Marc Rogalski

Opérateurs de Lion, projecteurs boréliens et simplexes analytiques

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. n° 11, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A10_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
12e année, 1967/68, n° 11

29 février 1968

OPÉRATEURS DE LION, PROJECTEURS BORÉLIENS ET SIMPLEXES ANALYTIQUES

par Marc ROGALSKI

Résumé

Soient X un espace compact, et H un sous-espace séparant de $C(X)$, contenant les constantes. Un H-opérateur de Lion L sur X est une application linéaire et positive

$$L : C(X) \to \underset{\sim}{R}^X ,$$

telle que :

(1) Pour toute $f \in H$, $L(f) = f$;

(2) Il existe un sous-espace dense de $C(X)$, V, tel que, $\forall f \in V$, il existe $M > 0$ et une suite $\{f_n\}$ de fonctions de H tels que

$$L(f)(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) .$$

On voit que l'étude de ces opérateurs généralise les travaux de LION sur les familles d'opérateurs, grâce aux remarques suivantes :

(a) Soit $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille résolvante sur X, telle que $\lambda V_\lambda\, 1 = 1$, et telle que $H = V_\lambda[C(X)]$ sépare X. Si on pose alors

$$L(f)(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda\, f(x) ,$$

on voit facilement que L est un H-opérateur de Lion.

(b) Soit $(P_t)_{t>0}$ un semi-groupe markovien fortement continu sur X, et soit H l'espace vectoriel fermé engendré par l'ensemble $\bigcup_{t>0} P_t[C(X)]$. Si H sépare X, et si X est métrisable, on voit que l'opérateur L défini par

$$L(f)(x) = \lim_{t\to 0} P_t\, f(x)$$

est un H-opérateur de Lion.

(c) Soit L un projecteur continu positif de $C(X)$ sur un sous-espace H, séparant, fermé, et contenant les constantes. Alors L est un H-opérateur de Lion.

1° Dans une première partie, on montre qu'un H-opérateur de Lion s'étend en un projecteur de l'adhérence pour la norme uniforme de l'espace $C(X) + L[C(X)]$ sur le sous-espace $\overline{L[C(X)]}$, et on démontre que $\overline{L[C(X)]}$ est réticulé pour son ordre propre.

2° Dans une deuxième partie, on étudie la frontière de Choquet de l'espace H. On montre que l'espace $\overline{H}$ est un espace simplicial, c'est-à-dire qu'il vérifie le lemme de Riesz pour son ordre naturel (ou, ce qui est équivalent, que $\overline{H}'$ est réticulé pour l'ordre dual).

3° Dans une troisième partie, on introduit les simplexes de Lion. Un simplexe de Lion est un simplexe X tel que, si $L(f)$ désigne, pour $f \in C(X)$, la fonction $x \to \mu_x(f)$ (où μ_x est la mesure maximale de barycentre x), l'opérateur L soit un $A(X)$-opérateur de Lion ($A(X)$, espace des fonctions affines continues sur X). On montre alors que la donnée d'un opérateur de Lion sur un espace compact est équivalente à la donnée d'un simplexe de Lion. Ce résultat permet de donner de nouvelles caractérisations des cas où $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda f(x)$, ou bien $\lim\limits_{t\to 0} P_t f(x)$, sont des fonctions continues pour toute f continue (cf. (a) et (b)).

4° On étudie ensuite les simplexes de Lion. On montre qu'ils ont toutes les "bonnes" propriétés que l'on peut souhaiter, par exemple : l'espace des fonctions bornées boréliennes de Baire, satisfaisant au calcul barycentre, est exactement le plus petit espace de fonctions bornées stable par limites simples de suites et contenant les fonctions affines continues ; de plus, cet espace est réticulé pour son ordre propre. On étudie aussi les fonctions "de classe affine α " (α ordinal), et la structure borélienne des points extrémaux de tels simplexes.

On donne deux exemples importants de simplexes de Lion : les simplexes métrisables, et les simplexes dont l'ensemble des points extrémaux est un K_σ, et on montre la stabilité de la classe des simplexes de Lion par l'opération de somme directe finie et par le passage aux faces fermées.

On montre enfin que, en un certain sens, les simplexes de Lion sont les "meilleurs" simplexes qui ne soient pas quelconques.

5° On généralise la notion d'opérateur de Lion, en définissant les opérateurs simpliciaux : si H est un sous-espace séparant de $C(X)$, contenant les constantes, un opérateur H-simplicial est une application linéaire positive L de $C(X)$ dans l'espace γ_H des fonctions boréliennes bornées "satisfaisant au calcul barycentrique modulo H ", telle que $L(f) = f$, $\forall f \in H$.

On étend à ces opérateurs les principales propriétés des opérateurs de Lion, et on montre l'équivalence de la donnée d'un opérateur H-simplicial et de celle d'un simplexe quelconque.

Ceci permet de démontrer quelques résultats sur des espaces de fonctions affines sur un simplexe quelconque, par exemple : le plus petit espace de fonctions affines contenant les fonctions affines semi-continues et stable par limites simples de suites, est réticulé pour son ordre propre. On étudie aussi l'espace des fonctions affines, de classe de Baire α (α ordinal).

Le texte complet de cet exposé a été multigraphié par le service des Publications du Laboratoire de Mathématiques de la Faculté des Sciences d'Orsay (1968), et paraîtra, par ailleurs, dans le Journal of functional Analysis.