

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

CHRISTIAN LEGER

Une démonstration du théorème de Lazar sur les simplexes

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. n° 1, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SB CD_1967-1968__12__A1_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LAZAR SUR LES SIMPLEXES

par Christian LÉGER

1. But de l'exposé.

Dans ce qui suit, on appelle objet, tout triplet (X, E, Φ) , où

X est un simplexe compact d'e. l. c. s. ;

E est un e. l. c. s. ;

Φ est une application multivoque de X dans E telle que Φ est convexe, s. c. i., et telle que, $\forall x \in X$, $\Phi x \neq \emptyset$.

Si (X, E, Φ) est un objet, $\sigma(X, E, \Phi)$, désigne la relation : Il existe une sélection affine continue de Φ .

On va démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME de Lazar. - Soit (X, E, Φ) un objet. Si, $\forall x \in X$, Φx est fermé, et si E est métrisable complet, alors $\sigma(X, E, \Phi)$.

(On peut en lire la démonstration originale dans [3] et [4].)

2. Schéma de la démonstration.

Les étapes de la démonstration seront les résultats partiels suivants :

LEMME 0. - Soit $(X, \underline{\mathbb{R}}, \Phi)$ un objet. Si, $\forall x \in X$, Φx est fermé, alors $\sigma(X, \underline{\mathbb{R}}, \Phi)$.

Ce lemme est trivialement équivalent au théorème d'Edwards (théorème qu'on admet, voir [1]).

LEMME (1 ; n) (n entier positif ou nul). - Soit $(X, \underline{\mathbb{R}}^n, \Phi)$ un objet. Si V est un voisinage convexe de 0 dans $\underline{\mathbb{R}}^n$, alors $((X, \underline{\mathbb{R}}^n, \Phi + V)$ est un objet, et $\sigma(X, \underline{\mathbb{R}}^n, \Phi + V)$.

Le lemme (1 ; 0) est trivial. On démontre les lemmes (1 ; n) par récurrence, en utilisant à chaque cran, le lemme 0.

LEMME 2. - Soit (X, E, Φ) un objet. Si V est un voisinage convexe de 0 dans E , alors $((X, E, \Phi + V)$ est un objet, et $\sigma(X, E, \Phi + V)$.

On ramène le lemme 2 à un lemme (1 ; n) en utilisant la compacité de X .

Enfin, du lemme 2, on déduit le théorème de Lazar.

3. Démonstration des lemmes (1 ; n) .

Soit n un entier positif ou nul ; on suppose le lemme (1 ; n) vrai ; démontrons le lemme (1 ; n + 1) .

Soient $(X, \underline{\mathbb{R}}^{n+1}, \Phi)$ et V vérifiant les hypothèses du lemme (1 ; n + 1) .

On identifie $\underline{\mathbb{R}}^{n+1}$ à $\underline{\mathbb{R}} \times \underline{\mathbb{R}}^n$ en choisissant deux projections

$$p : \underline{\mathbb{R}}^{n+1} \rightarrow \underline{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad q : \underline{\mathbb{R}}^{n+1} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}^n .$$

On peut supposer que $V = A \times B$, où A (resp. B) est un voisinage convexe équilibré ouvert de 0 dans $\underline{\mathbb{R}}$ (resp. $\underline{\mathbb{R}}^n$).

$(X, \underline{\mathbb{R}}, \overline{p\Phi})$ est un objet (où $\overline{p\Phi}$ désigne l'application multivoque

$$x \in X \mapsto \overline{p\Phi x} \subset \underline{\mathbb{R}}) ;$$

cela résulte des deux propriétés suivantes (qu'on admet) de stabilité des objets :

- d'une part, si (X, E, Φ) est un objet et si F est un e. l. c. s., et si $f : E \rightarrow F$ est affine continue, alors $(X, F, f\Phi)$ est un objet ;

- d'autre part, si (X, E, Φ) est un objet, alors $(X, E, \overline{\Phi})$ est un objet (où $\overline{\Phi}$ désigne l'application $x \mapsto \overline{\Phi x}$).

Remarque 0. - Dans la suite, on utilisera implicitement des propriétés de stabilité analogues qu'il serait facile, mais long, de formuler.

D'autre part, $\forall x \in X$, $\overline{p\Phi x}$ est fermé dans $\underline{\mathbb{R}}$. Ainsi (lemme 0), on a $\sigma(X, \underline{\mathbb{R}}, \overline{p\Phi})$.

Soit g une sélection affine continue de $\overline{p\Phi}$. Soit

$$\Psi = q[\overline{\Phi} \cap p^{-1}(g + A)] .$$

$(X, \underline{\mathbb{R}}^n, \Psi)$ est un objet (voir la remarque 0, en notant que, g étant une sélection de $\overline{p\Phi}$ et A étant ouvert non vide, $\forall x \in X$, on a $p\Phi x \cap (gx + A) \neq \emptyset$, et par suite $\forall x \in X$, $\Psi x \neq \emptyset$).

Ainsi (lemme (1 ; n), qui est l'hypothèse de récurrence), on a $\sigma(X, \underline{\mathbb{R}}^n, \Psi + B)$.

Soit h une sélection affine continue de $\Psi + B$. Soit

$$f = (g, h) : X \rightarrow \underline{\mathbb{R}}^{n+1} .$$

f est affine continue (puisque g et h le sont). f est une sélection de
 $\Phi + V$:

En effet, soit $x \in X$; On a $hx \in \Psi x + B$. Ainsi $hx = q(y, z) + b$, donc

$$hx = z + b \quad \text{avec } b \in B \quad (b \text{ convenable})$$

et $(y, z) \in \Phi x$ et $(y, z) \in p^{-1}(gx + A)$, ce qui entraîne $y \in gx + A$, donc

$$y = gx + a \quad \text{avec } a \in A \quad (a \text{ convenable}).$$

Enfin

$$fx = (gx, hx) = (y, z) + (-a, b) \in \Phi x + V.$$

C. Q. F. D.

4. Démonstration du lemme 2.

Soient (X, E, Φ) et V vérifiant les hypothèses du lemme 2.

On peut supposer V convexe équilibré ouvert. Si $y \in E$,

$$Uy = \{x \in X ; \Phi x \cap y + \frac{V}{2} \neq \emptyset\}$$

est ouvert. Comme $\forall x, \Phi x \neq \emptyset$, les Uy recouvrent X ; X étant compact, on peut en extraire un recouvrement fini, soit Uy_i ($i = 1, \dots, n$).

Soit H le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{y_i ; i = 1, \dots, n\}$.
 H est de dimension finie.

Soit $W = H \cap \frac{V}{2}$, un voisinage convexe de 0 dans le sous-espace H de E .

Soit $\Psi = (\Phi + \frac{V}{2}) \cap H$.

(X, H, Ψ) est un objet (voir la remarque 0, en notant que, les Uy_i recouvrent X , $\forall x \in X$, il existe un i tel que $y_i \in \Phi x + \frac{V}{2}$, ce qui entraîne que $\forall x \in X$, $\Psi x \neq \emptyset$).

Ainsi (lemme (1 ; dim H)), on a $\sigma(X, H, \Psi + W)$, d'où $\sigma(X, E, \Phi + V)$.

C. Q. F. D.

5. Démonstration du théorème de Lazar.

Soit (X, E, Φ) vérifiant les hypothèses du théorème de Lazar. Soit $A_u(X, E)$ l'espace des applications affines continues de X dans E , muni de la structure de la convergence uniforme.

DEFINITION. - Soit H un espace uniforme. Un filtre \mathfrak{F} de H est stable si, $\forall V$ entourage de H , il existe un $S \in \mathfrak{F}$ tel que, $\forall T \in \mathfrak{F}$, $V(T) \supset S$.

On rappelle le lemme suivant :

LEMME 3. - Tout filtre stable d'un espace uniforme complet métrisable a un point adhérent.

Pour cette propriété de "supercomplétion", voir ISBELL [2] ou LÉGER [5].

Soit, pour tout V voisinage convexe de 0 dans E ,

$$S_V = \{f \in A_u(X, E) ; f \text{ est sélection de } \phi + V\} .$$

Les S_V sont non vides (lemme 2) et forment une base d'un filtre ; soit \mathfrak{F} ce filtre.

Si on montre que \mathfrak{F} est stable, on aura terminé car, $A_u(X, E)$ étant complet métrisable, \mathfrak{F} aura un point adhérent (lemme 3), et tout point adhérent de \mathfrak{F} est une sélection affine continue de ϕ .

\mathfrak{F} est stable : On montre que, si V et W sont des voisinages ouverts convexes symétriques de 0 dans E , $V(S_W) \supset S_V$.

En effet, soit $f \in S_V$; $(X, E, (f + V) \cap \phi)$ est un objet (voir remarque 0). Ainsi (lemme 2), on a $\sigma(X, E, (f + V) \cap \phi + W)$. Soit g une sélection affine continue de $(f + V) \cap \phi + W$. On a

$$g \in S_W \quad \text{et} \quad g \in V(f) = V^{-1}(f) .$$

D'où $f \in V(S_W)$.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] EDWARDS (David Albert). - Séparation des fonctions réelles définies sur un simplexe de Choquet, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 2798-2800.
- [2] ISBELL (J. R.). - Uniform spaces. - Providence, American mathematical Society, 1964. (Mathematical Surveys, 12).
- [3] LAZAR (A. J.). - On affine continuous functions on simplexes. Jerusalem, The Hebrew University (multigraphié).
- [4] LAZAR (A. J.). - Spaces of affine functions on simplexes. Jerusalem, The Hebrew University (multigraphié).
- [5] LÉGER (Christian). - Filtres lents et espaces hypercomplets, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 4e année, 1964/65, n° 9, 8 p. (Mathematica Seminosa, 1).