \to R \ , \qquad F(0 , 0) = 1 \ , \qquad F(0 , 1) = F(1 , 0) = F(1 , 1) = 0 \quad .$$

(i) est évidemment vérifiée, et F n'admet pas de prolongement affine continu à X .

3. Application aux applications affines d'un convexe compact dans un convexe compact.

Définitions. - Soit K un compact convexe.

A désigne l'espace vectoriel des applications affines continues sur K ;

∂K est la frontière de Choquet de K ;

Soit g une fonction à valeurs réelles bornée et définie sur ∂K ; on définit les fonctions $\overline{g}$ et $\underline{g}$ de K dans R par les égalités

$$\overline{g}(x) = (\inf a(x) \ ; \ a \in A \ \text{ et } \ a_{|\partial X} \geqslant g) \ ,$$

$$\underline{g}(x) = (\sup a(x) \ ; \ a \in A \ \text{ et } \ a_{|\partial X} \leqslant g) \ ;$$

Résultante d'une mesure $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $r(\mu) = r(\mu^+) - r(\mu^-)$.

THÉORÈME. - Soit K_i un ensemble convexe compact d'un espace localement convexe E_i pour $i = 1 , 2$.

Une fonction φ continue faiblement bornée de la frontière extrémale ∂K_1 dans K_2 peut être étendue en un homomorphisme de K_1 dans K_2 si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont remplies :

(i) $\overline{F \circ \varphi}$ et $\underline{F \circ \varphi}$ sont continues sur $\overline{\partial_c K_1}$ pour toute $F \in E_2'$;

(ii) L'image par φ de toute mesure frontière de masse nulle et de résultante 0_1 est une mesure de Baire de E_2 qui est de masse nulle et de résultante 0_2 .

Remarques.

1° (ii) n'a de sens que si (i) est vérifiée (voir démonstration).

2° Si $\partial X = \overline{\partial X}$, (i) est satisfaite si on suppose F continue.

Démonstration.

1° $F \circ \varphi$ se prolonge en une application affine continue de K_1 dans R .

(a) LEMME 2. - Soit g une fonction bornée s. c. s. définie sur la frontière extrémale d'un compact convexe K d'un e. l. c. E ; alors

$$g(x) = \overline{g}(x) \qquad \text{pour} \ \ x \in \partial_c K \ .$$

Démonstration. - Prolongeons g à X par g_1 ,

$$g_1(x) = \begin{cases} \overline{\lim}\, g(y) \ , \quad y_{|\partial K} \to x \quad \text{si} \quad x \in \overline{\partial K} \ , \\ \alpha = \inf g(y) \ , \quad y \in \partial K \quad \text{si} \quad x \notin \overline{\partial K} \ . \end{cases}$$

$g_1(x)$ est une fonction s. c. s.

Il existe un ensemble filtrant décroissant $(g_i^!)$ de fonctions continues qui converge ponctuellement vers $g_1(x)$.

$(\overline{g_i^!})$ est un ensemble filtrant décroissant de fonctions concaves s. c. s. qui converge ponctuellement vers une fonction k concave s. c. s. majorant g_1 , donc g , donc $\overline{g}$,

$$\overline{g}(x) \leqslant k(x) \leqslant \lim \overline{g}_i(x) = \lim g_i(x) = g_1(x) = g(x) \quad ,$$

et en utilisant pour $x \in \partial K$ le théorème pour les fonctions continues.

On obtient le même lemme en supposant g s. c. i. et en prenant $\underline{g}$. Nous en déduisons que $\overline{F \circ \varphi}(x) = \underline{F \circ \varphi}(x) = F \circ \varphi(x)$ pour $x \in \partial K_1$. Comme i suppose que $\overline{F \circ \varphi}$ et $\underline{F \circ \varphi}$ sont continues sur $\overline{\partial K_1}$, comme $F \circ \varphi$ peut se prolonger en une fonction continue sur un compact, $F \circ \varphi$ est uniformément continue, et comme cette propriété est vraie quel que soit $F \in E_2^!$, cela entraîne que φ est uniformément continue. La condition (ii) a donc bien un sens.

(b) Appliquons le théorème précédent.

$X = K_1$;

$L = \mathfrak{A}_1$ muni de la norme sup (K_1 est compact) :

- est fermé,
- contient les constantes,
- sépare les points (K_1 est contenu dans un e. l. c. E_1).

(i)' est vérifié d'après (i) et le lemme 1.

(ii)' Soit ν mesure frontière L-orthogonale non nulle. Alors $\int \varphi \, d\nu = 0$. On a $\int 1 \, d\nu = 0$. D'où $\nu^+(1) = \nu^{-1}(1) = a > 0$. On peut supposer $a = 1$,

$$\int \ell \, d\nu = 0 \ , \quad \forall \ell \in \mathfrak{A} \iff \int \ell \, d\nu^+ = \int \ell \, d\nu^- \ , \quad \forall \ell \in \mathfrak{A}$$

$$\iff 2(\nu^+) = 2(\nu^-) \iff 2(\nu) = 0 \quad .$$

D'où (ii) entraîne $\int \varphi \, d\nu = 0$.

$\exists \, \overline{F} \in \mathfrak{A}_1$ telle que $\overline{F}_{|\partial K_1} = F \circ \varphi$.

2° Démonstration du théorème.

$\forall\ p \in E_2'$, on a

$$\int_{\partial K_1} F \circ \varphi \, d\nu = F\left[\int_{\partial K_1} \varphi \, d\nu\right] , \qquad \forall\ \nu \text{ mesure frontière de } K_1 \ .$$

Définissons le prolongement $\overline{\varphi}$ par sa forme nécessaire,

$$\overline{\varphi}(x) = \int_{\partial K_1} \varphi \, dm , \qquad dm \in M_x \ .$$

On a, comme $\overline{F}$ appartient à $\mathfrak{A}_1$,

$$\overline{F}(x) = \int_{\partial K_1} \overline{F} \, dm = \int_{\partial K_1} F \circ \varphi \, d\nu = F[\overline{\varphi}(x)] \ .$$

$\overline{\varphi}$ étant une application faiblement continue de K_1 dans K_2 , et comme sur K_2 qui est compact la topologie faible coïncide avec la topologie de K_2 , $\overline{\varphi}(x)$ est continue. $\overline{\varphi}(x)$ est par construction une application affine.

Cas particulier : $E_2 = R$.

Les seules formes linéaires continues sur E_2 sont de la forme $F(x) = kx$. Les conditions deviennent :

(i) g et $\overline{g}$ sont continues sur $\overline{\partial K_1}$;
(ii) $\int g \, d\nu$, $\forall\ \nu$ mesure frontière de masse nulle, de résultante 0_1 .

4. Application aux simplex de Choquet.

(a) (ii) est toujours vérifiée car la seule mesure frontière de masse nulle, de résultante 0_1 , est la mesure nulle.

Il reste la condition (i).

(b) Remarque : On peut démontrer directement, dans le cas d'un simplex de Choquet, que les fonctions bornées continues sur ∂K_1 qui se prolongent dans $\mathfrak{A}_1$ sont exactement celles qui se prolongent par continuité à $\overline{\partial K_1}$ et qui satisfont au calcul barycentrique sur $\overline{\partial K_1}$ (démonstration due à EFFROS).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALFSEN (Erik M.). - On the geometry of Choquet simplexes, Math. Scand., t. 15, 1964, p. 97-100.

[2] ALFSEN (Erik M.). - A note on affine functions on compact sets, Math. Seminar Reports Oslo Univ., t. 3, n° 13 (1965).

[3] ALFSEN (Erik M.). - Boundary values for homomorphisms of compact convex sets, Math. Scand., t. 19, 1966, p. 113-121.

[4] ALFSEN (Erik M.). - On the Dirichlet problem on the Choquet boundary, Math. Seminar Reports Oslo Univ. (1967).

[5] BAUER (Heinz). - Frontière de Šilov et problème de Dirichlet, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 3e année, 1958/59, n° 7, 23 p.

[6] PHELPS (Robert R.). - Lectures on Choquet's theorem. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (Van Nostrand mathematical Studies, 7).