Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Roland Durier

Noyaux non positifs en théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. nº 15, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A12_0>

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
12e année, 1967/68, n° 15

25 avril 1968

NOYAUX NON POSITIFS EN THÉORIE DU POTENTIEL

par Roland DURIER

Un des aspects actuels de la théorie du potentiel consiste à envisager des propriétés vérifiées essentiellement par le noyau newtonien, et à trouver, pour des noyaux plus généraux, des relations entre ces propriétés. Dans ce travail, le modèle est le noyau logarithmique plutôt que le noyau newtonien. On introduit et compare des principes d'équilibre et de maximum ainsi que des principes de semi-balayage et des principes semi-complets du maximum. On donne également des résultats concernant le signe de l'énergie.

I. Définitions et notations.

X est un espace topologique localement compact. $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{M}^1$) est l'ensemble des mesures de Radon sur X , positives et à support compact (resp. de masse 1) ; $\mathfrak{M}$ est muni de la topologie vague. On note $S\mu$ le support d'une mesure μ de $\mathfrak{M}$.

Un noyau G sur X est une fonction $(x , y) \to G(x , y)$ définie sur $X \times X$, à valeurs dans $]-\infty , +\infty]$ et semi-continue inférieurement. On pose

$$\check{G}(x , y) = G(y , x) \quad .$$

Le potentiel (ou G-potentiel) d'une mesure μ de $\mathfrak{M}$ est la fonction $G\mu$ à valeurs dans $]-\infty , +\infty]$ définie sur X par

$$G\mu(x) = \int G(x , y)\, d\mu(y) \quad .$$

L'énergie mutuelle de deux mesures μ et ν de $\mathfrak{M}$ est le nombre (fini ou $+\infty$)

$$G(\mu , \nu) = \int G\mu(x)\, d\nu(x) \quad .$$

L'énergie de μ est le nombre (fini ou $+\infty$) : $G(\mu , \mu)$. On note

$$\mathcal{E} = \{\mu \in \mathfrak{M} , \quad G(\mu , \mu) < +\infty\}$$

$$\mathfrak{F} \text{ (resp. } \check{\mathfrak{F}} \text{) } = \{\mu \in \mathfrak{M} , \quad G\mu \text{ (resp. } \check{G}\mu \text{) fini continu sur } X\} \quad ,$$

et, K étant un compact de X ,

$$\mathfrak{M}(K) = \{\mu \in \mathfrak{M} , \quad S\mu \subset K\} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}^1(K) = \{\mu \in \mathfrak{M}(K) , \quad \int d\mu = 1\} \quad .$$

On définit de façon analogue

$$\mathcal{E}(K)\ ,\quad \mathcal{E}^1(K)\ ,\quad \mathcal{F}(K)\ ,\quad \mathcal{F}^1(K)\ ,\quad \check{\mathcal{F}}(K)\ ,\quad \check{\mathcal{F}}^1(K)\ .$$

Une partie A de X est dite $\mathcal{E}$-négligeable (resp. $\mathcal{F}$-négligeable) si elle est de mesure nulle pour toute mesure de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$). Une propriété vraie sauf sur un ensemble $\mathcal{E}$-négligeable est dite vraie a. p. p. p. (à peu près partout).

Un noyau G est dit régulier (ou vérifiant le principe de continuité) si, quelle que soit la mesure μ de $\mathfrak{M}$, la continuité de la restriction de $G\mu$ à $S\mu$ entraîne la continuité de $G\mu$ sur X .

Pour un noyau quelconque, toute partie $\mathcal{E}$-négligeable est $\mathcal{F}$-négligeable. Mais pour un noyau régulier, une partie de X est $\mathcal{E}$-négligeable si, et seulement si, elle est $\mathcal{F}$-négligeable. C'est cette propriété qui donne son importance à la notion de régularité pour un noyau.

Principes.

Maximum : On note (M) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à

$$\forall\ \mu \in \mathfrak{M}\ ,\ \forall\ a \in \mathbb{R} \qquad (G\mu \leqslant a \text{ sur } S\mu \Longrightarrow G\mu \leqslant a \text{ sur } X)$$

Equilibre : On note (E) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à : Pour tout compact K de X , il existe k dans $\mathbb{R}$ et λ dans $\mathfrak{M}^1(K)$ tels que

$$G\lambda = k \text{ a. p. p. p. sur } K \qquad \text{et} \qquad G\lambda \leqslant k \text{ sur } X\ .$$

Principes du semi-balayage : On note (SB) (resp. (SB+)) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à : Pour tout compact K non $\mathcal{E}$-négligeable de X et pour toute mesure μ de $\mathfrak{M}$, il existe ν dans $\mathfrak{M}(K)$ et k dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $[0\ ,+\infty[$) avec

$$\int d\mu = \int d\nu$$

$$G\nu = G\mu + k \text{ a. p. p. p. sur } K \qquad \text{et} \qquad G\nu \leqslant G\mu + k \text{ sur } X\ .$$

Principes semi-complets du maximum : On note (SCM) (resp. (SCM+)) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à

$$\forall\ \mu \in \mathcal{E}\ ,\ \forall\ \nu \in \mathfrak{M}\ ,\ \forall\ a \in \mathbb{R}\ ,$$

$$\left(\int d\mu = \int d\nu \ \left(\text{resp. } \int d\mu \geqslant \int d\nu\right) \text{ et } G\mu \leqslant G\nu + a \text{ sur } S\mu\right)$$

$$\Longrightarrow (G\mu \leqslant G\nu + a \text{ sur } X)$$

Le noyau logarithmique défini dans $\mathbb{R}^2$ par

$$G(x\ ,\ y) = \log \frac{1}{|x-y|} \qquad \text{si } x \neq y$$

$$G(x\ ,\ x) = +\infty$$

vérifie toutes ces propriétés [8]. Il en est de même pour le noyau associé à certains processus de Markoff récurrents sur un espace de phase dénombrable (chaînes normales [5]). Le cas des semi-groupes sous-markoviens de convolution sur $\underset{\sim}{R}$ a été étudié par C. HERZ ; c'est à lui que nous empruntons la terminologie "principe semi-complet du maximum" [4].

II. Relations entre principes.

Les démonstrations des théorèmes que nous avons en vue reposent sur un résultat analogue au théorème d'existence de Kishi [1], [7], mais adapté au cas des noyaux non nécessairement positifs.

1. Lemme fondamental.

Soit G un noyau tel que $\check{G}$ soit régulier. Pour tout compact K non $\mathcal{E}$-négligeable de X et pour toute fonction u continue sur K, il existe σ dans $\mathcal{E}^1(K)$ et k réel tels que $G\sigma \leq u + k$ sur $S\sigma$ et $G\sigma \geq u + k$ a. p. p. p. sur K.

Démonstration.

1° Si G est symétrique $(G = \check{G})$, on peut utiliser une méthode variationnelle analogue à la méthode de Gauss. Toute mesure σ qui réalise le minimum sur le compact $\mathfrak{M}^1(K)$ de la fonction s. c. i.

$$\alpha \rightarrow G(\alpha , \alpha) - \int u \, d\alpha$$

convient avec la constante

$$k = G(\sigma , \sigma) - \int u \, d\sigma \quad .$$

2° Dans le cas général, cette méthode ne donne aucun résultat. Comme dans le théorème de Kiski, l'outil fondamental est le théorème du point fixe de Ky Fan et Glicksberg [2], [3].

On définit une application du compact $\mathfrak{M}^1(K)$ dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathfrak{M}^1(K))$ de la façon suivante : Pour μ dans $\mathfrak{M}^1(K)$, on pose

$$\Gamma(\mu) = \{\nu \in \mathfrak{M}^1(K) \; ; \; \forall \lambda \in \mathcal{E}^1(K) \; , \; G(\mu , \nu) - \int u \, d\nu \leq G(\mu , \lambda) - \int u \, d\lambda\} \quad .$$

$\Gamma(\mu)$ est convexe et non vide : il contient en particulier toute mesure ν de $\mathfrak{M}^1(K)$ qui réalise le minimum sur le compact $\mathfrak{M}^1(K)$ de la fonction s. c. i.

$$\lambda \rightarrow G(\mu , \lambda) - \int u \, d\lambda \quad .$$

Le graphe Γ est fermé ; en effet, soit (μ_i , ν_i) une famille filtrante de couples de mesures de $\mathfrak{M}^1(K)$ avec

$$\lim \mu_i = \mu \ , \qquad \lim \nu_i = \nu \qquad \text{et} \qquad \nu_i \in \Gamma(\mu_i) \ .$$

Soit λ dans $\check{\mathfrak{F}}^1(K)$, on a

$$G(\mu_i \ , \nu_i) - \int u \, d\nu_i \leqslant G(\mu_i \ , \lambda) - \int u \, d\lambda \ .$$

$G(\mu_i \ , \lambda)$ tend vers $G(\mu \ , \lambda)$ ($\check{G}\lambda$ est continu)

$$\underline{\lim}[G(\mu_i \ , \nu_i) - \int u \, d\nu_i] \geqslant G(\mu \ , \nu) - \int u \, d\nu$$

(u est continue et G est s. c. i.). Donc

$$G(\mu \ , \nu) - \int u \, d\nu \leqslant G(\mu \ , \lambda) - \int u \, d\lambda \ ,$$

et ceci pour tout λ dans $\mathfrak{F}^1(K)$, c'est-à-dire $\nu \in \Gamma(\mu)$. Les hypothèses du théorème de Ky Fan et Glicksberg sont réalisées ; donc il existe σ dans $\mathfrak{M}^1(K)$ tel que $\sigma \in \Gamma(\sigma)$, c'est-à-dire

$$\forall \ \lambda \in \check{\mathfrak{F}}^1(K) \ , \qquad G(\sigma \ , \sigma) - \int u \, d\sigma \leqslant G(\sigma \ , \lambda) - \int u \, d\lambda \ .$$

Comme $\check{\mathfrak{F}}^1(K)$ n'est pas vide, σ est dans $\mathcal{E}$. On pose

$$k = G(\sigma \ , \sigma) - \int u \, d\sigma \ .$$

On a alors $G\sigma - u \geqslant k$ sur K sauf sur un ensemble $\check{\mathfrak{F}}$-négligeable donc a. p. p. p. ($\check{G}$ est régulier). Si, en un point x_0 de $S\sigma$, on avait

$$G\sigma(x_0) - u(x_0) > k$$

on en déduirait $G(\sigma \ , \sigma) - \int u \, d\sigma > k$, donc $G\sigma - u \leqslant k$ sur $S\sigma$.

Remarque 1. - Dans le lemme fondamental, on ne peut pas en général préciser le signe de k . Voici toutefois une condition suffisante, utile dans la suite, pour que k soit positif : S'il existe une mesure μ dans $\mathfrak{M}^1$ avec

$$u \leqslant G\mu \quad \text{sur} \quad K$$

et si le noyau $\check{G}$ est dans (E) , alors $k \geqslant 0$. En effet, sous ces hypothèses, il existe λ dans $\mathcal{E}^1(S\sigma)$ et c réel tels que

$$\check{G}\lambda = c \quad \text{sur} \quad S\sigma \quad \text{a. p. p. p.} \qquad \text{et} \qquad \check{G}\lambda \leqslant c \quad \text{sur} \quad X \ .$$

D'où $k = G(\sigma \ , \lambda) - \int u \, d\lambda = c - \int u \, d\lambda \geqslant c - \int G\mu \, d\lambda \geqslant 0$.

2. Principe d'équilibre et principe du maximum.

THÉORÈME 1. - *Soit* G *un noyau sur* X

1° *Si* $\check{G}$ *est régulier,* $G \in (M) \implies G \in (E)$;

2° *Si* G *est régulier,* $G \in (E) \implies G \in (M)$.

Dans le cas où G est positif, on retrouve un théorème connu.

Démonstration.

1° Soit K un compact non $\mathcal{E}$-négligeable. On applique le lemme fondamental à G, au compact K avec $u = 0$: Il existe λ dans $\mathcal{E}^1(K)$ et k réel tels que $G\lambda \leqslant k$ sur $S\lambda$ et $G\lambda \geqslant k$ a. p. p. p. sur K. Si G est dans (M), alors $G\lambda \leqslant k$ sur X.

2° Soit μ dans $\mathfrak{M}$ et a dans $\underset{\sim}{R}$ avec $G\mu \leqslant a$ sur $S\mu$. Alors μ est dans $\mathcal{E}$ et on peut supposer μ de masse 1. Soit x_0 n'appartenant pas à $S\mu$ et soit u_i une famille filtrante croissante de fonctions sur K, continues, et telle que

$$\lim u_i = \check{G}\varepsilon_{x_0} .$$

On applique le lemme fondamental au noyau $\check{G}$, au compact $S\mu$ et à la fonction u_i : il existe σ_i dans $\mathcal{E}^1(S\mu)$ et k_i dans $\underset{\sim}{R}$ tels que

$$\check{G}\sigma_i \leqslant u_i + k_i \quad \text{sur } S\sigma_i \qquad \text{et} \qquad \check{G}\sigma_i \geqslant u_i + k_i \quad \text{a. p. p. p. sur } S\mu .$$

k_i est positif d'après la remarque 1. Donc

$$\int u_i \, d\mu \leqslant G(\mu , \sigma_i) - k_i \leqslant a - k_i \leqslant a .$$

Comme $G\mu(x_0) = \lim \int u_i \, d\mu$, on a $G\mu(x_0) \leqslant a$.

3. Principes du semi-balayage et principes semi-complets du maximum.

THÉORÈME 2. - On considère des noyaux G tels que G et $\check{G}$ soient réguliers. Alors,

1° $G \in (SCM) \iff G \in (SB) \iff \check{G} \in (SCM) \iff \check{G} \in (SB)$;

2° $G \in (SCM+) \iff \check{G} \in (SB+)$

Démonstration.

(a) $\check{G} \in (SB) \implies G \in (SCM)$.

Soient μ dans $\mathcal{E}$, ν dans $\mathfrak{M}$ et a réel avec $\int d\mu = \int d\nu = 1$ et $G\mu \leqslant G\nu + a$ sur $S\mu$. Soient x_0 n'appartenant pas à $S\mu$, k_0 réel et ε'_{x_0} dans $\mathfrak{M}^1(S\mu)$ tels que

$$\check{G}\varepsilon'_{x_0} = \check{G}\varepsilon_{x_0} + k_0 \qquad \text{a. p. p. p. sur } S\mu$$

$$\check{G}\varepsilon'_{x_0} \leqslant \check{G}\varepsilon_{x_0} + k_0 \qquad \text{sur } X \quad (\check{G} \in (SB))$$

On établit $G\mu(x_0) \leq G\nu(x_0) + a$ de la manière suivante :

$$G\mu(x_0) = \int G\mu \, d\varepsilon_{x_0} = \int \check{G}\varepsilon_{x_0} \, d\mu = \int \check{G}\varepsilon'_{x_0} \, d\mu - k_0 = \int G\mu \, d\varepsilon'_{x_0} - k_0 \leq \int G\nu \, d\varepsilon'_{x_0} - k_0 + a$$

$$= \int \check{G}\varepsilon'_{x_0} \, d\nu - k_0 + a \leq \int \check{G}\varepsilon_{x_0} \, d\nu + a = G\nu(x_0) + a \quad .$$

Remarque 2. - Ce même raisonnement prouve, sous les mêmes hypothèses, que si on a $G\mu < G\nu + a$ sur $S\mu$, on a la même inégalité stricte dans X .

(b) $\check{G} \in (SB+) \implies G \in (SCM+)$.

Le raisonnement de (a) s'adapte immédiatement avec $\int d\mu = 1$, $\int d\nu \leq 1$ et $k_0 \geq 0$.

(c) $G \in (SCM) \implies G \in (SB)$.

On suppose donnés un compact K non $\mathcal{E}$-négligeable et une mesure μ de $\mathfrak{M}^1$. Soit u_i une famille filtrante croissante de fonctions continues sur K telle que

$$\lim u_i = G\mu \quad \text{sur } K .$$

On applique le lemme fondamental à G , u_i et K : Il existe k_i réel, σ_i dans $\mathcal{E}^1(K)$ tels que

$$G\sigma_i \leq u_i + k_i \quad \text{sur } S\sigma_i \qquad \text{et} \qquad G\sigma_i \geq u_i + k_i \quad \text{a. p. p. p. sur } K \ .$$

La famille (σ_i) est contenue dans le compact $\mathfrak{M}^1(K)$. La famille (k_i) est :

1° majorée : soit λ dans $\check{\mathcal{F}}^1(K)$:

$$k_i \leq G(\sigma_i , \lambda) - \int u_i \, d\lambda \quad .$$

$G(\sigma_i , \lambda)$ est majoré par $\sup_{x \in K} \check{G}\lambda(x)$ et $\int u_i \, d\lambda$ est minoré indépendamment de i .

2° minorée : on a

$$G\sigma_i \leq u_i + k_i \leq G\mu + k_i \quad \text{sur } S\sigma_i \ ,$$

donc $G\sigma_i \leq G\mu + k_i$ sur X . Soit λ dans $\check{\mathcal{F}}^1(K)$:

$$k_i \geq G(\sigma_i , \lambda) - G(\mu , \lambda) \geq \inf_{(x,y) \in K \times K} G(x , y) - \int \check{G} \lambda \, d\mu \quad .$$

La famille (σ_i , k_i) est donc relativement compacte dans $\mathfrak{M}^1(K) \times \mathbb{R}$. Donc il existe σ dans $\mathfrak{M}^1(K)$, k dans $\mathbb{R}$ et une sous-famille filtrante (σ_j , k_j) telle que

$$\lim \sigma_j = \sigma \qquad \text{et} \qquad \lim k_j = k \quad .$$

En prenant des $\underline{\lim}$ dans les inégalités ci-dessus, on obtient le résultat annoncé.

(d) $G \in (SCM+) \Longrightarrow \check{G} \in (SB+)$.

On sait que

$$G \in (SCM+) \Longrightarrow G \in (SCM) \Longrightarrow \check{G} \in (SB)$$
$$G \in (SCM+) \Longrightarrow G \in (M) \Longrightarrow G \in (E) \quad .$$

Un raisonnement analogue à celui de la remarque 1 permet de voir que

$$(G \in (E) \text{ et } \check{G} \in (SB)) \Longrightarrow \check{G} \in (SB+)$$

Remarque 3. - Principe du balayage ordinaire et principe du balayage inverse.

On considère l'ensemble (B) des noyaux G qui satisfont à : Pour tout compact K non $\mathcal{E}$-négligeable et pour toute mesure μ de $\mathfrak{M}$, il existe ν dans $\mathfrak{M}(K)$ tel que

$$G\nu = G\mu \quad \text{a. p. p. p. sur } K \qquad \text{et} \qquad G\nu \leqslant G\mu \quad \text{sur } X .$$

Si G est positif (resp. négatif), on dit que G (resp. $-G$) vérifie le principe du balayage ordinaire (resp. inverse). On peut comparer ces propriétés à celles qui interviennent dans les semi-principes.

1° Soit G tel que, quels que soient x et y de X ,

$$G(x , y) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad G(x , x) > 0 \quad .$$
$$(G \in (B) , \ G \in (E) \text{ et } \check{G} \in (E)) \Longrightarrow (G \in (SB+)) \quad .$$

Une conséquence de cette observation est que le noyau newtonien et les noyaux de Riesz dans $\underset{\approx}{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ sont dans (SB+) .

2° Soit G tel que, quels que soient x et y de X ,

$$G(x , y) < 0$$

$$(G \in (E) , \ \check{G} \in E \text{ et } G \in (SB)) \Longrightarrow (G \in B) \quad ,$$

c'est-à-dire, $-G$ vérifie le principe du balayage inverse. Les réciproques de ces propositions ne sont pas vraies en général. En effet, si on définit sur un espace à trois points les noyaux G_1 et G_2 par les matrices

$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G_2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

On vérifie aisément que

$$G_1 \in (E) , \quad \check{G}_1 \in (E) , \quad G_1 \in (SB+) \quad \text{et} \quad G \notin (B)$$
$$G_2 \in (E) , \quad \check{G}_2 \in (E) , \quad G_2 \in (B) \quad \text{et} \quad G \notin (SB)$$

On notera cependant que le noyau G défini sur $\underset{\sim}{R}$ par

$$G(x , y) = - 1 - (x - y)$$

est dans (B) et dans (SB+) .

III. Énergie.

NINOMIYA [9] a étudié des propriétés relatives au signe de l'énergie de noyaux symétriques positifs ou de signe quelconque. On donne ici des résultats pour des noyaux non symétriques.

DÉFINITIONS. - Un noyau G est dit de type positif si, quels que soient μ et ν dans $\mathcal{E}$, on a

$$G(\mu , \mu) + G(\nu , \nu) \geqslant G(\mu , \nu) + G(\nu , \mu) \quad .$$

Un noyau G est dit de type semi-positif si, quels que soient μ et ν dans $\mathcal{E}$ avec $\int d\mu = \int d\nu$, on a

$$G(\mu , \mu) + G(\nu , \nu) \geqslant G(\mu , \nu) + G(\nu , \mu) \quad .$$

1. Noyau de signe quelconque.

Dans ce paragraphe, on considère un noyau G , à valeurs dans $]-\infty , +\infty]$, s. c. i. mais continu en tout point (x , y) avec $x \neq y$.

Le résultat suivant est dû à NINOMIYA.

PROPOSITION 1. - Si G est symétrique $(G = \check{G})$, il y a équivalence entre les propriétés :

(a) G est de type semi-positif ;

(b) $\forall \mu \in \mathcal{E}$, $\forall \nu \in \mathcal{E}$, $\forall a \in \underset{\sim}{R}$:

$$\left(\int d\mu = \int d\nu , \quad S\mu \cap S\nu = \emptyset \text{ et } G\mu \leqslant G\nu + a \text{ sur } S\mu\right) \Longrightarrow \left(\exists\ y_0 \in S\nu , \quad G\mu(y_0) \leqslant G\nu(y_0) + a\right) .$$

Pour un noyau non nécessairement symétrique, on a la condition suffisante suivante :

THÉORÈME 3. - Si G et $\check{G}$ sont réguliers, et si G est dans (SCM) , alors G est de type semi-positif.

Démonstration. - On suppose que le noyau $G + \check{G}$ (symétrique) ne vérifie pas la propriété (b) de la proposition 1, c'est-à-dire

$$\exists\ \mu \in \mathcal{E}\ ,\quad \exists\ \nu \in \mathcal{E}\ ,\quad \exists\ a \in \underset{\sim}{R}\ ,\qquad \int d\mu = \int d\nu = 1\ ,\qquad S\mu \cap S\nu = \emptyset\ ,$$

$$G\mu + \check{G}\mu \leqslant G\nu + \check{G}\nu + a \quad \text{sur } S\mu$$

$$G\mu + \check{G}\mu > G\nu + \check{G}\nu + a \quad \text{sur } S\nu\ .$$

On pose

$$b = \sup_{x \in S\mu}\ [\check{G}\nu(x) - \check{G}\mu(x)]\ .$$

D'une part, la fonction $x \to \check{G}\nu(x) - \check{G}\mu(x)$ est s. c. s. sur $S\mu$, donc il existe x_1 dans $S\mu$ tel que

$$b = \check{G}\nu(x_1) - \check{G}\mu(x_1)\ .$$

D'autre part, on a $G\mu \leqslant G\nu + a + b$ sur $S\mu$ donc partout, $(G \in (SCM))$. On déduit

$$\check{G}\nu \leqslant \check{G}\mu + G\mu - G\nu - a < \check{G}\mu + b \qquad \text{sur } S\nu\ .$$

Comme $\check{G}$ est dans (SCM) d'après le théorème 2, on obtient en utisisant la remarque 2

$$b > \check{G}\nu + \check{G}\mu \qquad \text{sur } X\ \text{, en particulier en } x_1\ .$$

Cette contradiction achève la démonstration du théorème 3.

2. Noyau positif.

Dans ce paragraphe, on considère un noyau G, à valeurs dans $]0\ , +\infty]$, s. c. i. mais continu en tout point $(x\ , y)$ avec $x \neq y$.

(A) Noyau symétrique.

Le résultat suivant est dû à NINOMIYA.

PROPOSITION 2. - Si G est symétrique, il y a équivalence entre les propriétés :

(a) G est de type positif ;

(b) $\forall\ \mu \in \mathcal{E}\ ,\ \forall\ \nu \in \mathcal{E}$:

$$(G\mu \leqslant G\nu \ \text{sur}\ S\mu) \Longrightarrow (\exists\ y_0 \in S\nu : \ G\mu(y_0) \leqslant G\nu(y_0))\ .$$

On peut donner de cette propriété (b) une formulation d'apparence plus faible qui sera utile, d'une part pour le cas d'un noyau positif dans (SCM) (corollaire de la proposition 2'), d'autre part pour le cas d'un noyau positif non symétrique (théorème 4).

PROPOSITION 2'. - <u>Si</u> G <u>est symétrique, il y a équivalence entre les propriétés</u> :

(a) G <u>est de type positif</u> ;

(b') $\forall \mu \in \mathcal{E}$, $\forall \nu \in \mathcal{E}$:

$$\left(\int d\mu > \int d\nu \ , \ S\mu \cap S\nu = \emptyset \ , \ G\mu \leqslant G\nu \ \underline{\text{sur}} \ S\mu\right) \Longrightarrow \left(\exists\, y_0 \in S\nu : \ G\mu(y_0) \leqslant G\nu(y_0)\right).$$

Il suffit évidemment de montrer que (b') entraîne (a) , et pour cela la technique de Ninomiya, avec quelques précisions, convient. Si A et B sont deux compacts disjoints de X , non $\mathcal{E}$-négligeables, on pose

$$N(A\ ,\ B) = \inf\left(\frac{G(\mu\ ,\ \mu)\ G(\nu\ ,\ \nu)}{[G(\mu\ ,\ \nu)]^2}\ ;\ \mu \in \mathfrak{M}^1(A)\ ,\quad \nu \in \mathfrak{M}^1(B)\right) .$$

La propriété (a) est vérifiée si, quels que soient A et B , on a $N(A\ ,\ B) \geqslant 1$. On suppose donnés deux tels courants A et B . D'après les hypothèses faites sur G , il existe μ_0 dans $\mathcal{E}^1(A)$ et ν_0 dans $\mathcal{E}^1(B)$ tels que

$$N(A\ ,\ B) = \frac{G(\mu_0\ ,\ \mu_0)\ G(\nu_0\ ,\ \nu_0)}{[G(\mu_0\ ,\ \nu_0)]^2} .$$

On pose $a = G(\mu_0\ ,\ \mu_0)$, $b = G(\mu_0\ ,\ \nu_0)$ et $c = G(\nu_0\ ,\ \nu_0)$. Par une méthode variationnelle classique et en utilisant la symétrie de G , on trouve

$$bG\mu_0 \leqslant aG\nu_0 \quad \text{sur} \quad S\mu_0 \qquad \text{et} \qquad bG\nu_0 \leqslant cG\mu_0 \quad \text{sur} \quad S\nu_0 .$$

On établit maintenant que la propriété (b') entraîne

$$b^2 \leqslant a.c$$

en distinguant trois cas :

<u>1er cas</u>. - $b > a$.

$$\begin{pmatrix} b\int d\mu_0 > a\int d\nu_0 \\ bG\mu_0 \leqslant aG\nu_0 \quad \text{sur} \quad S\mu_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(\exists\, y_0 \in S\nu_0 :\ bG\mu_0(y_0) \leqslant aG\nu_0(y_0)\right) ,$$

or $bG\nu_0(y_0) \leqslant cG\mu_0(y_0)$, donc $b^2 \leqslant a.c$.

<u>2e cas</u>. - $b \leqslant a$ et $b > c$.

$$\begin{pmatrix} b\int d\nu_0 > c\int d\mu_0 \\ bG\nu_0 \leqslant cG\mu_0 \quad \text{sur} \quad S\nu_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(\exists\, x_0 \in S\mu :\ bG\nu_0(x_0) \leqslant cG\mu_0(x_0)\right) ,$$

or $bG\mu_0(x_0) \leqslant aG\nu_0(x_0)$, donc $b^2 \leqslant a.c$.

3e cas. - $(b \leq a$ et $b \leq c) \implies (b^2 \leq ac)$.

COROLLAIRE. - Si un noyau symétrique positif est dans (SCM) , alors il est de type positif.

(B) Noyau non symétrique.

Une condition suffisante pour qu'un noyau non symétrique positif soit de type positif a été donnée récemment dans un autre cadre, par M. ITO [6]. La proposition 2' permet de donner une démonstration simple de ce résultat dont l'énoncé utilise les définitions suivantes :

DÉFINITIONS.

- On dit qu'un noyau G vérifie le principe complet du maximum $(G \in (CM))$ si

$\forall \mu \in \mathcal{E}$, $\forall \nu \in \mathfrak{M}$, $\forall a \in [0, +\infty[$, $(G\mu \leq G\nu + a$ sur $S\mu) \Rightarrow (G\mu \leq G\nu + a$ sur $X)$.

- On dit qu'un noyau G vérifie le principe de positivité des masses si

$$\forall \mu \in \mathcal{E} , \quad \forall \nu \in \mathfrak{M} : \qquad (G\nu \geq G\mu \text{ sur } X) \implies \left(\int d\nu \geq \int d\mu\right) .$$

THÉORÈME 4. - Si G et $\check{G}$ sont réguliers, si G est dans (CM) et vérifie le principe de positivité des masses, alors G est de type positif.

Démonstration. - Sous les hypothèses faites, on a [1] les propriétés suivantes :

1° $\check{G}$ est dans (CM) ;

2° Pour tout compact K et pour tout point x n'appartenant pas à K , il existe ε'_x dans $\mathfrak{M}(K)$ telle que $G\varepsilon'_x = G\varepsilon_x$ a. p. p. p. sur K , $G\varepsilon'_x \leq G\varepsilon_x$ sur X et $\int d\varepsilon'_x \leq 1$.

3° Si on a $\check{G}\nu < \check{G}\mu + a$ sur $S\nu$ (inégalité stricte) avec ν dans $\mathcal{E}$, μ dans $\mathcal{E}$ et a dans $[0, +\infty[$, alors $\check{G}\nu < \check{G}\mu + a$ sur X (inégalité stricte).

On fait ensuite un raisonnement par l'absurde analogue à celui du théorème 3.

On suppose que le noyau $G + \check{G}$ ne vérifie pas la condition (b') de la proposition 2' , c'est-à-dire

$$\exists \mu \in \mathcal{E} , \quad \exists \nu \in \mathcal{E} , \qquad \int d\mu > \int d\nu , \qquad S\mu \cap S\nu = \emptyset$$

$$G\mu + \check{G}\mu \leq G\nu + \check{G}\nu \quad \text{sur } S\mu$$

$$G\mu + \check{G}\mu > G\nu + \check{G}\nu \quad \text{sur } S\nu$$

On pose

$$a = \operatorname{Max}[0 , \sup_{x \in S\mu} [\check{G}\nu(x) - \check{G}\mu(x)]] ,$$