

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

DANIEL SIBONY

Le théorème de James

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. n° 4, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A4_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE THÉORÈME DE JAMES

par Daniel SIBONY

On se propose de démontrer le théorème suivant de compacité dû à R. C. JAMES ([1] et [2]). Nous avons, en réduisant le problème au cas séparable, quelque peu raccourci la démonstration de J. D. PRYCE ([4]), laquelle suivait essentiellement les idées de JAMES.

THÉORÈME 1. - Soient E un espace localement compact (e. l. c.) complet, et C \subset E un ensemble faiblement fermé borné. Si toute forme linéaire φ , continue sur E, atteint son sup dans C (i. e. est telle que $\sup_{y \in C} \varphi(y) = \varphi(y_0)$, $y_0 \in C$), alors C est faiblement compact.

Démonstration. - Si C n'était pas faiblement compact, il existerait (cf. KELLEY [3], p. 159) une suite $(z_n) \subset C$, et $(f_n) \subset E'$ équicontinue, telles que

$$\lim_i \lim_j f_i(z_j) \quad \text{et} \quad \lim_j \lim_i f_i(z_j)$$

existent et soient distinctes ; ce qu'on utilisera sous la forme suivante :

(*) Il existe r réel > 0 , tel que, pour tout k , il existe j_0 avec

$$(j > j_0) \implies f_k(z_j) - \lim_i f_i(z_j) \geq r .$$

Dans E' faible, soient F le sous-espace fermé engendré par (f_n) , F^0 son polaire dans E . Le dual de E/F^0 s'identifie à F . Soit π la projection de E sur E/F^0 , et $C_1 = \pi(C)$. Muni de la topologie quotient, E/F^0 est séparable, ainsi que son complété E_1 . Dans E_1 , le convexe fermé borné $\overline{C_1}$ vérifie l'hypothèse de James pour la dualité avec F , et $\overline{C_1} \supset (y_j)$ avec $y_j = \pi(z_j)$, $\forall j$. La condition (*) est vérifiée avec y_j au lieu de z_j ; mais cette fois, on peut affirmer que la suite $(f_n) \subset F$ contient une sous-suite faiblement convergente (i. e. pour $\sigma(F, E/F^0)$), qu'on notera encore (f_n) .

Ceci montre qu'on peut se replacer dans la situation initiale avec (E, E') , $C \subset E$, et suites (f_n) et (z_n) vérifiant (*) avec, de plus, $f = \lim f_n$ (faible).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, désignons par K_n l'enveloppe convexe de $(f_i)_{i \geq n}$; pour toute φ , fonction bornée sur C , posons $p(\varphi) = \sup_C \varphi$.

L'inégalité (*) servira sous la forme suivante :

(1) Pour tout $u \in K_1$, on a $p(u - f) \geq r$; car

$$\begin{aligned} p(u - f) \geq (u - f)(z_j) &= \sum_1^s \lambda_i [f_{n_i}(z_j) - \lim_i f_i(z_j)] \\ &\geq r \sum_1^s \lambda_i = r, \end{aligned}$$

pour j assez grand.

LEMME 1. - Soit (β_n) une suite de nombres réels > 0 . Il existe (g_n) , avec pour tout n , $g_n \in K_n$, et

$$p\left[\sum_{i=1}^n \beta_i (g_i - f)\right] > \frac{1}{2} \beta_n r + p\left[\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i (g_i - f)\right].$$

La suite (g_n) se construit par récurrence en utilisant à chaque étape le lemme suivant.

LEMME 2. - Soient Y un espace vectoriel, p une forme sous-linéaire, β, β' et ρ trois nombres réels > 0 , $A \subset Y$ un convexe, et $u \in Y$. Si

$$\inf_{a \in A} p(u + \beta a) > \beta \rho + p(u),$$

alors il existe $a_0 \in A$ tel que

$$\inf_{a \in A} p(u + \beta a_0 + \beta' a) > \beta' \rho + p(u + \beta a_0).$$

Pour montrer le lemme 1, on applique le lemme 2, pour $n = 1$, à $A = K_1 - f$, $u = 0$, $\beta = \beta_1$, $\beta' = \beta_2$ et $\rho = \frac{r}{2}$. L'hypothèse du lemme 2 n'est autre que l'inégalité (1) déjà établie. On choisit alors $g_1 \in K_1$ tel que

$$\inf_{\psi \in K_1} p[\beta_1 (g_1 - f) + \beta_2 (\psi - f)] > \frac{1}{2} \beta_2 r + p[\beta_1 (g_1 - f)].$$

Au rang n , on applique le lemme 2 avec $A = K_n - f$, $u = \sum_1^{n-1} \beta_i (g_i - f)$, $\beta = \beta_n$ et $\beta' = \beta_{n+1}$, sachant que

$$\inf_{\psi \in A} p(u + \beta \psi) \geq \inf_{\psi \in K_{n-1} - f} p(u + \beta \psi) > \frac{1}{2} \beta_n r + p(u).$$

Preuve du lemme 2. - L'hypothèse s'écrit

$$- p(u) = \beta\rho - \inf_{a \in A} p(u + \beta a) + \delta \quad (\delta > 0) .$$

Soient $a_0, b \in A$ et $c = \frac{\beta a_0 + \beta' b}{\beta + \beta'} \in A$. Par sous-linéarité de p , on a

$$p(u + \beta a_0 + \beta' b) \geq p\left(\left(1 + \frac{\beta'}{\beta}\right)(u + \beta c)\right) - p\left(\frac{\beta'}{\beta} u\right) .$$

Donc

$$\begin{aligned} \inf_{b \in A} p(u + \beta a_0 + \beta' b) &\geq \left(1 + \frac{\beta'}{\beta}\right) \inf_{a \in A} p(u + \beta a) - \frac{\beta'}{\beta} p(u) \\ &= \left(1 + \frac{\beta'}{\beta}\right) \inf_{a \in A} p(u + \beta a) + \frac{\beta'}{\beta} [\beta\rho - \inf_{a \in A} p(u + \beta a)] + \frac{\beta'}{\beta} \delta \\ &= \beta'\rho + \inf_{a \in A} p(u + \beta a) + \frac{\beta'}{\beta} \delta . \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir $a_0 \in A$ tel que

$$p(u + \beta a_0) < \inf_{a \in A} p(u + \beta a) + \frac{\beta'}{\beta} \delta ,$$

d'où le résultat.

Fin de la démonstration. - Soit $(\beta_n) \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ telle que

$$\lim_n \frac{1}{\beta_n} \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i = 0 .$$

Posons

$$g = \sum_{i \geq 1} \beta_i (g_i - f) ,$$

où (g_n) est associée à (β_n) par le lemme 1. On a $g \in E'$, et on va montrer que g n'atteint pas son sup sur C . Car si elle l'atteignait en $x_0 \in C$, on aurait

$$\sum_1^n \beta_i (g_i - f)(x_0) = g(x_0) - \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i (g_i - f)(x_0) \geq g(x_0) - M \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i ,$$

où M est une constante > 0 telle que $|h(t)| \leq M$, $\forall t \in C$ et $\forall h \in K_1 - f$.
Donc

$$\begin{aligned}
\sum_1^n \beta_i (g_i - f)(x_0) &\geq p(g) - M \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i \geq p\left[\sum_1^n \beta_i (g_i - f)\right] - p\left[\sum_1^n \beta_i (g_i - f) - g\right] - M \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i \\
&\geq p\left[\sum_1^n \beta_i (g_i - f)\right] - 2M \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i \\
&> \frac{1}{2} \beta_n r + p\left[\sum_1^{n-1} \beta_i (g_i - f)\right] - 2M \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i \quad (\text{lemme 1}) \\
&\geq \frac{1}{2} \beta_n r + \sum_1^{n-1} \beta_i (g_i - f)(x_0) - 2M \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i .
\end{aligned}$$

D'où

$$(g_n - f)(x_0) > \frac{1}{2} r - 2M \frac{Z}{\beta_n} \quad \text{avec } Z = \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i, \quad \text{et } \liminf (g_n - f)(x_0) \geq \frac{r}{2},$$

ce qui contredit le fait que $\lim g_n(x_0) = f(x_0)$ (ou $\lim f_n = f$), et achève la démonstration du théorème.

Remarquons que la démonstration est valable si on suppose seulement que C est complet dans E , donc :

THÉORÈME 1 bis. - Dans un e. l. c. quasi-complet E , si C est un ensemble faiblement fermé borné tel que toute forme linéaire continue y atteigne son sup, alors C est faiblement compact.

On peut constater que ce théorème entraîne des résultats classiques et importants sur la compacité faible, notamment les théorèmes suivants.

THÉORÈME (KREIN). - Dans un e. l. c. quasi-complet E , si C est faiblement compact, il en est de même de son enveloppe convexe fermée.

En effet, soit Γ cette enveloppe. On voit aisément que

$$\Gamma = \bigcap_{\varphi \in E'} \varphi^{-1}(\varphi(C)) .$$

Donc Γ vérifie l'hypothèse de James, et est compact pour $\sigma(E, E')$.

THÉORÈME (EBERLEIN). - Soit E un e. l. c. quasi-complet, et soit $A \subset E$ tel que toute suite $(x_n) \subset A$ ait une valeur d'adhérence faible dans E . Alors A est faiblement relativement compact.

En effet, \bar{A} est nécessairement borné ; toute $\varphi \in E'$ atteint dans \bar{A} son sup, car si $a = \sup_A \varphi (= \sup_{\bar{A}} \varphi)$, soit $x_n \in A \cap (\varphi \geq a - \frac{1}{n})$. La suite x_n a

une valeur d'adhérence faible y dans \bar{A} , et $\varphi(y) = a$; on conclut donc par le théorème de James.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] JAMES (R. C.). - Characterization of reflexivity, *Studia Math.*, Warszawa, t. 23, 1964, p. 205-216.
- [2] JAMES (R. C.). - Weakly compact sets, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 113, 1964, p. 129-140.
- [3] KELLEY (J. L.) and NAMIOKA (I.). - *Linear topological spaces.* - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1963 (The University Series in higher Mathematics).
- [4] PRYCE (J. D.). - Weak compactness in locally compact spaces.

(Texte remis le 31 janvier 1969)