Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

ROSE-MARIE HERVÉ

Quelques propriétés des fonctions surharmoniques associées à un opérateur uniformément elliptique de la forme

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 9 (1964-1965), exp. nº 7, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1964-1965__9__A4_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
9e année, 1964/65, n° 7

14 janvier 1965

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS SURHARMONIQUES ASSOCIÉES À UN OPÉRATEUR UNIFORMÉMENT ELLIPTIQUE DE LA FORME

$$Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$$

par Mme Rose-Marie HERVÉ

Cet exposé résume deux articles récents [4] et [5] auxquels je renvoie pour les démonstrations techniques.

Notations. - Ω est un domaine borné de R^n .

Les coefficients $a_{ij}(x)$ sont des fonctions réelles, mesurables sur Ω , $a_{ij} = a_{ji}$, et $\frac{1}{\lambda}\sum_i \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \leqslant \lambda \sum_i \xi_i^2$, $\forall\, x \in \Omega$, où $\lambda \geqslant 1$.

$W^{1,q}(\Omega)$, $q \geqslant 1$ est l'espace des fonctions $f \in L^q(\Omega)$, avec $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^q(\Omega)$, $\forall$ i , muni de la norme $\|f\|_{L^q(\Omega)} + \|\text{grad } f\|_{L^q(\Omega)}$.

$W^{1,q}_{loc}(\Omega)$ est l'espace des $f \in W^{1,q}(\Omega')$ pour tout ouvert $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$.

$W^{1,q}_0(\Omega)$ est l'adhérence, dans $W^{1,q}(\Omega)$, de $\mathcal{D}(\Omega)$, ou encore des fonctions $\in W^{1,q}(\Omega)$ à support compact dans Ω .

Une solution (resp. une solution locale) de $Lu = 0$ dans Ω est une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ (resp. $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$) telle que

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = 0 \ , \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \ ,$$

ou encore $\forall\, \varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)$ (resp. $\forall\, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ et à support compact dans Ω).

Une sous-solution (resp. une sous-solution locale) dans Ω est une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ (resp. $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$) telle que

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx \leqslant 0 \ , \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{et} \quad \geqslant 0 \ .$$

1. Un principe du maximum pour les sous-solutions locales.

Le principe du maximum que je démontre ici est inspiré d'un principe du maximum, classique en théorie du potentiel : une fonction sous-harmonique dans Ω , majorée par un potentiel dans Ω , au voisinage de $\partial\Omega$ (c'est-à-dire hors d'un compact de Ω), est $\leqslant 0$ dans Ω . Ici, les potentiels sont remplacés par les fonctions $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, qui jouent le rôle de fonctions "nulles à la frontière", d'où l'énoncé:

THÉORÈME 1. - Une sous-solution locale dans Ω , majorée p. p. au voisinage de $\partial\Omega$ par une fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, est $\leqslant 0$ p. p. dans Ω .

Démonstration du théorème 1 pour les sous-solutions dans Ω . - On s'appuie sur le lemme suivant :

LEMME 1 [1]. - Soit $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$, et $f \in W^{1,q}(\Omega)$, $\geqslant 0$ p. p. au voisinage de $\partial\Omega$. Alors

$$\inf(\varphi , f) \in W_0^{1,q}(\Omega) .$$

Démonstration. - φ est limite dans $W^{1,q}(\Omega)$ de fonctions $\varphi_n \in W^{1,q}(\Omega)$, et à support compact dans Ω ; alors, d'après une propriété classique de $W^{1,q}$ (voir par exemple [4]), $\inf(\varphi , f)$ est limite dans $W^{1,q}(\Omega)$ des fonctions $\inf(\varphi_n , f)$, et celles-ci sont à support compact dans Ω .

Conséquences :

1° $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega) \Longrightarrow \varphi^+$ et $\varphi^- \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

2° $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$ et $f \in W^{1,q}(\Omega)$ avec $0 \leqslant f \leqslant \varphi$ p. p. au voisinage de $\partial\Omega$ $\Longrightarrow f \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

3° Une constante non nulle $\notin W_0^{1,q}(\Omega)$: supposons que $1 \in W_0^{1,q}(\Omega)$; Ω étant borné, il existe 2 constantes α et β , $\alpha \neq 0$, telles que $0 \leqslant \alpha x_1 + \beta \leqslant 1$ sur Ω ; donc

$$\alpha x_1 + \beta \in W_0^{1,q}(\Omega)$$

et

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha x_1 + \beta)\, dx = 0 ,$$

ce qui entraîne $\alpha = 0$.

Soit alors u une sous-solution dans Ω , majorée p. p. au voisinage de $\partial\Omega$ par $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. On en déduit $u^+ \leqslant \varphi^+$ p. p. au voisinage de $\partial\Omega$, et comme $\varphi^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$, u^+ aussi. Par suite

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u^+}{\partial x_j}\, dx \leqslant 0 ,$$

---

[1] Ce résultat est bien connu si f est une constante $\geqslant 0$.

soit

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \frac{\partial u^+}{\partial x_j} dx \leqslant 0 ,$$

et, grâce à la condition d'uniforme ellipticité :

$$\| \text{grad } u^+ \|_{L^2(\Omega)} = 0 .$$

D'où $u^+ = \text{Cte}$ p. p. dans Ω , et cette constante est nulle.

<u>Démonstration du théorème 1 dans le cas général</u>. - On utilise

a. un théorème connu d'existence et d'unicité de la solution d'un problème aux limites du type de Dirichlet : $\forall\ f \in W^{1,2}(\Omega)$, il existe une solution et une seule de $Lu = 0$ dans Ω , notée L_f^Ω , telle que $f - L_f^\Omega \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

L'application $f \to L_f^\Omega$, de $W^{1,2}(\Omega)$ dans lui-même, est continue ; on a même, pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$:

(1) $$\|L_f^\omega\|_{W^{1,2}(\omega)} \leqslant k\|f\|_{W^{1,2}(\omega)} \quad \text{avec} \quad k(n , \lambda , \Omega) .$$

En outre, cette application est croissante, d'après le théorème 1 pour les solutions de $Lu = 0$.

b. la propriété suivante, inspirée de la théorie du potentiel :

LEMME 2. - <u>Etant donnés</u> $f \in W^{1,2}(\Omega)$ <u>et un ouvert</u> $\omega \subset \Omega$, <u>la fonction</u>

$$f_\omega = \left| \begin{array}{ll} L_f^\omega & \underline{\text{dans}} \quad \omega \\ & \\ f & \underline{\text{dans}} \quad \Omega - \omega \end{array} \right. \in W^{1,2}(\Omega) \quad \underline{\text{et}} \quad \|f_\omega\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant k'\|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} \quad \underline{\text{avec}} \quad k'(n , \lambda , \Omega) .$$

<u>Par suite, si les ouverts</u> ω_n <u>sont tels que tout compact</u> $\subset \Omega$ <u>est contenu dans</u> ω_n <u>pour</u> n <u>assez grand</u>, f_{ω_n} <u>converge faiblement dans</u> $W^{1,2}(\Omega)$ <u>vers</u> L_f^Ω .

Pour la démonstration de l'inégalité (1) et du lemme 2, voir [4].

Soient u une sous-solution locale dans Ω , majorée p. p. au voisinage de $\partial\Omega$ par $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et ω_n une suite croissante d'ouverts, $\overline{\omega}_n \subset \Omega$ et $\Omega = \bigcup \omega_n$. Pour n assez grand :

$$u - L_\varphi^{\omega_n} \leqslant \varphi - L_\varphi^{\omega_n} \quad \text{p. p. au voisinage de} \quad \partial\omega_n ;$$

donc $u - L_\varphi^{\omega_n} \leqslant 0$ p. p. dans ω_n , soit $u \leqslant \varphi_{\omega_n}$ p. p. dans Ω . Comme φ_{ω_n} converge faiblement vers 0 dans $W^{1,2}(\Omega)$, pour tout ensemble mesurable $E \subset \overline{E} \subset \Omega$: $\int_E \varphi_{\omega_n} dx \to 0$; par suite, $\int_E u\, dx \leqslant 0$ et $u \leqslant 0$ p. p. dans Ω .

Conséquences du théorème 1.

1° On retrouve le principe du maximum démontré par LITTMAN, STAMPACCHIA et WEINBERGER [6], valable pour les sous-solutions $\in H^{1,2}(\Omega)$ (si $C^0(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions continues dans $\overline{\Omega}$, et $C^1(\overline{\Omega})$ l'espace des $f \in C^0(\overline{\Omega})$ avec $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(\overline{\Omega})$, $\forall\ i$, $H^{1,2}(\Omega)$ est l'adhérence de $C^1(\overline{\Omega})$ dans $W^{1,2}(\Omega)$) : une sous-solution u dans Ω, limite dans $W^{1,2}(\Omega)$ de fonctions $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$, $\leqslant 0$ sur $\partial\Omega$, est $\leqslant 0$ p. p. dans Ω.

En effet, on peut supposer $u_n < 0$ sur $\partial\Omega$, donc u_n^+ à support compact dans Ω ; comme u^+ est limite de u_n^+ dans $W^{1,2}(\Omega)$, $u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et u, $\leqslant u^+$, est $\leqslant 0$ p. p. dans Ω.

2° Si u est une sous-solution locale dans Ω telle que

$$\limsup_{\substack{x\in\Omega \\ x\to y}} \text{ess}\ (^2)\ u(x) \leqslant 0 \quad \text{en tout point } y \in \partial\Omega ,$$

alors u est $\leqslant 0$ p. p. dans Ω,

car $u - \varepsilon \leqslant 0$ p. p. au voisinage de $\partial\Omega \implies u - \varepsilon \leqslant 0$ p. p. dans Ω.

2. Les fonctions harmoniques associées à l'opérateur L.

Les solutions locales de $Lu = 0$ dans les ouverts $\omega \subset \Omega$ forment un système de fonctions harmoniques dans Ω, satisfaisant à l'axiomatique de M. Brelot.

En effet, une solution locale dans un ouvert ω est continue d'après le théorème de de GIORGI [8] ; on a même, pour chaque compact $K \subset \omega$,

$$|u(x) - u(x')| \leqslant \beta \|u\|_{L^2(\omega)} |x - x'|^\alpha , \quad \forall\ x \text{ et } x' \in K ,$$

où α et β dépendent seulement de n, λ, K et ω.

L'axiome 1 est satisfait de façon presque évidente.

Pour vérifier l'axiome 2, on montre que toute boule β est un ouvert régulier. Soit f continue sur $\partial\beta$; supposons d'abord que f est la restriction à $\partial\beta$ d'une fonction $F \in W^{1,p}(\beta) \cap C^0(\overline{\beta})$ avec $p > n$. D'après un résultat de MORREY [7] et STAMPACCHIA [10], L_F^β est alors lipschitzienne dans β :

$$|L_F^\beta(x) - L_F^\beta(x')| \leqslant \text{Cte } |x - x'|^{1-(n/p)} , \quad \forall\ x \text{ et } x' \in \beta ,$$

---

(2) c'est-à-dire la borne inférieure du sup ess de u sur $V \cap \Omega$, quand V décrit le filtre des voisinages de y.

et par suite, prolongée par f sur $\partial\beta$, elle est continue dans $\overline{\beta}$. En outre, le théorème 1 entraîne, d'une part la croissance de la solution du problème de Dirichlet avec la donnée, d'autre part l'unicité de cette solution. Le cas d'une fonction continue quelconque sur $\partial\beta$ se traite en l'approchant, uniformément sur $\partial\beta$, par des polynômes dans R^n ; on utilise à nouveau le théorème 1 pour montrer la convergence uniforme dans $\overline{\beta}$, et le résultat suivant pour montrer la convergence dans $W^{1,2}_{loc}(\beta)$: si u est solution locale de $Lu = 0$ dans la boule β de centre 0 et de rayon r , pour toute boule β' de centre 0 et de rayon $r' < r$:

$$\sum_i \int_{\beta'} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \leqslant \frac{4\lambda^4}{(r - r')^2} \int_\beta u^2 \, dx \, .$$

L'axiome 3' est vérifié grâce au théorème de MOSER [9] : étant donnés un domaine δ et un compact $K \subset \delta$, il existe une constante $C(n , \lambda , \delta$ et $K)$ telle que

$$\sup_K u \leqslant C \inf_K u \, ,$$

pour toute solution locale $u \geqslant 0$ dans δ . On en déduit qu'une solution locale $u \geqslant 0$ dans δ est soit > 0 soit $\equiv 0$ sur δ , et, en utilisant le théorème de de Giorgi, l'égale continuité au point $x_0 \in \delta$ des solutions locales > 0 dans δ , égales à 1 en x_0 .

La théorie axiomatique de M. Brelot s'applique et permet de définir les fonctions sous-harmoniques et surharmoniques associées à ce système de fonctions harmoniques (notées encore L-harmoniques lorsqu'il y a ambiguïté) et en particulier les potentiels. On montre facilement [4] qu'il existe un potentiel continu > 0 dans Ω .

<u>Remarque</u>. - Le théorème de Moser permet d'améliorer le lemme 2.

LEMME 3. - <u>Etant donnés</u> $f \in W^{1,2}(\Omega)$ <u>et une suite d'ouverts</u> ω_n <u>tels que tout compact</u> $\subset \Omega$ <u>est contenu dans</u> ω_n <u>pour</u> n <u>assez grand, la suite</u>

$$f_{\omega_n} = \begin{cases} L_f^{\omega_n} & \underline{\text{dans}}\ \omega_n \\ f & \underline{\text{dans}}\ \Omega - \omega_n \end{cases}$$

<u>converge uniformément sur tout compact</u> $\subset \Omega$ <u>vers</u> L_f^Ω .

<u>Démonstration</u>. - L'application $f \to L_f^\Omega$ étant linéaire, on peut supposer $f \geqslant 0$ p. p. dans Ω , d'où $f_{\omega_n} \geqslant 0$ p. p. dans Ω . Alors, pour tout compact $K \subset \Omega$, les fonctions f_{ω_n} sont bornées dans leur ensemble sur K , pour n assez grand : en effet, si Ω' est un ouvert tel que $K \subset \Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$, pour n assez grand, f_{ω_n} est harmonique $\geqslant 0$ dans Ω' et par suite

$$\sup_K f_{\omega_n} \leqslant C \inf_K f_{\omega_n} ,$$

d'où

$$\sup_K f_{\omega_n} \leqslant C \frac{\|f_{\omega_n}\|_{L^2(K)}}{\sqrt{\text{mes } K}} \leqslant \frac{Ck'}{\sqrt{\text{mes } K}} \|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} .$$

L'axiome 3' s'applique et prouve l'existence d'une suite partielle $f_{\omega_{n'}}$, uniformément convergente sur tout compact $\subset \Omega$, vers une fonction h harmonique dans Ω ; donc, pour tout ensemble mesurable $E \subset \overline{E} \subset \Omega$,

$$\int_E f_{\omega_{n'}} \, dx \to \int_E h \, dx .$$

Comme la suite f_{ω_n} converge faiblement vers L_f^{Ω} dans $W^{1,2}(\Omega)$, on a aussi

$$\int_E f_{\omega_n} \, dx \to \int_E L_f^{\Omega} \, dx ,$$

d'où

$$L_f^{\Omega} = h \quad \text{p. p. dans } \Omega$$

donc partout, et la suite f_{ω_n} toute entière converge vers L_f^{Ω} , uniformément sur tout compact $\subset \Omega$.

3. Quelques propriétés des fonctions surharmoniques associées à l'opérateur L .

THÉORÈME 2. - Les potentiels dans Ω , de support ponctuel donné, sont proportionnels.

On commence par démontrer une propriété des solutions locales > 0 au voisinage d'une singularité isolée, analogue à celle démontrée par GILBARG et SERRIN [2] dans le cas d'une équation écrite sous forme développée et à coefficients localement lipschitziens.

LEMME 4. - Pour toute solution locale $u > 0$ dans $\beta(0 , R) - \{0\}$, (où $\beta(0, R)$ est la boule de centre 0 et de rayon R), et tout nombre r , $0 < r \leqslant \frac{R}{2}$, on a :

$$\sup_{\partial\beta(0,r)} u \leqslant C \inf_{\partial\beta(0,r)} u ,$$

où $C(n , \lambda)$.

Démonstration. - Il suffit de faire une homothétie de centre 0 et de rapport r ; on vérifie facilement que $v(x) = u(rx)$ est solution locale, dans $\beta(0 , \frac{R}{r}) - \{0\}$, d'une équation du même type que $Lu = 0$, avec le même λ . Le théorème de Moser appliqué à v , solution locale > 0 en particulier dans l'ouvert fixe $\beta(0 , 2) - \{0\}$, et au compact $\partial\beta(0 , 1)$, donne le résultat.

Soient p et q deux potentiels de même support ponctuel 0 , qu'on peut choisir extrémaux dans l'ensemble des potentiels de support 0 . S'ils ne sont pas proportionnels, on ne peut avoir $p \geqslant \alpha q$, $\alpha > 0$, dans un voisinage de 0 privé de l'origine. Alors

$$\frac{\inf\limits_{\partial\beta(0,r)} p}{\sup\limits_{\partial\beta(0,r)} q} \to 0 \quad \text{quand} \quad r \to 0 ,$$

car sinon, il existerait $\alpha > 0$ et une suite r_n strictement décroissante vers 0 , tels que

$$\frac{\inf\limits_{\partial\beta(0,r_n)} p}{\sup\limits_{\partial\beta(0,r_n)} q} \geqslant \alpha ,$$

d'où $p \geqslant \alpha q$ sur chaque sphère $\partial\beta(0 , r_n)$, donc aussi dans un voisinage de 0 privé de l'origine. On en déduit, grâce au lemme 4,

$$\frac{\sup\limits_{\partial\beta(0,r)} p}{\inf\limits_{\partial\beta(0,r)} q} \to 0 \quad \text{quand} \quad r \to 0 ,$$

d'où $p \leqslant q$ dans un voisinage de 0 privé de l'origine, et p et q proportionnels

Conséquence. - Dans une boule β , il résulte du théorème 2 que les potentiels de support $y \in \beta$ sont proportionnels à la fonction de Green de pôle y , soit g_y , dont l'existence est démontrée dans [6], ainsi que la propriété, essentielle pour la suite :

étant donné un compact $K \subset \beta$, de diamètre < 1 si $n = 2$, il existe deux constantes A et $B > 0$ telles que

$$\frac{A}{|x - y|^{n-2}} \leqslant g_y(x) \leqslant \frac{B}{|x - y|^{n-2}} , \quad \forall\ x \ \text{et} \ y \in K , \quad n > 2 ,$$

$$A \log \frac{1}{|x - y|} \leqslant g_n(x) \leqslant B \log \frac{1}{|x - y|} , \quad \forall\ x \ \text{et} \ y \in K , \quad n = 2 .$$

THÉORÈME 3. - Pour tout ensemble $E \subset \Omega$, les conditions E L-effilé en x_0 et E Δ-effilé en x_0 sont équivalentes.

On suppose $x_0 \in \overline{E} - E$: E L-effilé au point x_0 équivaut à l'existence d'un L-potentiel p dans une boule β de centre x_0 , fini au point x_0 et tendant vers $+\infty$ quand $x \to x_0$ en restant dans E [1].

D'autre part, tout L-potentiel dans β admet une représentation intégrale à l'aide des L-fonctions de Green g_y et d'une mesure $\geqslant 0$ sur β ([3], théorème 18, 2).

Le théorème 3 résulte alors de la double inégalité vérifiée par g_y , en remarquant que la mesure associée au potentiel caractérisant l'effilement de E peut être supposée à support compact dans β .

THÉORÈME 4. - Soit ρ_n une suite régularisante formée de fonctions $\geqslant 0$, indéfiniment différentiables, dépendant seulement de $|x|$, nulles pour $|x| \geqslant \frac{1}{n}$ et telles que $\int \rho_n \, dx = 1$. Alors, pour toute fonction V surharmonique et localement bornée dans Ω , $V \star \rho_n \to V$ en tout point $\in \Omega$.

$\forall\ x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$, on a immédiatement $V \star \rho_n(x_0) \geqslant V(x_0) - \varepsilon$ pour n assez grand.

Pour obtenir une inégalité dans l'autre sens, on considère l'ensemble E des points $x \in \Omega$ tels que $V(x) > V(x_0) + \varepsilon$ et

$$V \star \rho_n(x_0) = \int_{x_0 - \complement E} V(x_0 - t)\ \rho_n(t)\ dt + \int_{x_0 - E} V(x_0 - t)\ \rho_n(t)\ dt .$$

La première intégrale est $\leqslant V(x_0) + \varepsilon$, et la deuxième s'écrit encore

$$I = \int_0^{1/n} \left[\int_{(x_0 - E) \cap \partial\beta(0,r)} V(x_0 - t)\ d\sigma(t)\right] f_n(r)\ dr ,$$

où $r = |t|$, $f_n(r) = \rho_n(t)$, et σ est la mesure superficielle sur la sphère $\partial\beta(0\ ,\ r)$. En tenant compte de $V \leqslant M$ sur un voisinage de x_0 , et E effilé au point x_0 :

$$I \leqslant M \int_0^{1/n} \sigma[E \cap \partial\beta(x_0\ ,\ r)]\ f_n(r)\ dr ,$$

$$\leqslant \varepsilon M \int_0^{1/n} \sigma[\partial\beta(0\ ,\ r)]\ f_n(r)\ dr = \varepsilon M \text{ , pour } n \text{ assez grand.}$$

THÉORÈME 5. - La solution du problème de Dirichlet dans ω , pour la donnée f sur $\partial\omega$, H_f^ω , coïncide avec la solution L_F^ω de $Lu = 0$ dans ω , telle que $F - L_F^\omega \in W_0^{1,2}(\omega)$, dans les deux cas suivants :

1° f est la restriction à $\partial\omega$ de $F \in C^0(\overline{\omega}) \cap W^{1,2}(\omega)$;

2° f et F sont les restrictions à $\partial\omega$ et à ω d'une fonction V , surharmonique dans un ouvert $\Omega \supset \overline{\omega}$ et $\in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$.

1° Soit u sous-harmonique dans ω , telle que

$$\limsup_{\substack{x \in \omega \\ x \to y}} u(x) \leqslant f(y) , \qquad \forall\ y \in \partial\omega ,$$

et soit une suite croissante d'ouverts réguliers $\omega_n \subset \overline{\omega}_n \subset \omega$, dont la réunion est ω ([3], prop. 7.1). Grâce à la continuité de F, on a, au voisinage de $\partial\omega$:

$$u \leqslant F + \varepsilon \ ,$$

donc aussi

$$u_1 = u - L_F^\omega - \varepsilon \leqslant F - L_F^\omega = \varphi \ .$$

u_1 est sous-harmonique dans ω, et majorée, au voisinage de $\partial\omega$, par une fonction continue $\varphi \in W_0^{1,2}(\omega)$; donc, pour n assez grand,

en chaque point $y \in \partial\omega_n$

$$\limsup_{\substack{x \in \omega_n \\ x \to y}} H_{u_1}^{\omega_n}(x) \leqslant u_1(y) \leqslant \varphi(y) \ ,$$

et au voisinage de $\partial\omega_n$

$$H_{u_1}^{\omega_n} \leqslant \varphi + \varepsilon_1 \ .$$

Alors (théorème 1) :

$$H_{u_1}^{\omega_n} - L_\varphi^{\omega_n} \leqslant \varepsilon_1 \quad \text{dans} \quad \omega_n \ , \text{ soit } \quad H_{u_1}^{\omega_n} \leqslant L_\varphi^{\omega_n} \quad \text{dans} \quad \omega_n \ .$$

Quand $n \to +\infty$, $L_\varphi^{\omega_n} \to 0$ (lemme 3) ; $H_{u_1}^{\omega_n}$ est une suite croissante de fonctions harmoniques ; sa limite est donc une fonction harmonique $\leqslant 0$ dans ω et, a fortiori, $u_1 \leqslant 0$ dans ω, soit $u \leqslant L_F^\omega$ dans ω.

On montrerait de même que toute fonction v, surharmonique dans ω et telle que

$$\liminf_{\substack{x \in \omega \\ x \to y}} v(x) \geqslant f(y) \ , \qquad \forall\, y \in \partial\omega \ ,$$

majore L_F^ω dans ω, et par suite $H_f^\omega = L_F^\omega$ dans ω.

2° Soit maintenant V surharmonique dans Ω et $\in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$.

Dans le cas où V est localement borné, on a immédiatement $H_V^\omega = L_V^\omega$: en effet, V est limite dans Ω de ses régularisées $V \star \rho_n$, qui $\in C^\infty(\overline{\omega})$ pour n assez grand, et par conséquent vérifient

$$H_{V\star\rho_n}^\omega = L_{V\star\rho_n}^\omega \ ;$$

quand $n \to +\infty$, $H_{V\star\rho_n}^\omega \to H_V^\omega$ dans ω, et, pour une suite partielle n',

$$L_{V\star\rho_{n'}}^\omega \to L_V^\omega \quad \text{p. p. dans} \quad \omega \ .$$

Si V est quelconque, alors V est limite d'une suite croissante de fonctions

$V_n = \inf(V\ ,\ n)$ du type précédent, d'où $H^{\omega}_{V_n} = L^{\omega}_{V_n}$; et le passage à la limite est licite, car $V_n \to V$ dans $W^{1,2}(\omega)$.

THÉORÈME 6. - Une fonction sous-harmonique dans Ω , majorée p. p. au voisinage de $\partial\Omega$ par une fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, est $\leqslant 0$ dans Ω .

Soit u sous-harmonique dans Ω , $\leqslant \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ p. p. au voisinage de $\partial\Omega$; u^+ est sous-harmonique et localement bornée dans Ω , et $u^+ \leqslant \varphi^+$ p. p. au voisinage de $\partial\Omega$.

On montre d'abord que, pour tout ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$ tel que $u^+ \leqslant \varphi^+$ p. p. sur un voisinage de $\partial\omega$, on a $H^{\omega}_{u^+} \leqslant L^{\omega}_{\varphi^+}$: on considère une suite régularisante ρ_n ; pour n assez grand,

$$u^+ \star \rho_n \in C^{\infty}(\overline{\omega})\ ,\ \text{donc}\ H^{\omega}_{u^+\star\rho_n} = L^{\omega}_{u^+\star\rho_n}\ ,$$

et $u^+ \star \rho_n \leqslant \varphi^+ \star \rho_n$ au voisinage de $\partial\omega$, donc

$$L^{\omega}_{u^+\star\rho_n} \leqslant L^{\omega}_{\varphi^+\star\rho_n}\ ;$$

le passage à la limite se fait comme dans la première partie de la démonstration du théorème 5, 2°.

Soit ω_n une suite croissante d'ouverts, $\overline{\omega}_n \subset \Omega$ et $\Omega = \cup\, \omega_n$: pour n assez grand, $H^{\omega_n}_{u^+} \leqslant L^{\omega_n}_{\varphi^+}$, et quand $n \to +\infty$, $L^{\omega_n}_{\varphi^+} \to 0$; donc $\lim_n H^{\omega_n}_{u^+} \leqslant 0$ dans Ω et $u^+ \leqslant 0$, donc nul dans Ω .

THÉORÈME 7. - Si V est surharmonique dans Ω et $\in W^{1,2}(\Omega)$, alors V admet une p. g. m. h. (plus grande minorante harmonique) dans Ω qui est L^{Ω}_V .

La p. g. m. h. de V dans Ω est la limite de la suite décroissante $H^{\omega_n}_V$ pour toute suite croissante d'ouverts $\omega_n \subset \overline{\omega} \subset \Omega$, de réunion Ω , quand cette limite n'est pas $-\infty$.

D'après le théorème 5 : $H^{\omega_n}_V = L^{\omega_n}_V$, et quand $n \to +\infty$, $L^{\omega_n}_V \to L^{\Omega}_V$ dans Ω , d'où

$$\lim_n H^{\omega_n}_V = L^{\Omega}_V\ .$$

COROLLAIRE 1. - Soit V surharmonique dans Ω et $\in W^{1,2}(\Omega)$; alors V est un potentiel dans Ω si et seulement si $V \in W_0^{1,2}(\Omega)$.