

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

GABRIEL MOKOBODZKI

DANIEL SIBONY

Cônes de fonctions et théorie du potentiel II. Résolvantes et semi-groupes subordonnés à un cône de fonctions

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 11 (1966-1967), exp. n° 9, p. 1-29

http://www.numdam.org/item?id=SB CD_1966-1967__11__A5_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CÔNES DE FONCTIONS ET THÉORIE DU POTENTIEL

II. RÉSOLVANTES ET SEMI-GROUPES SUBORDONNÉS À UN CÔNE DE FONCTIONS.

par Gabriel MOKOBODZKI et Daniel SIBONY

Introduction. - Dans la partie I de ce travail ⁽¹⁾, nous avons entre autres démontré qu'étant donné un cône convexe $C \subset C^+(\Omega)$ vérifiant nos quatre axiomes, on peut, à tout $v \in C$, associer un noyau V unique subordonné à C avec $V1 = v$ et un opérateur A ("de Dynkin généralisé") tel que $AV\varphi = \varphi$, $\forall \varphi \in C_K(\Omega)$. Il s'agit maintenant de construire la résolvante et le semi-groupe associés à un tel noyau.

En fait, nous allons élargir le cadre du travail et résoudre le problème plus général suivant :

Soit $C \subset C^+(\Omega)$ un cône convexe adapté, linéairement séparant et stable par sommes continues. Soit V un noyau subordonné à C , c'est-à-dire une application linéaire de $C_K(\Omega)$ dans $C - C$ telle que :

- (a) $V(C_K^+(\Omega)) \subset C$
- (b) $\text{Supp } V\varphi \subset S\varphi$ (cf. (I)).

Alors, ce noyau possède une résolvante achevée et un semi-groupe dont on précisera les domaines naturels, les extensions, et l'interprétation au moyen des mesures pseudo-portées par le support fin $\delta(V)$ du noyau V .

Première partie :

Résolvante et semi-groupes. Cas sous-markovien.

Nous allons d'abord traiter le cas "sous-markovien", car, outre qu'il correspond au cas de la théorie de Hunt, il met en évidence certains arguments qui seront par la suite généralisés.

HYPOTHÈSES.

- 1° C est un cône convexe adapté, $C \subset C^+(\Omega)$, linéairement séparant.

⁽¹⁾ Cf. Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 11e année, 1966/67, n° 8, 35p.

2° La fonction 1 est C-surmédiane (on dira aussi C-dominante) c'est-à-dire
 $(u \in C, 1 \geq u \text{ sur } \text{Supp } u) \implies (1 \geq u \text{ dans } \Omega).$

1. Résolvante.

Le théorème général suivant fournit la résolvante associée à un noyau V subordonné à C tel que $V1 = v_0 \in C$ et soit borné.

THÉORÈME 1. - Soit V une application linéaire positive de $C_b(\Omega)$ dans lui-même, vérifiant le principe de domination ⁽²⁾. Alors, il existe une famille $(v_\lambda)_{\lambda > 0}$, et une seule, d'opérateurs linéaires bornés de C_b dans lui-même telle que :

$$V - v_\lambda = \lambda V v_\lambda = \lambda v_\lambda V, \quad \forall \lambda > 0.$$

Ces opérateurs vérifient l'équation résolvante :

$$v_\lambda - v_\mu = -(\lambda - \mu) v_\lambda v_\mu, \quad \forall \lambda, \mu > 0,$$

et sont des opérateurs positifs.

Démonstration.

1° Unicité. - Si une telle famille existe, on a nécessairement, pour tout $\lambda > 0$,

$$(I - \lambda v_\lambda)(\lambda V + I) = I \quad (I : \text{application identique}).$$

et

$$(\lambda V + I)(I - \lambda v_\lambda) = I.$$

L'opérateur $I - \lambda v_\lambda$, donc v_λ , est par suite unique s'il existe. (Considérer le groupe des éléments inversibles dans $\mathcal{L}(C_b, C_b)$.)

2° Existence. - Pour $\lambda > 0$ assez petit (c'est-à-dire tel que $\|\lambda V\| < 1$), on pose : $v_\lambda = \sum_{k \geq 0} (-\lambda)^k V^{k+1}$, ce qui a un sens. Si v_λ et v_μ sont définis, ils vérifient l'équation résolvante. En effet :

$$(1) \quad v_\lambda = V - \lambda V v_\lambda V$$

$$(2) \quad v_\mu = V - \mu v_\mu V V$$

(2) c'est-à-dire : $(V\varphi \leq V\psi \text{ sur } (\varphi > 0)) \implies (V\varphi \leq V\psi \text{ partout}).$

$$V_\lambda = V - \lambda V_\lambda [V_\mu + \mu V_\mu V] = V - \lambda V_\lambda V_\mu - \lambda \mu V_\lambda V_\mu V$$

$$V_\mu = V - \mu [V_\lambda + \lambda V_\lambda V] V_\mu = V - \mu V_\lambda V_\mu - \lambda \mu V_\lambda V_\mu V$$

d'où, par différence, le résultat.

V_λ , s'il existe est un opérateur ≥ 0 . En effet, V_λ est un opérateur borné.

Soit $g \in \mathcal{C}_b^+(\Omega)$; Vg est un élément borné du cône C . On a

$$V_\lambda g = V(g - \lambda V_\lambda g)$$

$g - \lambda V_\lambda g$ étant borné, le second membre a un sens. Il suffit donc de démontrer que $\lambda V_\lambda Vg \leq Vg$. Posons $u = Vg$.

$$\lambda V_\lambda u = V[\lambda(u - \lambda V_\lambda u)] = V\varphi$$

où $\varphi = \lambda(u - \lambda V_\lambda u)$ est borné. On a $u \geq V\varphi$ sur l'ensemble $[\varphi \geq 0]$ (c'est évident), donc partout. Donc $\lambda V_\lambda u \leq u$.

C. Q. F. D.

L'ensemble e des $\lambda > 0$, tels que V_λ existe, est ouvert (complémentaire du spectre de $-V$). Il est fermé, si $(\lambda_n) \subset e$, $\lambda_n \rightarrow \mu$,

$$\|V_{\lambda_n} - V_{\lambda_m}\| \leq |\lambda_n - \lambda_m| \|V\|^2 \rightarrow 0.$$

Donc V_λ existe pour tout $\lambda > 0$.

La démonstration ci-dessus est pratiquement identique à celle de MEYER dans [6].

Définitions.

1° Soit u borélienne bornée positive dans Ω ($u \in \mathcal{B}^+$); u est dite surmédiante par rapport à la résolvante (V_λ) si on a :

$$\lambda V_\lambda u \leq u, \quad \forall \lambda > 0.$$

2° Soit $u \in \mathcal{B}^+$, u est dite V -dominante, V étant un noyau subordonné à C si pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_b(\Omega)$,

$$(u \geq V\varphi \text{ sur } S\varphi) \implies (u \geq V\varphi \text{ dans } \Omega)$$

3° Soit $u \in \mathcal{B}^+$; u est dite C -dominante si pour tout $v \in C$,

$$(u \geq v \text{ sur } \text{Supp } v) \implies (u \geq v \text{ dans } \Omega).$$

Remarque. - On a évidemment l'équivalence :

$$(u \text{ est } C\text{-dominante}) \iff (\hat{u} \text{ est } C\text{-dominante})$$

où $\hat{u}$ est la régularisée s. c. i. de u .

PROPOSITION 2. - Les fonctions V -dominantes et (V_λ) -surmédianes dans Ω sont les mêmes.

La démonstration est identique à celle de P.-A. MEYER ([7], p.)

COROLLAIRE 3. - Toute fonction C -dominante s. c. i. est (V_λ) -surmédiane pour tout noyau V subordonné à C .

En particulier, les fonctions de C sont (V_λ) -surmédianes.

THÉOREME 4. - Soit V subordonné à C avec $V_1 = v_0$ borné > 0 et strictement concave. Soit (V_λ) la résolvante associée à V . Alors on a :

$$u = \sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda u, \quad \forall u \in C.$$

Démonstration. - Soit u une fonction (V_λ) -surmédiane (c'est-à-dire par rapport à la résolvante). On a, pour tout $x \in \Omega$,

$$\lambda V_\lambda u(x) \leq \mu V_\mu u(x) \quad \forall \lambda \leq \mu;$$

et, on peut écrire $\lambda V_\lambda u(x) = \int u d\mu_{x,\lambda}$, où $\mu_{x,\lambda}$ est une mesure de Radon ≥ 0 sur Ω , car $u \rightarrow \lambda V_\lambda u(x)$ est une forme linéaire croissante sur C , qui est un cône adapté. On pose

$$T(u) = \sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda u(x), \quad \forall u \in C.$$

T est une forme linéaire sur $C - C$, croissante sur C , donc c'est une mesure ≥ 0 , μ_x (C -intégrable). On a évidemment

$$\int u d\mu_x \leq u(x), \quad \forall u \in C.$$

Si on avait $\mu_x \neq \varepsilon_x$, comme v_0 est strictement concave, on aurait

$$\int v_0 d\mu_x < v_0(x)$$

or

$$\int v_0 d\mu_x = \sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda v_0(x) = \sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda V_1(x)$$

De plus, $V - V_\lambda = \lambda V_\lambda V$, $\forall \lambda > 0$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}_K^+$. Il existe $\alpha > 0$ réel tel que $\varphi \leq \alpha v_0$.

$$\lambda V_\lambda(\varphi) \leq \alpha \lambda V_\lambda v_0 \leq \alpha v_0.$$

Donc $V_\lambda \varphi \leq \frac{\alpha}{\lambda} v_0$. Donc $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda V\varphi = V\varphi$ où encore $\int V\varphi d\mu_x = V\varphi(x)$ or

$$\int v_0 d\mu_x = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq 1 \\ \varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)}} \int V\varphi d\mu_x = v_0(x)$$

Donc $\mu_x = \varepsilon_x$.

COROLLAIRE 5. - Les mesures $(\mu_{x,\lambda})_{\lambda>0}$ convergent C-faiblement vers ε_x , $\forall x \in \Omega$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int u d\mu_{x,\lambda} = u(x), \quad \forall u \in \mathcal{C}.$$

COROLLAIRE 6. - Tout élément de $\mathcal{C}$ peut s'écrire $u = \sup V\varphi_n$ où $V\varphi_n$ est une suite croissante avec $(\varphi_n) \subset \mathcal{C}_b^+(\Omega)$. Plus généralement toute u , telle que $u = \sup_n u_n$ où $(u_n) \subset \mathcal{C}$, et (u_n) croissante, peut s'écrire :

$$u = \sup_p V\varphi_p \quad \text{avec} \quad (V\varphi_p) \text{ croissante et } (\varphi_p) \subset \mathcal{C}_b^+(\Omega).$$

Démonstration. - On a, pour toute u bornée, $u \in \mathcal{C}$,

$$u = \sup_{\lambda>0} \lambda V_\lambda u = \sup_{\lambda>0} V[\lambda(u - \lambda V_\lambda u)] = \sup_n V\varphi_n$$

et

$$n(u - nV_n u) = \varphi_n \in \mathcal{C}_b^+(\Omega), \quad \forall n$$

car u est bornée, donc $V_n u$ aussi.

Supposons maintenant $u = \sup_n u_n$ avec $(u_n) \subset \mathcal{C}$ et (u_n) croissante. On peut toujours écrire $u = \sup_n u'_n$ avec $(u'_n) \subset \mathcal{C}$, u'_n bornée pour tout n et (u'_n) croissante. La suite double $(pV_p u'_n)_{n,p}$ est croissante, u , étant s. c. i., s'écrit comme $\sup \alpha_n$ où $\alpha_n \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$, (α_n) croissante, $\alpha_n < u \quad \forall n$.

Pour tout i , on peut trouver p_i et n_i tels que

$$p_i V_{p_i} u'_{n_i} > \alpha_i \quad \text{sur } S\alpha_i.$$

Donc, en extrayant au besoin une sous-suite de (p_i, n_i) , on a

$$u = \sup_i k_i V_{k_i} u'_{j_i} = \sup_i V[k_i(u'_{j_i} - k_i V_{k_i} u'_{j_i})] = \sup_i V\varphi_i$$

avec $(\varphi_i) \subset C_b^+$ et $(V\varphi_i)$ croissante.

THÉOREME 7. - Soit M^+ l'ensemble des mesures ≥ 0 sur Ω , C-intégrables. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur M^+ , convergeant C-faiblement vers $\mu \in M^+$ (c'est-à-dire $\lim_{\mathfrak{F}} \int v d\nu = \int v d\mu$, $\forall v \in C$). Alors, pour toute u continue, C-majorée (c'est-à-dire telle que $|u| \leq w$ avec $w \in C$), on a :

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int u d\nu = \int u d\mu .$$

Démonstration. - Soit $(M^+, \mathcal{C})$ l'ensemble M^+ muni de la topologie $\mathcal{C}$ associée au filtre $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire que $(A \cup \{\mu\})_{A \in \mathfrak{F}}$ est le filtre des voisinages de μ pour cette topologie.

Toute v de la forme $v_1 - v_2$ ($v_i \in C$) est continue sur cet espace topologique et toute φ continue, C-majorée, s'écrit

$$\int \varphi d\nu = \inf_{\substack{v_1 - v_2 \geq \varphi \\ v_i \in C}} \int (v_1 - v_2) d\nu .$$

Donc φ est s. c. s. pour la topologie $\mathcal{C}$ (comme inf de fonctions continues).

Le même raisonnement appliqué à $(-\varphi)$ montre que l'application $\nu \rightarrow \int \varphi d\nu$ est continue sur $(M^+, \mathcal{C})$.

COROLLAIRE 8. - Pour toute u s. c. i., $u \geq 0$ (V_λ) -surmédiane, on a :

$$u = \sup_n \{V\varphi_n ; (V\varphi_n)_n \text{ croissante, } \varphi_n \text{ borélienne } \geq 0, \forall n\} .$$

Démonstration. - En effet, comme v_0 est > 0 et $\inf(nv_0, u)$ est (V_λ) -surmédiane, on peut se ramener au cas où u est bornée.

u étant s. c. i. peut s'écrire comme $\sup \psi_n$ où (ψ_n) croissant, et $(\psi_n) \subset C_K^+$; chaque ψ_n , étant C-majorée, est continue sur $(M^+, \mathcal{C})$. Donc u est s. c. i. sur $(M^+, \mathcal{C})$. Donc

$$\liminf_{\lambda} \int u d\mu_{x,\lambda} \geq u(x) .$$

Par ailleurs,

$$\int u \, d\mu_{x,\lambda} = \lambda V_\lambda u(x) \leq u(x) \quad \text{pour tout } \lambda > 0$$

car u est (V_λ) -surmédiane. Donc $u = \sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda u$, et en écrivant à nouveau $u = \sup_{\lambda > 0} V(\lambda(u - \lambda V_\lambda u))$, on obtient le résultat.

PROPOSITION 9. - Les propriétés suivantes sont équivalentes, pour $u \in \mathcal{B}^+$:

- (a) u est C-dominante ;
- (b) u est V-dominante pour tout noyau V subordonné à C associé à un élément $v \in C$ (c'est-à-dire $V1 = v$) ;
- (c) u est V-dominante pour un noyau V subordonné à C associé à une fonction strictement C-concave.

Démonstration. - (a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) : c'est immédiat.

(c) $\implies$ (a), car si u est V-dominante, $\hat{u}$ l'est aussi, donc

$$\hat{u} = \sup_n V\varphi_n,$$

et par suite $\hat{u}$ est C-dominante, donc u l'est aussi.

Remarque. - Les fonctions C-dominantes peuvent donc être appelées fonctions C-surmédianes, puisqu'elles sont surmédianes par rapport à tout noyau subordonné à C . On verra qu'on peut associer à des cônes plus généraux que C une notion de fonction surmédiane.

2. Construction du semi-groupe.

Soit toujours un noyau V subordonné à C tel que $V1 = v_0 \in C$ soit une fonction bornée. Soit (V_λ) la résolvante achevée du noyau V .

PROPOSITION 10. - Il existe un semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ fortement continu d'opérateurs linéaires ≥ 0 sur $H = V(C_K)$ tel que, pour tout $u \in C$, $P_t u$ est s. c. i.

Démonstration. - On pose $S_\lambda = \lambda(\lambda V_\lambda - I)$. S_λ est un opérateur linéaire borné dans $C_b(\Omega)$. Soit

$$Q_t^\lambda = e^{tS_\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

Pour tout $u \in C$, on a $Q_t^\lambda u \leq u$, car :

$$Q_t^\lambda u = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n \lambda^n (\lambda V_\lambda)^n u}{n!}$$

et on a $\lambda V_\lambda u \leq u$, donc $(\lambda V_\lambda)^n u \leq u$, $\forall n$.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre de Frechet sur $\mathbb{N}$. On pose

$$P_t u(x) = \lim_{\mathcal{U}} Q_t^\lambda u(x) \quad (x \in \Omega).$$

L'application $u \rightarrow P_t u(x)$ est une forme linéaire sur $C - C$, croissante sur C , donc il existe une mesure, et une seule, $\mu_{x,t} \geq 0$ sur Ω telle que :

$$P_t u(x) = \int u d\mu_{x,t}, \quad \forall u \in C.$$

D'après le théorème de Hille-Yosida, pour toute $u = V\varphi$ ($\varphi \in \mathcal{C}_b$), $P_t u$ est continue, et on a

$$P_{t+t'} u = P_{t'}(P_t u), \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}^+;$$

cette propriété de semi-groupe se prolonge à tous les éléments de $C - C$, et tout $u \in C$ s'écrivant $u = \sup_n V\varphi_n$; $P_t u$ est s. c. i.

Remarquons que P_t se prolonge à l'espace vectoriel des fonctions φ continues C-majorées (c'est-à-dire telles qu'il existe $w \in C$, $|\varphi| \leq w$) en vertu de la formule

$$\int \varphi d\mu = \inf_{\substack{v \in C-C \\ v \geq \varphi}} \int v d\mu \quad \text{pour toute } \mu, \text{ mesure } \geq 0 \text{ C-intégrable.}$$

COROLLAIRE 11. - Soit H_C l'espace vectoriel des fonctions continues C-majorées. Alors, le semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ opère de H_C dans H_C .

En effet, on a, par construction de (P_t) ,

$$P_t u \leq u, \quad \forall u \in C \quad \text{et} \quad \forall t \geq 0.$$

Donc si $\varphi \in H_C$,

$$|P_t \varphi| \leq P_t w \leq w \quad \text{pour un } w \in C,$$

et $P_t \varphi$ est continue. (Cf. [13].)

Définition. - Une fonction f est dite excessive, si elle est ε_x V -mesurable, $\forall x$, et telle que

$$\lambda V_\lambda f \leq f \quad \text{et} \quad f = \sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda f$$

COROLLAIRE 12. - Si une fonction f est excessive, elle est telle que

$$P_t f \leq f, \quad \forall t > 0 \quad \text{et} \quad f = \sup_{t > 0} P_t f$$

En effet, le théorème de Hille-Yosida nous apprend que

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_t V\varphi = V\varphi, \quad \forall \varphi \in C_b.$$

Cette relation est vraie pour toute φ borélienne. En effet, on voit sans peine qu'elle l'est pour les φ s. c. i. ou s. c. s. De plus,

$$P_t V\varphi = \sup_{\substack{\psi \text{ s.c.s.} \\ \psi \leq \varphi}} P_t V\psi$$

D'où :

$$\sup_t P_t V\varphi = \sup_{\psi} \sup_t P_t V\psi = \sup_{\psi} V\psi = V\varphi.$$

Remarques.

1° Les opérateurs P_t , pour tout $t > 0$, sont des opérateurs linéaires continus de H_C dans H_C , muni de la topologie de l'ordre.

2° L'opérateur A , défini au moyen de $v_0 = V1$, est le générateur infinitésimal du semi-groupe (P_t) : A est défini sur l'espace $V(C_b(\Omega))$ qui est dense dans H_C .

THEOREME 13. - On a

$$Vf = \int_0^\infty P_t f \, dt$$

$$V_\lambda f = \int e^{-\lambda t} P_t f \, dt, \quad \forall f \in H_C.$$

Deuxième partie :

Construction de la résolvante et du semi-groupe dans le cas général.

On se propose de faire cette construction sans supposer que la fonction 1 est C-surmédiane. Autrement dit, on se propose d'associer une résolvante et un semi-groupe à tout noyau V subordonné à C. Pour cela, on adapte la méthode de LION ([5]), en l'étendant dans un cadre plus général. On désigne toujours par H_C l'espace vectoriel des fonctions continues C-majorées (c'est-à-dire telles que, $\forall f \in H_C, \exists w \in C : |f| \leq w$).

Rappelons la définition d'un noyau subordonné.

Définition.

1° On appelle noyau subordonné à C, une application linéaire positive V de $C_K(\Omega)$ dans H_C telle que :

$$(i) \quad V(C_K^+(\Omega)) \subset C ;$$

$$(ii) \quad \text{Supp } V\varphi \subset S_\varphi, \quad \forall \varphi \in C_K^+(\Omega)$$

2° Une résolvante (V_λ) est dite achevée (selon MEYER [7]) si $\sup_{\lambda > 0} V_\lambda = V_0$ est un noyau.

C est un cône adapté, linéairement séparant avec $C = C_\sigma$.

LEMME 1. - Soit V un noyau subordonné à C, tel qu'il existe une famille d'opérateurs (V_λ) linéaires ≥ 0 de H_C dans H_C , vérifiant

$$V = V_\lambda + \lambda V_\lambda \quad V = V_\lambda + \lambda V V_\lambda, \quad \forall \lambda > 0.$$

Alors, pour toute g borélienne ≥ 0 dans Ω telle que $Vg < +\infty$, on a

$$(\lambda V_\lambda g \leq g) \iff g = (I + \lambda V)f \quad \text{avec } f \text{ borélienne } \geq 0.$$

Démonstration. - Si $\lambda V_\lambda g \leq g$ et $Vg < \infty$, on a :

$$g = (I + \lambda V)(g - \lambda V_\lambda g) = (I + \lambda V)f,$$

et réciproquement.

En particulier, le lemme s'applique si g est C-dominante telle que Vg est finie.

1. Etude de la résolvante.

Définition. - Un noyau V subordonné à C est dit C -majorable, s'il existe $w > 0$ dans Ω , w C -dominante, telle que Vw existe, soit continue et $Vw \leq kw$ dans Ω (pour un certain k réel > 0). (Cf. [13].)

PROPOSITION 2. - Tout noyau V subordonné à C et C -majorable admet une résolvante.

Démonstration. - Soit H_w l'espace vectoriel des fonctions continues f telles qu'il existe $\alpha > 0$ réel avec $|f| \leq \alpha w$.

V se prolonge en un opérateur linéaire dans H_w , borné pour la norme déduite de la norme suivante sur H_w

$$\|f\|_w = \inf\{\lambda > 0 ; |f| \leq \lambda w\}.$$

H_w est complet pour cette norme, donc $L(H_w, H_w)$ aussi.

Pour $\lambda > 0$ assez petit, ($\lambda < \frac{1}{\|V\|_w}$), on pose

$$V_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \lambda^k V^{k+1}.$$

V étant itérable, cette série converge normalement (pour la norme $\|V\|_w$), et V_λ est un opérateur linéaire borné dans H_w pour la norme relative à w , et

$$\|V_\lambda\|_w \leq \|V\|_w.$$

V_λ , quand il existe, est un opérateur ≥ 0 (démonstration standard). Enfin, l'ensemble e des $\lambda > 0$, tels que V_λ existe, est ouvert (complémentaire du spectre de $-V$) et fermé grâce à l'inégalité

$$\|V_{\lambda_n} - V_{\lambda_m}\|_w \leq |\lambda_n - \lambda_m| \|V\|_w^2,$$

déduite de l'équation résolvante vérifiée par les V_λ pour $\lambda \in e$. Donc $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ existe pour tout $\lambda > 0$, et V_λ est un opérateur linéaire borné sur H_w , et on a

$$\|V_\lambda\|_w \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

PROPOSITION 3. - Si V est subordonné à C et C -majorable, sa résolvante $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ est telle que :

$$V_\lambda(H_C) \subset H_C, \quad \forall \lambda > 0;$$

et V_λ est un opérateur linéaire continu dans H_C , $\forall \lambda > 0$.

Démonstration. - En effet, si $\varphi \in C_K^+(\Omega)$, $V_\lambda \varphi \in H_C$, comme on le voit facilement. Pour achever la démonstration, on applique un théorème général sur les opérateurs C -bornés [13].

Le lemme suivant est très commode pour l'approximation d'un noyau subordonné quelconque.

LEMME 4. - Soient U, V, W trois noyaux subordonnés à C et C -majorables, tels que $U = V + W$ dans H_C , (U_λ) , (V_λ) et (W_λ) leurs résolvantes (qui existent). Alors, pour tout $g \in C$, on a

$$U_\lambda g \geq V_\lambda g \quad \text{et} \quad U_\lambda g \geq W_\lambda g , \quad \forall \lambda > 0 .$$

De plus, $U_\lambda \leq V_\lambda + W_\lambda$, $\forall \lambda > 0$.

Démonstration. - En effet, de $U = V + W$ on tire que

$$\begin{aligned} U_\lambda(I + \lambda U) &= V_\lambda(I + \lambda V) + W \\ &= V_\lambda(I + \lambda U) + (I - \lambda V_\lambda)W . \end{aligned}$$

Soit $w > 0$ C -dominante, assurant l'itérabilité de U . Soit $g \in C$, w -majorable. D'après le lemme 1 , g s'écrit $g = (I + \lambda U)f$ avec f continue ≥ 0 w -majorable (car U et U_λ opèrent dans H_w). Donc :

$$U_\lambda g = U_\lambda(I + \lambda U)f \geq V_\lambda(I + \lambda U)f$$

c'est-à-dire

$$U_\lambda g \geq V_\lambda g .$$

(De la même manière, $U_\lambda g \geq W_\lambda g$.)

Pour passer à $g \in C$, g quelconque, on écrit

$$g = \sup_n (g, nw) ,$$

et on a le droit d'écrire

$$U_\lambda g = \sup_n U_\lambda g_n .$$

Il en est de même pour V_λ et W_λ .

Pour démontrer que $U_\lambda \leq V_\lambda + W_\lambda$, on écrit

$$V_\lambda + W_\lambda - U_\lambda = (U_\lambda - V_\lambda)V + (U_\lambda - W_\lambda)W ,$$

et on applique la partie précédente à toute $g \in C \cap H_w$ (tous ces opérateurs opèrent dans le même espace H_w), puis à toute $g \in C$.

Dans ce qui suit, on se propose d'associer à tout noyau subordonné à C une résolvante achevée, en utilisant l'approximation d'un tel noyau par des noyaux subordonnés à C et C -majorables.

La donnée est ici un cône convexe $C \subset C^+(\Omega)$ tel que $C_K(\Omega) \subset H_C$, linéairement séparant et stable par sommes continues.

Soit $(U^\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrante croissante d'opérateurs linéaires positifs de $C_K(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, subordonnés à C telle que :

(a) $(\alpha, \beta \in I, \alpha < \beta) \implies (U^\beta - U^\alpha)$ est subordonné à C ;

(b) Pour toute $\varphi \in C_K^+(\Omega)$, $\sup_\alpha U^\alpha \varphi \in o(C) \cap C$, ce qui entraîne que $U = \sup_\alpha U^\alpha \varphi$ est subordonné à C ;

(c) Pour tout $\alpha \in I$, il existe une famille résolvante $(U_\lambda^\alpha)_{\lambda > 0}$ telle que :

1° U_λ^α est un opérateur linéaire positif de $o(C)$ dans lui-même pour $\alpha \in I$ et $\lambda > 0$;

2° Pour tout $g \in C \cap o(C)$, on a :

$$\lambda U_\lambda^\alpha g \leq g, \quad \forall \alpha \in I \quad \text{et} \quad \forall \lambda > 0 ;$$

3° Pour toute $\varphi \in C_K^+(\Omega)$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda U_\lambda^\alpha \varphi = 0$, et

$$U^\alpha \varphi = U_\lambda^\alpha \varphi + \lambda U_\lambda^\alpha U^\alpha \varphi = U_\lambda^\alpha \varphi + \lambda U^\alpha (U_\lambda^\alpha \varphi)$$

$\forall \alpha \in I, \lambda > 0, \varphi \in C_K^+(\Omega)$;

(d) Pour $\alpha < \beta, \lambda > 0$ et tout $g \in C \cap o(C)$, on a :

$$U_\lambda^\beta g \geq U_\lambda^\alpha g.$$

Ces conditions sont nécessairement vérifiées si tous les noyaux U^α sont C -majorables avec $U^\alpha(C_K^+) \subset C \cap o(C)$, $\forall \alpha \in I$. On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 5. - Le noyau $U = \sup_\alpha U_\alpha$ subordonné à C admet une résolvante (U_λ) qui satisfait à la condition (c) ci-dessus et vérifie de plus :

1° Pour tout $\varphi \in C_K^+(\Omega)$, $U_\lambda \varphi = \lim_\alpha U_\lambda^\alpha \varphi$

2° Pour tout $h \in o(C)$, $U_\lambda h = \lim_\alpha U_\lambda^\alpha h$.

Démonstration. - Soit $\varphi \in C_K^+(\Omega)$, et soient $g = U\varphi$, $g_\alpha = U^\alpha \varphi$, $g_1 \in C$, $g_1(x) \geq 1$ pour tout $x \in S\varphi$.

1° Montrons que, pour tout $\varphi \in C_K^+(\Omega)$, $\lim_\alpha U_\lambda^\alpha \varphi = U_\lambda \varphi$ existe, et que c'est une fonction s. c. s.

Pour $\beta > \alpha$, on a $g_\beta > g_\alpha$ et, d'après (d),

$$g \geq \lambda U_\lambda^\beta g \geq \lambda U_\lambda^\beta g_\beta \geq \lambda U_\lambda^\beta g_\alpha \geq \lambda U_\lambda^\alpha g_\alpha$$

La fonction $t = \sup_\alpha \lambda U_\lambda^\alpha g_\alpha$ est donc s. c. i.

La famille g_α converge uniformément sur tout compact, en croissant vers g , par suite,

$$\lim_\alpha U_\lambda^\alpha \varphi = \lim_\alpha g_\alpha - \lim_\alpha \lambda U_\lambda^\alpha g_\alpha$$

existe et

$$U_\lambda \varphi = \lim_\alpha U_\lambda^\alpha \varphi$$

est s. c. s.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α_0 tel que $(\alpha > \alpha_0) \implies (g - g_\alpha < \varepsilon \text{ sur } S\varphi)$, par suite $g - g_\alpha \leq \varepsilon g_1$ sur $S\varphi$, donc partout; on en déduit

$$\lambda U_\lambda^\alpha g - \lambda U_\lambda^\alpha g_\alpha \leq \varepsilon \lambda U_\lambda^\alpha g_1 \leq \varepsilon g_1$$

ou encore

$$\lim_\alpha \lambda U_\lambda^\alpha U\varphi = \lim_\alpha \lambda U_\lambda^\alpha U^\alpha \varphi.$$

La famille $(U_\lambda^\alpha)_\alpha$ est uniformément C-bornée, par suite, pour tout $h \in o(C)$, $\lim_\alpha U_\lambda^\alpha h$ existe, et

$$U_\lambda h = \lim_\alpha U_\lambda^\alpha h = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq h \\ \varphi \in C_K^+}} U_\lambda \varphi.$$

2° Montrons que $U_\lambda h$ est continue pour tout $h \in o(C)$. Pour cela, on utilise le lemme suivant :

LEMME 6. - Soit $C \subset C^+(\Omega)$ un cône convexe avec $C_K \subset H_C$. Soit U un opérateur C-borné. Si, pour toute $\varphi \in C_K^+$, $U\varphi$ est s. c. s., alors Uh est s. c. s.,
 $\forall h \in o(C)$, $h \geq 0$.

La démonstration figure dans [13].

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_K^+$. On a

$$U^\alpha \varphi = U_\lambda^\alpha \varphi + \lambda U_\lambda^\alpha U^\alpha \varphi .$$

On a démontré que :

$$\lim_\alpha U_\lambda^\alpha U\varphi = \lim_\alpha U_\lambda^\alpha U^\alpha \varphi$$

est s. c. s. car $U\varphi \in o(C)$.

Donc $\lim_\alpha U_\lambda^\alpha U^\alpha \varphi$ est continue, $\lim_\alpha U^\alpha \varphi$ est aussi continue ; il en est donc de même pour $\lim_\alpha U_\lambda^\alpha \varphi$.

Le lemme précédent permet donc de conclure que $\lim_\alpha U_\lambda^\alpha h$ est continue pour toute $h \in o(C)$.

3° Pour tout $h \in o(C)$, on a : $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda U_\lambda h = 0$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_K^+$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda U_\lambda \varphi = 0 ,$$

car, de $g_\alpha = U_\lambda^\alpha \varphi + \lambda U_\lambda^\alpha g_\alpha$ on tire

$$U_\lambda^\alpha \varphi \leq g_\alpha \leq g$$

d'où

$$U_\lambda \varphi \leq g \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda U_\lambda \varphi = 0 .$$

Il en résulte, d'après un théorème de [13], que, pour tout $h \in H_C$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda U_\lambda h = 0$, car la famille $(\lambda U_\lambda)_{\lambda > 0}$ est uniformément C-bornée.

4° La famille (U_λ) est une résolvante. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α_0 tel que

$$(\alpha > \alpha_0) \implies (g - g_\alpha) \leq \varepsilon g' \quad (g \in o(g'), \quad g' \in C) .$$

On a l'égalité

$$g - U_\lambda \varphi - \lambda U_\lambda g = (g - g_\alpha) - (U_\lambda \varphi - U_\lambda^\alpha \varphi) - (\lambda U_\lambda g - \lambda U_\lambda^\alpha g) - \lambda U_\lambda^\alpha (g - g_\alpha)$$

et comme $\lambda U_\lambda^\alpha (g - g_\alpha) \leq \varepsilon g'$, par passage à la limite, on obtient $g - U_\lambda \varphi - \lambda U_\lambda g = 0$ ou encore

$$U\varphi = U_\lambda \varphi + \lambda U_\lambda U\varphi .$$

Lorsque $\lambda \rightarrow 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda U_\lambda(U\varphi) = 0$ puisque $U\varphi \in o(C)$, on a donc

$$U\varphi = \sup_{\lambda \rightarrow 0} U_\lambda \varphi, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_K^+.$$

Comme U est un noyau, pour toute $h \in o(C)$, $h \geq 0$, on a

$$U(h) = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq h \\ \varphi \in \mathcal{C}_K^+}} U\varphi = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq h \\ \varphi \in \mathcal{C}_K^+}} \left[\sup_{\lambda} U_\lambda \varphi \right]$$

d'où $U(h) = \sup_{\lambda} U_\lambda(h)$, égalité vérifiée même si $U(h)$ n'est pas finie.

Pour tout $\lambda, \mu > 0$, $\lambda < \mu$, et tout α , tout $\varphi \in o(C)$, on a :

$$U_\lambda^\alpha \varphi = U_\mu^\alpha \varphi + (\mu - \lambda) U_\lambda^\alpha U_\mu^\alpha \varphi = U_\mu^\alpha \varphi + (\mu - \lambda) U_\mu^\alpha U_\lambda^\alpha \varphi$$

par passage à la limite, on en tire

$$U_\lambda \varphi = U_\mu \varphi + (\mu - \lambda) U_\lambda U_\mu \varphi = U_\mu \varphi + (\mu - \lambda) U_\mu U_\lambda \varphi$$

Supposons $\varphi \geq 0$, et faisons tendre λ vers 0. On a $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda U_\lambda U_\mu \varphi = 0$, d'où

$$U\varphi = \sup_{\lambda \rightarrow 0} U_\lambda \varphi = U_\mu \varphi + \mu \left(\sup_{\lambda \rightarrow 0} U_\lambda U_\mu \varphi \right)$$

$$U\varphi = U_\mu \varphi + \mu U(U_\mu \varphi),$$

égalité qui a un sens même si $U\varphi$ et $U(U_\mu \varphi)$ ne sont pas finies partout ; mais, si $\varphi \in \mathcal{C}_K^+$, alors $U\varphi$ est finie, donc $U(U_\mu \varphi)$ aussi.

COROLLAIRE 7. - Tout noyau U subordonné à C tel que $U(\mathcal{C}_K(\Omega)) \subset o(C)$, admet une résolvante U_λ telle que $U_\lambda(o(C)) \subset o(C)$, et pour toute $\varphi \in (o(C))^+$,

$$U\varphi = \sup_{\lambda \rightarrow 0} U_\lambda \varphi.$$

Démonstration. - Considérons la famille $(\psi_\alpha) \subset \mathcal{C}_K^+(\Omega)$, où $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$, de sorte que $\sup \psi_\alpha = 1$. Posons $U^\alpha : \varphi \mapsto U(\psi_\alpha \varphi) = U^\alpha \varphi$, pour $\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$. Les noyaux U^α sont subordonnés à C et C -majorables, ils admettent donc des résolvantes. D'autre part, la famille U^α satisfait aux conditions de la proposition précédente.

COROLLAIRE 8. - Soient U, V, W des noyaux subordonnés à C qui envoient $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $o(C)$, (U, V, W ne sont plus supposés C -majorables). Alors, pour tout $g \in C$ et tout $\lambda > 0$,

$$U_\lambda g \geq V_\lambda g \quad \text{et} \quad U_\lambda g \geq W_\lambda g.$$

De plus, $U_\lambda \leq V_\lambda + W_\lambda$ sur C .

Démonstration. - Considérons la famille $(\psi_\alpha) \in \mathbb{C}_K^+$, comme dans le corollaire précédent. Alors, pour tout α ,

$$U_\lambda^\alpha g \geq V_\lambda^\alpha g, \quad \forall g \in C \quad \text{et} \quad U_\lambda^\alpha \geq V_\lambda^\alpha + W_\lambda^\alpha \quad \text{sur } C,$$

et, pour tout $h \in o(C)$,

$$U_\lambda h = \lim_{\alpha} U_\lambda^\alpha h;$$

il en est, de même pour V_λ et W_λ , ce qui démontre le corollaire.

2. Construction du semi-groupe associé à un noyau.

Nous utiliserons le théorème de Hille-Yosida sous la forme suivante :

THÉOREME 9. - Soit E un e. l. c. séparé complet pour les suites. Soit $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille d'opérateurs linéaires de E dans E , telle que :

$$1^\circ \quad V_\lambda - V_\mu = (\mu - \lambda)V_\lambda \quad V_\mu = (\mu - \lambda)V_\mu \quad V_\lambda;$$

2° La famille d'opérateurs $[(\lambda V_\lambda)^n]_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}^+}$ est équicontinue.

Alors si F est l'adhérence de l'image commune des opérateurs V_λ , il existe un semi-groupe (P_t) équicontinu sur F , et un seul, tel que :

$$1^\circ \quad \lim_{t \rightarrow 0} P_t x = x, \quad \forall x \in F;$$

$$2^\circ \quad V_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t dt \quad \text{sur } F.$$

Démonstration. - On a évidemment $V_\lambda(E) = V_\mu(E)$, $\forall \mu, \lambda > 0$. Par continuité, on a $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda x = x$, $\forall x \in V_\mu(E)$, donc $\forall x \in F$. Il s'ensuit que les opérateurs V_λ sont injectifs sur F . On peut donc définir l'opérateur A sur $V_\lambda(E)$ tel que $(\lambda I - A)^{-1} = V_\lambda$, et on se trouve ramené au théorème de Hille-Yosida (cf. [16], p. 246).

On se donne maintenant un cône convexe $C \subset \mathbb{C}^+(\Omega)$, tel que :

1° $C = C_\sigma$ (C stable par sommes continues);

2° C linéairement séparant.

On sait que tout noyau V subordonné à C , à valeurs dans l'espace $o(C)$, admet une résolvante achevée (V_λ) , telle que $V_\lambda(o(C)) \subset o(C)$.

Rappelons que $o(C)$ est un espace adapté de Fréchet pour sa topologie de l'ordre

définie par la suite de semi-normes :

$$p_n(\varphi) = \inf_{\substack{f \in C \\ f \geq |\varphi|}} \left(\sup_{x \in K_n} f(x) \right) \quad (\text{cf. [13]}).$$

où (K_n) est une suite fortement croissante de compacts telle que $\bigcup_n K_n = \Omega$.

LEMME 10. - Soit $E = \overline{V_\lambda(o(C))}$ (adhérence dans $o(C)$). On a $\overline{V_\lambda(E)} = E$, $\forall \lambda > 0$, et la famille $(\lambda V_\lambda)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$ est équicontinue.

Démonstration. - Il suffit de démontrer que, pour tout n , on a

$$p_n(\lambda V_\lambda \varphi) \leq p_n(\varphi) \quad \text{pour } \varphi \in o(C).$$

Soient $\varepsilon > 0$, et $f \in C$ tel que

$$f \geq |\varphi| \quad \text{et} \quad \sup_{x \in K_n} f(x) < p_n(\varphi) + \varepsilon$$

Comme $\lambda V_\lambda f \leq f$, on a encore $f \geq |\lambda V_\lambda \varphi|$, donc $p_n(\lambda V_\lambda \varphi) < p_n(\varphi) + \varepsilon$.

PROPOSITION 11. - Il existe un semi-groupe (P_t) d'opérateurs positifs continus dans l'espace de Fréchet $E = V_\lambda(o(C))$, tel que :

1° Pour toute $\varphi \in E$, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_t \varphi = \varphi \quad (\text{pour la topologie de } E);$$

2° (P_t) est équicontinu sur E ;

3° $V_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t dt$ sur E ;

4° $V = \int_0^\infty P_t dt$ sur $V_\lambda(E)$.

Démonstration. - Pour 1°, 2° et 3°, il suffit d'appliquer le théorème. Pour obtenir 4°, on applique le théorème de Lebesgue de la manière suivante : Soit f_μ l'application $t \rightarrow e^{-\mu t} P_t V_\lambda \varphi(x)$ où $\varphi \geq 0$, $\varphi \in o(C)$. f_μ est positive, $f_\mu \geq f_{\mu'}$, si $\mu \leq \mu'$, et $\sup_{\mu \rightarrow 0} V_\mu V_\lambda \varphi(x) < \infty$, $\forall x$, car

$$(\lambda - \mu) V_\mu V_\lambda \varphi(x) \leq V\varphi(x)$$

donc

$$V_\mu V_\lambda \varphi(x) \leq \frac{2}{\lambda} V\varphi(x), \quad \forall \mu > 0.$$

Donc $\int_0^\infty P_t V_\lambda \varphi(x) dt$ existe. Pour voir que c'est égal à $V V_\lambda \varphi(x)$, il suffit

de remarquer que $\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu V \varphi = V\varphi$ pour $\varphi \in o(C)$. Cela résulte de

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu V \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_K(\Omega)$$

et de la densité de $C_K(\Omega)$ dans $o(C)$ (cf. démonstration du théorème 5).

Remarque. - Soit $C \subset C^+(\Omega)$ un cône convexe tel que $C = C_\sigma$ et $H_C \supset C_K(\Omega)$. On peut voir que $o(C)$ est un espace de Fréchet pour la topologie induite par celle de H_C , qui est aussi la topologie de l'ordre sur $o(C)$. $C_K(\Omega)$ est dense dans $o(C)$ pour cette topologie.

En conséquence, les hypothèses faites sur le noyau V , c'est-à-dire V subordonné à C et à valeurs dans $o(C)$, ne seraient qu'apparemment améliorées si on supposait seulement V subordonné à C , et $V(C_K)$ contenu dans l'adhérence de $C_K(\Omega)$ dans H_C .

3. Semi-groupes et mesures représentatives.

Voici d'abord un théorème de Stone-Weierstrass pour les espaces adaptés.

THÉOREME 12. - Soit $C \subset C^+(\Omega)$ un cône convexe stable par enveloppe inférieure, linéairement séparant et adapté. Alors, l'espace vectoriel $C - C$ est dense dans $o(C)$ ($= H_C$) pour la topologie de l'ordre.

Démonstration.

1° Pour tout $x \in \Omega$, et tout ouvert ω relativement compact $\omega \ni x$, il existe $f \in C - C$ avec $f = 0$ dans $C\omega$ et $f(x) > 0$.

En effet, dans le cas contraire, pour un $\omega_0 \ni x$, pour tous $f, g \in C$, on a

$$(g \geq f \text{ sur } \omega_0) \implies (g(x) \geq f(x)).$$

Soit $H = (C - C)|_{C\omega_0}$. L'application

$$(f - g) \mapsto f(x) - g(x)$$

définit une forme linéaire croissante sur H qui est adapté ; elle se représente donc par une mesure, μ positive sur $C\omega_0$. Cette mesure μ commute avec $\inf$, c'est-à-dire

$$\mu(\inf(f, g)) = \inf(\mu(f), \mu(g)).$$

Donc μ est de la forme $\lambda \varepsilon_y$ ($\lambda > 0$), et $y \in C\omega_0$. On aurait donc $f(x) = \lambda f(y)$, $\forall f \in C$, ce qui est impossible puisque C est linéairement séparant.

2° $(C - C)$ est dense dans $C_K(\Omega)$ pour la topologie de l'ordre de $o(C)$.

En effet, soit $\varphi \in C_K(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, et $v_1 \in C - C$ telle que $|\varphi - v_1| < \varepsilon$ sur K . Soit $v_0 \in C - C$, $v_0 > |\varphi|$ sur S_φ , et $v_0 = 0$ hors d'un voisinage δ de S_φ

$$v_2 = \sup(-v_0, \inf(v_0, v_1))$$

approche φ à ε près dans $o(C)$.

C. Q. F. D.

LEMME 13. - Pour tout $x \in \Omega$, les mesures $\varepsilon_\lambda V$ (où V est un noyau subordonné à C) sont portées par l'ensemble

$$\Omega_0 = \{y \in \Omega ; V\varphi(y) = 0, \forall \varphi \in C_K(\Omega)\}.$$

Démonstration. - Si K est un compact, $K \subset \Omega_0$, la fonction $V(\varphi.1_K)$, où $\varphi \in C_K(\Omega)$ et 1_K est l'indicatrice de K , est telle que :

$$(u \in C, u \geq V(\varphi.1_K) \text{ sur } K) \Rightarrow u \geq V(\varphi.1_K) \text{ partout.}$$

or $V(\varphi.1_K) = 0$ sur K , donc partout.

Remarque.

1° Si Ω est réunion dénombrable de compacts, il en est de même de Ω_0 .

2° Si on restreint le noyau V à l'espace Ω_0 (c'est-à-dire si on considère le noyau $\psi \rightarrow V\psi$, où $\psi \in C_K(\Omega)$, $S_\psi \subset \Omega_0$) et si on restreint le cône C à Ω_0 , alors le noyau V est subordonné à $C|_{\Omega_0}$ et à valeurs dans $o(C|_{\Omega_0})$.

PROPOSITION 14. - Si on se restreint à l'espace Ω_0 , le cône $C \cap o(C)$ est dense dans C pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (de Ω_0).

Démonstration. - En effet, il existe $(\varphi_\alpha) \subset C_K^+(\Omega)$, $S_{\varphi_\alpha} \subset \Omega_0$, telle que $(V\varphi_\alpha)$ soit une famille filtrante croissante avec $\sup V\varphi_\alpha = +\infty$ sur Ω_0 .

Soit $u \in C|_{\Omega_0}$. On a :

$$u = \sup_\alpha (\inf(u, V\varphi_\alpha))$$

d'où le résultat d'après le lemme de Dini.

Remarque. - Soit $C' = C \cap o(C)$. C étant stable par sommes continues, il en est de même pour C' . De plus, C' est adapté (d'après un théorème de [13]) et, d'après le théorème précédent, $C' - C'$ est dense dans $o(C')$.

Les considérations précédentes montrent qu'on peut toujours supposer le noyau V strictement positif (au sens que : $\forall x \in \Omega$, $\exists \varphi \in C_K^+ : V\varphi(x) > 0$) et le cône C adapté, ce qu'on fera désormais.

L'espace vectoriel $C - C$ est alors dense dans $o(C)$. Nous allons maintenant représenter le semi-groupe (P_t) construit ci-dessus au moyen de mesures de Radon dans Ω .

THÉORÈME 15. - Pour toute $\varphi \in o(C)$, $\lambda V_\lambda \varphi$ admet une limite en tout point $x \in \Omega$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

Démonstration. - Cette limite existe si $\varphi \in C - C$. La famille $(\lambda V_\lambda)_{\lambda > 0}$ est une famille d'opérateurs uniformément C -borné au sens de [13]. Donc, d'après un théorème de densité établi dans ce mémoire, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda \varphi(x)$ existe, $\forall \varphi \in o(C)$.

Notation. - Posons $\hat{\varphi}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda \varphi(x)$. Posons aussi $\delta(V) = \delta(C - V(C_K^+))$ (support fin de V). Les résultats qui suivent généralisent ceux obtenus par RAY (cf. [15]) dans le cas d'un noyau avec résolvante sous-markovienne à valeurs dans $C_0(\Omega)$, dans le cas où les fonctions λ -surmédianes séparent Ω .

PROPOSITION 16. - On a les propriétés suivantes :

1° L'opérateur $P_0 : \varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ ($\varphi \in o(C)$) est linéaire, positif, C -borné (cf. [13]) ;

2° Pour toute $\varphi \in o(C)$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda \hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(x)$, $\forall x \in \Omega$;

3° $\hat{\varphi}$ est une fonction borélienne de Baire : $\hat{\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} nV_n \varphi$;

4° $\hat{\varphi}(x) = \int \varphi d\mu_x$, $\forall x \in \Omega$ où μ_x est une mesure minimale balayée de ε_x pour le balayage défini par le cône convexe $(C - V(C_K^+))$;

5° Pour toute $\varphi \in o(C)$, on a l'équivalence :

$$(\varphi = \hat{\varphi}) \iff (\varphi \in \overline{V_\lambda(o(C))})$$

où $\overline{V_\lambda(o(C))}$ désigne l'adhérence pour la topologie de $o(C)$, et si $\varphi \in C$, on a : $\hat{\varphi} \leq \varphi$;

6° Pour toute $\varphi \in o(C)$ et toute mesure $\mu \geq 0$ pseudo-portée par $\delta(V)$, on a :

$$\int \hat{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu$$

$$(\hat{\phi}(x) = \phi(x)) \iff (x \in \delta(V_1))$$

et toute mesure $\mu \geq 0$ pseudo-portée par $\delta(V)$ est minimale ;

7° Si (μ_α) converge faiblement vers μ , μ_α et μ étant des mesures positives pseudo-portées par $\delta(V_1)$, alors

$$\lim_{\alpha} \int \hat{\phi} d\mu_{\alpha} = \int \hat{\phi} d\mu , \quad \forall \phi \in o(C) ;$$

8° Pour tout $x \in \Omega$ et tout $\lambda \geq 0$, la mesure $\varepsilon_x V_{\lambda}$ est portée par $\delta(V)$ au sens (le plus strict) que tout compact disjoint de $\delta(V)$ est de mesure nulle pour $\varepsilon_x V_{\lambda}$. Il en est de même de toute mesure μV_{λ} où μ est une mesure positive sur Ω (car pour toute fonction ϕ borélienne nulle sur $\delta(V)$, $V\phi \equiv 0$).

Démonstration.

1° P_0 est C -borné, car $\hat{\phi} \leq v$, $\forall v \in C$.

2° En effet, pour toute $\phi \in C$ (donc aussi dans $o(C)$), on a

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow \infty}} \lambda V_{\lambda} \mu V_{\mu} \phi(x) \text{ existe , } \forall x \in \Omega ,$$

Car, pour toute $v \in C$,

$$\lambda V_{\lambda} v = \lambda V(v - \lambda V_{\lambda} v) \in C .$$

Donc, pour toute $\phi \in C$, si $\lambda' > \lambda$ et $\mu' > \mu$, on a

$$\lambda' V_{\lambda'} \mu' V_{\mu'} \phi \geq \lambda V_{\lambda} \mu V_{\mu} \phi$$

donc la limite double existe (convergence monotone).

3° C'est immédiat.

4° Sur $o(C)$, la forme linéaire $\phi \rightarrow \hat{\phi}(x)$ ($x \in \Omega$) définit une mesure μ_x . μ_x est balayée de ε_x pour le balayage défini par le cône $C - V(C_K^+)$.

Soit μ une balayée quelconque de ε_x relativement au cône $C - V(C_K^+)$. On a

$$\int V_{\lambda} \phi d\mu = V_{\lambda} \phi(x) , \quad \forall \phi \in C_K(\Omega)$$

car

$$V_{\lambda} \phi = V(\phi - \lambda V_{\lambda} \phi) .$$

On se ramène donc à montrer que

$$\int V_{\psi} d\mu = V_{\psi}(x) , \quad \forall \psi \in C_K(\Omega) ,$$

ce qui est immédiat.

Il en résulte que si μ est une balayée de ε_x pour le cône $C - V(C_K^+)$, on a $\mu_x < \mu$, cela résulte du lemme suivant :

LEMME 17. - Si μ est une mesure positive C-intégrable, si on pose

$$\hat{\mu}(v) = \int \hat{v} d\mu, \quad \forall v \in C,$$

on a $\hat{\mu} < \mu$ (où $<$ désigne le balayage par rapport au cône $C - V(C_K^+)$).

En effet, on a :

$$\int \lambda V_\lambda v d\mu \leq \int v d\mu, \quad \forall v \in C$$

donc en passant à la limite,

$$\int \hat{v} d\mu = \int v d\hat{\mu} \leq \int v d\mu$$

et on a

$$\int V_1 d\mu = \int V_1 d\hat{\mu}, \quad \text{car } \hat{V}_1 = V_1.$$

Il en résulte bien que μ_x est minimale.

5° Si $\varphi = \hat{\varphi}$, on a $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda \varphi = \varphi$ (convergence simple) et il existe $v \in C$ avec $\lambda V_\lambda \varphi \leq v$, $\forall \lambda$. Le théorème de Lebesgue montre que $\lambda V_\lambda \varphi \rightarrow \varphi$ faiblement et, par Hahn-Banach, on voit que $\varphi \in \overline{V_\lambda(o(C))}$. La réciproque est immédiate.

6° ($\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$) $\implies x \in \delta(V_1)$.

En effet, soit $\mu < \varepsilon_x$, on a

$$\hat{\varphi}(x) = \int \hat{\varphi} d\mu = \int \varphi d\hat{\mu}$$

Donc $\hat{\mu} = \hat{\varepsilon}_x = \mu_x$. Si donc $\varepsilon_x = \hat{\varepsilon}_x$, on a : $\varepsilon_x = \hat{\mu} < \mu < \varepsilon_x$, d'où $\mu = \varepsilon_x$ et $x \in \delta(V_1)$.

Réciproquement, si $x \in \delta(V_1)$, $\hat{\varepsilon}_x < \varepsilon_x$, donc $\hat{\varepsilon}_x = \varepsilon_x$, et

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in o(C).$$

On en déduit bien que si μ est pseudo-portée par $\delta(V_1)$, on a

$$\int \hat{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in o(C)$$

car l'ensemble $\{y; \hat{\varphi}(y) \neq \varphi(y)\}$ est un borélien de Baire disjoint de la frontière, donc de μ -mesure nulle.

7° Cela résulte du 6°, car $\int \hat{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu$ pour toute mesure μ pseudo-portée.

8° Cela résulte, pour $\varepsilon_x V$, d'un théorème antérieur (cf. I) où nous avons montré que $\varepsilon_x V$ est strictement porté par $\delta(V)$. Il en est donc de même pour les mesures $\varepsilon_x V_\lambda$ qui sont plus petites que $\varepsilon_x V$.

Etude de l'espace $E = \overline{V_\lambda(o(C))}$. - On a déjà vu la caractérisation de E :

$$E = \{\varphi \in o(C) ; \varphi = \hat{\varphi}\}.$$

on va montrer ici que $E = E^+ - E^+$ où $E^+ = E \cap C^+(\Omega)$. Pour cela, on introduit l'opérateur $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ ainsi défini :

Définition. - Pour toute $\varphi \in E$, on pose

$$\bar{\varphi} = \inf\{u \in C ; u \geq \varphi \text{ dans } \Omega\}.$$

La fonction φ n'est pas nécessairement dans E^+ .

Propriétés de la fonction $\bar{\varphi}$.

$$1^\circ \quad \overline{\varphi + \psi} \leq \bar{\varphi} + \bar{\psi}, \quad \forall \varphi, \psi \in E ;$$

2° Continuité.

LEMME 18. - Soit $\psi \in C$, $\varphi, \varphi' \in E$ tels que :

$$|\varphi - \varphi'| \leq \psi.$$

Alors, $|\bar{\varphi} - \bar{\varphi}'| \leq \psi$.

' Démonstration. - On a $\varphi \leq \varphi' + \psi < \inf_{\substack{v \in C \\ v \geq \varphi'}} \{v + \psi\}$. D'où $\bar{\varphi} \leq \bar{\varphi}' + \psi$.

LEMME 19. - Soit $(\varphi_n) \subset o(C)$ convergeant vers $\varphi \in o(C)$ pour la topologie de $o(C)$. Alors, il existe $v \in C$ et une sous-suite (φ_{n_k}) tels que (φ_{n_k}) converge vers φ dans l'espace $o(v)$ muni de la topologie induite sur $o(v)$ par l'espace de Banach H_v (des fonctions continues v -majorables).

Démonstration. - La topologie de $o(C)$ est définie par la suite des semi-normes :

$$p_i(\varphi) = \inf_{\substack{f \in C \\ f \geq |\varphi|}} \left(\sup_{y \in K_i} f(y) \right)$$

où (K_i) est une suite fortement croissante exhaustive de compacts.

1° Il existe $f \in C$ tel que $|\varphi_{n_k}| \leq f$ et $|\varphi| \leq f$, pour une sous-suite (φ_{n_k}) de (φ_n) .

En effet, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha(i)$, suite de $\mathbb{N}$ telle que

$$|\varphi - \varphi_{\alpha(i)}| \leq f_i, \quad f_i \in C \quad \text{et} \quad \sup_{y \in K_i} f_i(y) < \frac{1}{2^i}$$

Soit $w \in C$ tel que $|\varphi| \leq w$. On a

$$|\varphi_{\alpha(i)}| \leq w + \sum_i f_i = v \in C.$$

Le lemme résulte alors de la proposition suivante :

PROPOSITION 20. - Soit $(\varphi_n) \subset o(C)$ convergeant vers $\varphi \in o(C)$ et telle que $|\varphi_n| \leq f$ pour un $f \in C$. Alors (φ_n) converge vers φ dans l'espace $o(v)$ (v tel que $f \in o(v)$, $v > 0$) muni de la topologie induite par la topologie de l'espace de Banach H_v .

La démonstration est immédiate.

PROPOSITION 21. - Soient v une fonction s. c. i. sur Ω et V -excessive (c'est-à-dire $\lambda V_\lambda v \leq v$, $\forall \lambda > 0$, et $v = \sup_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda v$). Alors v vérifie les inégalités :

$$v(x) \geq \int v \, d\mu$$

pour tout couple (x, μ) où μ est une mesure de Radon positive sur Ω balayée de ε_x relativement au cône C .

Démonstration. - Il suffit de démontrer la proposition pour des fonctions du type $v = \lambda V_\lambda u$ où u est surmédiane s. c. i. On peut toujours supposer u majorée par un élément positif de C , $u \leq v_0$.

1° $V(u - \lambda V_\lambda u)$ est alors bien défini et vaut $V_\lambda u$. En effet :

$$V_\lambda u = V_\mu(u - \lambda V_\lambda u) + \mu V_\mu V_\lambda u.$$

or $\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu V_\mu V_\lambda u \leq \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{\lambda} V_\mu v_0 = 0$, car $v_0 \in C$, et on sait que $\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu V_\mu \varphi = 0$, $\forall \varphi \in C_K$, donc, par un argument de densité pour toute $h \in o(C)$, $V_\mu(u - \lambda V_\lambda u)$ est décroissant en μ , et

$$\sup_{\mu \rightarrow 0} V_\mu(u - \lambda V_\lambda u) = V(u - \lambda V_\lambda u) = V_\lambda u.$$

2° Pour toute fonction borélienne $\psi \geq 0$ telle que $V\psi$ soit finie, on a :

$$\int V\psi \, d\mu \leq V\psi(x)$$

pour tout couple (x, μ) avec $\mu \leq \varepsilon_x$. En effet, on peut se ramener au cas où (C)

ψ est s. c. s. bornée, car

$$\int V\psi \, d\mu = \sup_{\substack{\varphi \leq \psi \\ \varphi \text{ s.c.s. } \geq 0 \\ S\varphi \text{ compact}}} \int V\varphi \, d\mu .$$

or $\int V\varphi \, d\mu = \inf \{ \int Vg \, d\mu , \, g \text{ continue, } \geq 0 , \, Sg \text{ compact, } g \geq \varphi \}$, et l'inégalité cherchée est vraie pour les Vg , car le noyau V est tel que $V(C_K^+) \subset C$.

PROPOSITION 22. - Pour toute $\varphi \in E = \overline{V_\lambda(o(C))}$, la fonction $\overline{\varphi}$ est excessive continue, et $\overline{\varphi} \in E \cap C$.

Démonstration.

1° D'après un résultat démontré dans [13], on a :

$$\overline{\varphi}(x) = \sup_{\substack{\mu < \varepsilon_x \\ (C)}} \int \varphi \, d\mu , \quad \forall \varphi \in o(C) .$$

Par conséquent, $\overline{\varphi}$ est une fonction surmédiane s. c. s.

2° Si v est surmédiane mesurable, sa régularisée s. c. i. $\tilde{v}$ est surmédiane car les noyaux V_λ sont continus.

Soit v surmédiane (mesurable), $v \geq \varphi$. On a :

$$\tilde{v} \geq \varphi \quad \text{et} \quad \hat{\tilde{v}} = \sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda \tilde{v} \geq \hat{\varphi} = \varphi$$

et, d'après la proposition précédente, $\hat{\tilde{v}}$, qui est excessive s. c. i. vérifie

$$\hat{\tilde{v}}(x) \geq \int \hat{\tilde{v}} \, d\mu \geq \int \varphi \, d\mu , \quad \forall \mu \underset{(C)}{<} \varepsilon_x$$

donc $\hat{\tilde{v}} \geq \overline{\varphi}$.

3° Il en résulte que $\overline{\varphi}$ est la plus petite fonction surmédiane majorant φ . Elle est donc (surmédiane) s. c. i., car φ est continue. Donc $\overline{\varphi}$ est continue. Donc, d'après le lemme de Dini dans $o(C)$, on a $\overline{\varphi} \in \overline{C}$ adhérence de C dans $o(C)$. De plus,

$$\hat{\overline{\varphi}} = \sup_{\lambda} \lambda V_\lambda \overline{\varphi} = \overline{\varphi} .$$

Donc $\overline{\varphi} \in E$. On peut toujours supposer que C est fermé dans $o(C)$.

COROLLAIRE 23. - On a : $E = E^+ - E^+$ où $E^+ = E \cap C^+(\Omega)$.

COROLLAIRE 24.

1° Toute forme linéaire positive sur E est continue.

2° Toute forme linéaire positive sur E se représente d'une manière unique par une mesure $\mu \geq 0$ pseudo-portée par $\delta(V)$.

3° Le dual E' de E est réticulé et s'identifie à l'espace des mesures C-intégrables pseudo-portées par $\delta(V)$.

Démonstration.

1° E est un Fréchet engendré par E^+ .

2° Pour toute forme linéaire T positive sur E, il existe une forme linéaire positive sur $\mathcal{O}(C)$, donc une mesure $\mu \geq 0$ telle que $\mu \geq T$ sur E^+ . Posons alors

$$\hat{T}(u) = \sup_{\lambda \rightarrow \infty} T(\lambda V_{\lambda} u), \quad \forall u \in C.$$

Ce sup est fini, et définit une forme affine croissante sur C qui se représente de manière unique par une mesure positive qui est minimale.

3° Cette propriété montre que E est d'une certaine manière "adapté".

Voici une extension de la proposition.

PROPOSITION 25. - Soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ une suite finie d'éléments de E, $\varphi = \sup_n (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ leur enveloppe supérieure. Alors

$$\bar{\varphi} = \inf\{u \in C; u \geq \varphi_i, \forall i \leq n\}$$

est une fonction continue excessive $\bar{\varphi} \in E \cap C$ et $\bar{\varphi} = \hat{\varphi}$.

La démonstration est identique à celle déjà faite.

Application.

PROPOSITION 26. - Soit φ une fonction excessive s. c. i. Alors, il existe un ordonné filtrant croissant (v_{α}) de fonctions excessives continues tel que :

$$\varphi = \sup_{\alpha} v_{\alpha}.$$

Démonstration. - On écrit $\varphi = \sup_{\lambda > 0} \lambda V_{\lambda} \varphi = \sup_{\lambda, \alpha} \lambda V_{\lambda} \varphi_{\alpha}$ où $(\varphi_{\alpha}) \subset \mathcal{C}_K^+$ est croissante telle que $\varphi = \sup_{\alpha} \varphi_{\alpha}$.

Soit $\psi_F = \sup\{\lambda V_{\lambda} \varphi_{\alpha}; \lambda \text{ et } \alpha \text{ parcourant un ensemble fini d'indices } F\}$.

On a : $\bar{\psi}_F \in E \cap C$, $\bar{\psi}_F \leq \varphi$ et $(\bar{\psi}_F)$ est un ordonné filtrant croissant, avec $\sup_F \bar{\psi}_F = \varphi$.

PROPOSITION 27. - Pour toute φ fonction surmédiane s. c. i. C-majorée, on a $\varphi = \hat{\varphi} = \sup_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda \varphi$ sur $\delta(V)$.

Démonstration. - En effet, la famille de mesures $(\varepsilon_x \lambda V_\lambda)_{\lambda > 0}$ converge faiblement vers ε_x pour tout $x \in \delta(V)$. Donc φ étant s. c. i.

$$\varphi(x) \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_\lambda \varphi(x) \leq \hat{\varphi}(x).$$

Donc $\varphi(x) = \hat{\varphi}(x)$.

Signalons enfin un résultat standard sur le semi-groupe (P_t) construit plus haut.

THEOREME 28. - Il existe un semi-groupe $(\tilde{P}_t)$ d'opérateurs linéaires positifs, mesurable sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{B}_0(\Omega))$, où $\mathcal{B}_0(\Omega)$ est la tribu borélienne de Baire, qui coïncide avec le semi-groupe (P_t) sur l'espace $E = \overline{V_\lambda(o(C))}$, tel que, pour toute $f \in o(C)$ et tout $x \in \Omega$, la fonction $t \mapsto P_t f(x)$ est continue à droite. $(\tilde{P}_t)$ est unique ; les égalités

$$V_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \tilde{P}_t dt$$

$$V = \int_0^\infty P_t dt$$

se prolongent aux fonctions boréliennes de Baire.

Un prochain mémoire précisera l'étude des semi-groupes subordonnés à un cône adapté.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHOQUET (Gustave). - Theory of capacities. - Lawrence, University of Kansas, Department of Mathematics, 1954 ; et Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 5, 1953/54, p. 131-295.
- [2] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 36, 1957, p. 179-189.
- [3] HERVE (Rose-Marie). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-571 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

- [4] HUNT (G. A.). - Markoff processes and potentials, Illinois J. of Math., t. 1, 1957, p. 44-93 et p. 316-369.
 - [5] LION (Georges). - Famille d'opérateurs et frontières en théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, p. 389-453.
 - [6] MEYER (Paul-André). - Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 357-372.
 - [7] MEYER (Paul-André). - Probabilités et potentiel. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1318 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 14).
 - [8] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes de fonctions continues, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967, Série A, p. 15-18.
 - [9] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Théorie globale du potentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967, Série A, p. 238-241.
 - [10] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes et espaces de fonctions continues, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, Série A, p. 506-509.
 - [11] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Noyaux, résolvantes, semi-groupes, subordonnés à un cône adapté de fonctions continues, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 21-24.
 - [12] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes de fonctions et potentiels. Remarques sur un travail de Wolfbrard Hansen, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 102-105.
 - [13] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du potentiel, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t. 6, 1966/67, n° 5, 35 p.
 - [14] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Principe du minimum et maximalité en théorie locale du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).
 - [15] RAY (Daniel). - Resolvents, transition functions, and strongly markovian processes, Annals of Math., Series 2, t. 70, 1959, p. 43-72.
 - [16] YOSIDA (Kôsaku). - Functional analysis. - Berlin, Springer-Verlag, 1965 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 123).
-