

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

HEINZ BAUER

**Cônes convexes semi-réiculés de fonctions continues.
Théorèmes de représentation et de stabilité**

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 8 (1963-1964), exp. n° 5, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1963-1964__8__A3_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CÔNES CONVEXES SEMI-RÉTICULÉS DE FONCTIONS CONTINUES.
THÉORÈMES DE REPRÉSENTATION ET DE STABILITÉ

par Heinz BAUER

Soit $C(X)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur un espace topologique séparé X . L'espace $C(X)$ sera muni de la topologie de la convergence compacte.

On considère une famille $\mathfrak{F}_1 = ((\sigma_i, x_i))_{i \in I}$ de couples (σ_i, x_i) , où σ_i est une mesure ≥ 0 portée par un compact de X et où x_i est un point de X tel que $\sigma_i(\{x_i\}) = 0$. Considérons aussi une famille $\mathfrak{F}_2 = (\tau_j)_{j \in J}$ de mesures $\tau_j \geq 0$ portées par des compacts de X . On dit alors que l'ensemble $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ des fonctions $u \in C(X)$, satisfaisant aux inégalités

$$(1) \quad \int u d\sigma_i \leq u(x_i) \quad \text{pour tout } i \in I,$$

$$(2) \quad \int u d\tau_j \leq 0 \quad \text{pour tout } j \in J,$$

est associé aux familles $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$. Evidemment, $\mathcal{K}$ est un cône convexe fermé semi-réticulé inférieurement dans $C(X)$. Inversement, d'après un résultat de G. CHOQUET et J. DENY [1], tout cône convexe fermé semi-réticulé inférieurement est associé à deux familles $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$. Pour la démonstration, il suffit de supposer X compact.

Un premier objet de cette conférence a été de démontrer ce théorème en partant d'une proposition de disjonction, à savoir : Soit X compact, et soit $\mathcal{K}$ un tel cône dans $C(X)$. Considérons l'adhérence $\mathcal{K}^*$ de l'ensemble des fonctions $f \in C(X)$ majorées par une fonction de $\mathcal{K}$. Alors $\mathcal{K}^*$ est un cône convexe héréditaire à gauche, tel que l'on ait $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^*$.

PROPOSITION (de disjonction).

(1) Pour toute fonction $f \in C(X) \cap \mathcal{K}^*$, il existe une mesure $\tau \geq 0$ sur X telle que l'on ait

$$\int u d\tau \leq 0 \quad \text{pour toute } u \in \mathcal{K} \quad \text{et} \quad \int f d\tau > 0.$$

(2) Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}^* \cap \mathcal{K}$, il existe une mesure $\sigma \geq 0$ sur X et un point $x \in X$ ayant les propriétés suivantes :

$$\int u d\sigma \leq u(x) \quad \text{pour toute } u \in \mathcal{K}, \quad \sigma(\{x\}) = 0$$

et

$$\int f d\sigma > f(x).$$

Le développement sera l'objet d'un article promis à la Revue de Mathématiques pures et appliquées.

Un deuxième objet de cette conférence a été de retrouver des résultats de S. GUBER concernant les cônes $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ associés à deux familles $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ telles que toute mesure σ_1 de $\mathfrak{F}_1$ possède une masse totale ≤ 1 . Ce sont exactement les cônes convexes fermés dans $\mathcal{C}(X)$ stables par rapport à l'opération

$$(S) \quad (u, v) \rightarrow \inf(u, v + 1) .$$

La démonstration peut être basée sur la proposition de disjonction. Pour un cône convexe $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_+(X)$, la stabilité par rapport à (S) est équivalente à la stabilité par rapport à $u \rightarrow \inf(u, 1)$. C'est une opération bien connue en théorie de l'intégration.

Une conséquence du théorème de Guber est une série de théorèmes de stabilité, par exemple : Soit $\mathcal{K}$ un cône convexe fermé dans $\mathcal{C}(X)$ stable par rapport à (S). Soit $k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ une fonction concave croissante telle que $k(0) = 0$. Alors la fonction

$$x \rightarrow k(u_1(x), \dots, u_n(x)) \quad (x \in X)$$

appartient à $\mathcal{K}$ pour $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{K}$.

On trouvera les détails du travail de GUBER dans les deux articles [2], [3] parus récemment.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHOQUET (Gustave) et DENY (Jacques). - Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, J. Math. pures et appl., 9e sér., t. 36, 1957, p. 179-189.
- [2] GUBER (Siegfried). - Masstheoretische Kennzeichnung gewisser Funktionenkegel, Archiv der Math., t. 15, 1964, p. 58-70.
- [3] GUBER (Siegfried). - Darstellungs- und Stabilitätssätze für Funktionenkegel, Math. Z., t. 86, 1964, p. 63-74.
