

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

ANTOINE DELZANT

Fonctions harmoniques sur un groupe semi-simple II. Les fonctions harmoniques

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 7 (1962-1963), exp. n° 11,
p. 1-25

http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1962-1963__7__A9_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS HARMONIQUES SUR UN GROUPE SEMI-SIMPLE

(d'après H. FÜRSTENBERG [5])

II. LES FONCTIONS HARMONIQUES

par Antoine DELZANT

1. Introduction.

Comme dans l'exposé précédent G désigne un groupe semi-simple connexe avec un centre fini ; K désignera un compact maximal de G , et $G = K.S$. On note $D = G/K$ le riemannien symétrique associé à G , et $B(G) = G/H(G)$ une frontière maximale de G (on rappelle qu'on peut choisir $H(G) = N(S)$ le normalisateur de S).

Soit μ une mesure positive sur G et de masse $+1$. On se propose de résoudre l'équation de convolution

$$(II.1.1) \quad f(g) = \int_G f(gg') d\mu(g') \quad (g, g' \in G)$$

et de trouver une représentation intégrale pour les solutions de cette équation. En fait on résoudra ce problème dans le cas particulier suivant :

- La mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Haar.
- On cherche les solutions bornées de (II.1.1).

Il va de soi qu'on voudrait bien pouvoir se séparer de ces hypothèses restrictives.

Posons :

$$L_\mu(\varphi)(g) = \int_G \varphi(gg') d\mu(g') \quad (\varphi \in L^1(G)) \quad .$$

L'opérateur L_μ a quelques propriétés évidentes qu'on va mentionner :

- Si $f \in L^\infty$ alors $L_\mu(f) \in L^\infty$.
- $L_\mu(f \star f') = f \star L_\mu(f')$ ($f \in L^\infty$; $f' \in L^1$).

Le principal problème qu'on aura à résoudre sera de donner un critère pour que les solutions de (II.1.1) soient constantes. On va d'abord s'occuper d'un cas particulier.

2. Les fonctions harmoniques.

DÉFINITION 2.1. - On dit qu'une fonction f , définie sur le groupe G , est harmonique si elle vérifie la relation

$$(II.2.1) \quad f(g) = \int_K f(gkx) dk \quad \forall x \in G \quad (g \in G ; k \in K) \quad .$$

Remarquons que cette formule généralise la formule de la moyenne sur l'espace euclidien :

$$f(x) = \int_{\|y\|=Cte} f(x+y) d\sigma = \int_{SO(n)} f(x+ky) dk \quad (x, y \in \mathbb{R}^n ; k \in SO(n))$$

(où $d\sigma$ est la mesure superficielle sur la sphère de rayon $\|y\|$, et dk la mesure de Haar du groupe spécial orthogonal). En outre la formule (II.2.1) est bien un cas particulier de la formule (II.1.1) si on prend $\mu = m_K * \varepsilon_x$ ($x \in G$).

PROPOSITION 2.2. - Si f est une fonction vérifiant (II.2.1) et la relation

$$(II.2.2) \quad f(kg) = f(g) \quad ,$$

alors f est constante.

Démonstration. - Comme f vérifie (II.2.2) c'est une fonction invariante à gauche par les translations de K . En appliquant deux fois l'équation fonctionnelle on trouve :

$$f(g) = \int_K f(gk'g') dk' = \iint_{K \times K} f(kgk'g') dk dk' = f(e)$$

ce qui démontre le lemme.

Les fonctions harmoniques, étant invariantes par les translations à droite par K , sont en fait des fonctions définies sur $D = G/K$. Réciproquement soit f une fonction numérique définie sur G/K . On dira que f est une fonction harmonique si la fonction $\tilde{f}(g) = f(gx_0)$ est harmonique (x_0 est le point marqué de D).

THÉOREME 2.3. - Soit m l'unique mesure de probabilité K -invariante sur $B(G)$. Si f est une fonction harmonique bornée sur G , il existe une, et une seule, fonction \hat{f} sur $B(G)$ - appelée donnée-frontière de f - telle que

$$f(g) = \int_{B(G)} \hat{f}(gx) dm(x) \quad (g \in G ; x \in B(G)) \quad .$$

De plus si \hat{h} est une fonction mesurable et bornée sur $B(G)$, la formule précédente définit une fonction harmonique sur G .

Démonstration.

Existence : Soit Q_f l'ensemble des fonctions $\psi \in L^\infty(G)$ qui vérifient les conditions suivantes :

$$1^\circ \quad \|\psi\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad .$$

$$2^\circ \quad f(g) = \int_K \psi(gkg') dk \quad (g' \in G) \quad .$$

L'ensemble Q_f est non vide car $f \in Q_f$. C'est un ensemble convexe, et fermé pour la topologie faible de $L^\infty(G)$. Comme Q_f est borné, il est faiblement compact, et G opère sur Q_f par les translations à droite : $g\psi(g') = \psi(g'g)$. En particulier le sous-groupe $H(G)$ opère dans Q_f , et il existe donc une fonction $\psi \in Q_f$ stable par $H(G)$, donc définie sur $G/H(G)$. Posons $\hat{f}(gH(G)) = \psi(g)$. On a alors l'équation suivante :

$$f(g) = \int_K \hat{f}(gkg'H(G)) dk = \int_K \hat{f}(gkx) dk = g \cdot m_{K \cdot x}(\hat{f}) \quad (x \in B(G)) \quad .$$

La mesure $m_{K \cdot x}$ est une mesure sur $B(G)$ invariante par K , elle est donc égale à m . On a donc :

$$f(g) = g \cdot m(\hat{f}) = \int_{B(G)} \hat{f}(gx) dm(x) \quad (g \in G ; x \in B(G)) \quad .$$

Réciproquement soit \hat{h} une fonction sur $B(G)$ bornée, et soit $h(g) = g \cdot m(\hat{h})$. La fonction h est une fonction harmonique

$$\int_K h(gkg') dk = \int_{B(G) \times K} \hat{h}(gkg'x) dm(x) dk \quad .$$

La mesure $\int_K k \cdot g' \cdot m dk$ est une mesure invariante par K , donc égale à m ; ainsi on a bien :

$$h(g) = \int_K h(gkg') dk \quad .$$

Unicité : Soit \hat{f} une fonction sur $B(G)$ telle que la fonction $\int \hat{f}(gx) dm(x)$ soit nulle. Supposons d'abord que \hat{f} soit une fonction continue. Dire qu'une suite $g_n \cdot m$ converge faiblement vers une mesure π c'est dire que $g_n \cdot m(\varphi)$ converge vers $\pi(\varphi)$ pour toute fonction continue φ . Pour une suite convenable g_n la suite $g_n \cdot m$ converge faiblement vers une mesure ponctuelle, donc \hat{f} est identiquement nulle. Si maintenant \hat{f} est une fonction bornée quelconque considérons la fonction :

$$\hat{f}_1(x) = \int_G \psi(g) \hat{f}(gx) dg \quad \psi \in L^1(G) \quad .$$

Alors \hat{f}_1 est une fonction continue, et on a

$$g \cdot m(\hat{f}_1) = \int_{B(G)} \hat{f}_1(gx) dm(x) = \int_{G \times B(G)} \psi(g') \hat{f}(g'gx) dg' dm(x) = 0 \quad .$$

Donc $\hat{f}_1 = 0$ pour toute ψ dans $L^1(G)$, donc \hat{f} est identiquement nulle.

La formule de Poisson peut être énoncée pour les fonction harmoniques sur D . Identifions D à un ensemble de mesures sur $B(G)$; $gK \in D$ correspond à la mesure $g \cdot m$ sur $B(G)$. Soit alors $p \in D$; pour toute fonction harmonique bornée f sur D , on a

$$f(p) = p(\hat{f}) \quad .$$

En particulier si \hat{f} est une fonction continue sur $B(G)$, alors $p(\hat{f})$ est une fonction continue de p pour la topologie vague des mesures : si $p \rightarrow \varepsilon_x$ (masse ponctuelle au point x) alors $p(\hat{f}) \rightarrow \hat{f}(x)$. Ainsi dans ce cas la fonction $\hat{f}(x)$ peut être regardé comme une partie des valeurs frontières de la fonction $f(p)$: $\hat{f}(x)$ est le prolongement de $f(p)$ à "la frontière distinguée" de D .

PROPOSITION 2.4. - Si f est une fonction harmonique sur $D = G/K$, elle est annulée par tout laplacien sur D , et est analytique.

Rappelons d'abord ce qu'est un laplacien sur D [2] :

Soit f une fonction sur D et Δ un opérateur différentiel sur D . On dit que Δ commute aux opérations de G si

$$\Delta f^g(x) = (\Delta f)^g(x) = \Delta f(gx) \quad (g \in G) \quad .$$

DÉFINITION 2.5. - On dit qu'un opérateur différentiel sur D est un laplacien si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1° Δ est un opérateur du second ordre elliptique,
- 2° Δ commute aux opérations de G ,
- 3° $\Delta(1) = 0$.

Soient p_0 l'image de l'élément neutre de G dans D , et \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G , \mathfrak{k} l'algèbre de Lie de K , et \mathfrak{p} l'orthogonal de \mathfrak{k} pour la forme de Killing : $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Soient (X_1, \dots, X_r) une base de \mathfrak{k} et (Y_1, \dots, Y_s) une base de \mathfrak{p} . Soit Δ un laplacien sur D : il sera complètement connu si on le connaît à l'origine (à cause de la propriété 2°). On va donc le déterminer au voisinage de p_0 . Soient $v = (v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{R}^s$, et $p = \exp(\sum v_j Y_j) p_0$. Le point v détermine un système de coordonnées au voisinage de p_0 . On a pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^2 :

$$f(p_0) = Q\left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_s}\right) f(\exp(\sum v_j Y_j) p_0) \Big|_{v=0} \\ + L\left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_s}\right) f(\exp(\sum v_j Y_j) p_0) \Big|_{v=0}$$

où Q est une forme quadratique définie positive et L une forme linéaire. Utilisant la propriété d'invariance par K on a

$$(\Delta f)^k(p_0) = \Delta f(kp_0) = \Delta f(p_0) \quad .$$

D'autre part on a $f(kgp_0) = f(kgk^{-1} p_0)$. En définitive on trouve :

$$f(p_0) = (Q + L) \left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_s} \right) f(\exp(\sum v_j \text{Ad } k Y_j) p_0) \Big|_{v=0} \quad .$$

Mais $\text{Ad } k$ laisse p fixe. Soit $\rho(k)$ la matrice de $\text{Ad } k$ dans p pour la base choisie. On voit alors facilement que

$$(Q + L)(\rho(k) x) = (Q + L)(x) \quad (k \in K; x \in \underline{\mathbb{R}}^s) \quad .$$

En particulier L est invariante par K ; donc il existe $Y_0 \in p$ stable par K , ce qui peut encore s'écrire $[Y_0, \mathfrak{k}] = 0$: donc $Y_0 \in \mathfrak{k}$, donc est nul. En définitive L est identiquement nul. En ce qui concerne Q la condition écrite implique certaines conditions. Soit $p = gp_0$ un élément de D :

$$\Delta f(p) = Q \left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_s} \right) f(g \exp(\sum v_j Y_j) p_0) \Big|_{v=0} \quad .$$

Pour tout opérateur différentiel Δ sur G invariant à gauche, on peut faire correspondre un opérateur différentiel $\bar{\Delta}$ sur D en posant $\bar{\Delta} f(gp_0) = \Delta f(gp_0)$. L'application tangente de l'espace tangent à G à l'origine, dans l'espace tangent à D en p_0 , est surjective et l'espace tangent en p_0 s'identifie à p . Soit $\tilde{\Delta}$ un relèvement de Δ qui soit de la forme $Q + R$ où R est une forme quadratique des X_t . Si la fonction f vérifie l'équation $f(gk) = f(g)$, on a $Rf = 0$ et $\tilde{\Delta}f = \Delta f$. L'opérateur $\tilde{\Delta}$ relève donc Δ . Supposons que R vérifie l'équation:

$$R(\text{Ad } k X_1, \dots, \text{Ad } k X_r) = R(X_1, \dots, X_r) \quad (k \in K) \quad .$$

Alors l'opérateur $\tilde{\Delta}$ est un opérateur elliptique du second ordre sur G invariant à gauche et qui commute aux translations à droite par K .

$$\tilde{\Delta} \circ R_k = R_k \circ \tilde{\Delta} \quad (\text{on a posé } R_k f(g) = f(gk)) \quad .$$

Démonstration de la proposition 2.4. - Montrons d'abord que f est de classe C^∞ . Soient $\tilde{f}(g) = f(gp_0)$ (p_0 le point marqué de D) et φ une fonction positive sur G indéfiniment différentiable à support compact et d'intégrale $+1$. On a

$$\int_K \tilde{f} \star \varphi(gkx) dk = \int \tilde{f}(gkxy^{-1}) \varphi(y) dk dy = f(g) \quad .$$

Soit alors Δ un laplacien sur D , on a

$$\Delta f(p_0) = (\Delta f)^k(p_0) = \Delta(f^k)(p_0) = Q \left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_s} \right) \int_K f(k \sum v_j Y_j p_0) dk \quad .$$

Mais si f est harmonique sur G , on a

$$\int_K f(kg) dk = f(e) \quad .$$

Donc $\Delta f(p_0) = 0$. Si f est harmonique f^g l'est aussi, donc

$$\Delta f^g(p_0) = \Delta f(gp_0) = 0 \quad .$$

Ce qui achève la démonstration.

3. Quelques résultats préliminaires.

Nous supposerons par la suite que D est muni d'une structure riemannienne, stable par G ; quand on parlera de distance entre deux points ce sera toujours relativement à une métrique riemannienne stable par G et notée $d(p_1, p_2)$. On pose

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in D ; d(p, x) < \varepsilon\}$$

ε est un nombre réel positif.

LEMME 3.1. - Soit Q un voisinage ouvert de l'identité dans G . Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout p dans D , l'ensemble $Q_p = \{gp ; g \in Q\}$ contienne $B(p, \varepsilon)$.

Démonstration. - On peut d'abord supposer que $p = p_0$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie de G , et soit Ω un ouvert de \mathfrak{p} contenant l'origine. L'application $\mathfrak{p} \rightarrow D$ définie par $x \rightarrow \exp(x) p_0$ est une application ouverte. Donc la frontière de $\exp \Omega p_0$ est contenue dans l'image de la frontière de Ω . Montrons que $d(p_0, \exp \Omega p_0) = \inf d(p_0, q)$ où q parcourt la frontière de $\exp \Omega p_0$ est strictement positif. Ce qui achèvera la démonstration.

Prenons une base de \mathfrak{g} comme dans la démonstration du lemme 8.5 (exposé I). Soit $\varphi : G \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ ($n = \dim G$) définie par $\varphi(g) = {}^t \text{Ad}(g) \text{Ad}(g)$. On a $\varphi(g) = I$ si et seulement si $g \in k$, et on peut identifier $\varphi(G)$ avec D , ce qu'on fera par la suite. Si $p \in D$, on a $g.p = {}^t \text{Ad}(g) p \text{Ad}(g)$. Si $x \in \mathfrak{p}$ soient x_i les valeurs propres de $\text{ad } x$, et $\|x\| = \sup x_i$. Soient $a > 0$, et Ω_a la boule ouverte de rayon a dans \mathfrak{p} , et $F\Omega_a$ la frontière de Ω_a . Comme G est semi-simple, on a $\det(\text{Ad } \exp x) = +1$, donc $\text{Tr}(\text{ad } x) = 0$. Si $x \in F\Omega_a$, la matrice $\text{ad } x$ a une valeur propre supérieure ou égale à a/n , donc $u = \exp(\text{ad } x)$ a une valeur propre λ supérieure à $e^{a/n}$. Soit Y un vecteur propre de u ; on a : ${}^t Y {}^t u u Y = \lambda^2 {}^t u u$. Mais ${}^t u u$ est une matrice symétrique définie positive, donc sa valeur propre maximum est

$$\sup {}^t Z {}^t u u Z / {}^t Z Z \geq \lambda^2 > e^{2a/n} \quad (Z \in \mathbb{R}^n - \{0\})$$

Donc toute matrice de $\varphi(F\Omega_a)$ a une valeur propre plus grande que $e^{2a/n}$.

La preuve du lemme est alors la suivante :

Si Q est un voisinage ouvert de l'identité dans G , alors il existe $a > 0$ tel que $Q \supset \exp \Omega_a$, et on a : $Q \cdot p_0 \supset \exp \Omega_a \cdot p_0$. Comme l'application φ est ouverte, la frontière de $\varphi(\Omega_a)$ est contenue dans $\varphi(\mathbb{F}\Omega_a)$. Comme toute matrice de ce dernier ensemble à une valeur propre $> e^{2a/n}$, il s'ensuit que toutes les matrices de D ayant une valeur propre plus petite que $e^{2a/n}$ sont contenues dans $\varphi(\Omega_a)$. Il s'en suit que $Q \cdot p_0$ contient un voisinage fixe de p_0 , ce qui prouve le lemme.

LEMME 3.2. - Soient Q un ouvert de G , et Q^n l'ensemble des produits de n éléments de Q . Si p_1 et $p_2 \in D$, il existe n , ne dépendant que de $d(p_1, p_2)$ tel que $Q^n p_1 \cap Q^n p_2 \neq \emptyset$.

Démonstration. - On peut poser $Q = Q_0 \cdot g$ où Q_0 est un voisinage ouvert de l'identité. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Q_0 p$ contienne un ensemble $B(p, \varepsilon)$. Montrons que $Q^n p \supset B(g^n p, n\varepsilon)$. Si $n = 1$, $Qp = Q_0 gp \supset B(gp, \varepsilon)$. Soit $q \in D$, tel que $d(p, q) < n\varepsilon$. Soit L la géodésique joignant q à $g^n p$; il existe $q_1 \in L$ tel que

$$d(g^n p, q_1) < (n-1)\varepsilon \text{ et } d(q, q_1) < \varepsilon \quad .$$

Comme $Q^{n-1} p \supset B(g^{n-1} p, (n-1)\varepsilon)$, on a

$$gQ^{n-1} p \supset B(g^n p, (n-1)\varepsilon) \quad ;$$

donc $q_1 \in gQ^{n-1} p$. D'autre part $Q_0 q_1$ contient $B(q_1, \varepsilon)$, donc

$$q \in B(q_1, \varepsilon) \subset Q_0 q_1 \subset Q_0 Q^{n-1} p = Q^n p \quad .$$

Si $d(p_1, p_2) < n\varepsilon$, alors $d(g^n p_1, g^n p_2) < n\varepsilon$, donc $g^n p_2 \in Q^n p_1$. Comme $g \in Q$, le lemme est démontré.

COROLLAIRE. - Soit Σ un semi-groupe ouvert de G , et soit p_1 et $p_2 \in D$; alors $\Sigma p_1 \cap \Sigma p_2$ est non vide.

COROLLAIRE. - Sous les mêmes hypothèses, $\Sigma^{-1} \Sigma K = G$.

Dire que $g \in \Sigma^{-1} \Sigma K$, c'est dire que $\Sigma g \cap \Sigma K \neq \emptyset$, ce qui est équivalent à dire que $\Sigma g p_0 \cap \Sigma p_0 \neq \emptyset$.

Remarque. - En général $\Sigma^{-1} \Sigma$ n'est pas égal au groupe tout entier. Si $G = SL(2, \mathbb{R})$ et $\Sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ($a, b, c, d, > 0$), pour $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\Sigma g \cap \Sigma = \emptyset$. D'autre part on ne sait pas comment se séparer de l'hypothèse que Σ est ouvert. Et cependant on en aurait besoin pour étendre la théorie aux mesures non absolument continues.

LEMME 3.3. - Soient G un groupe localement compact, μ une mesure de probabilité absolument continue sur G . Alors il existe un ouvert de G où la mesure $\mu * \mu$ domine un multiple de la mesure de Haar.

Il existe $f \in L^1(G)$ tel que $d\mu(g) = f(g) dg$. Posons $F(g) = \int f(gg_1^{-1}) f(g_1) dg_1$. On a $d\mu * \mu(g) = F(g) dg$. Il suffit de montrer que $F(g)$ est strictement positive sur un ouvert de G . Si cette propriété est vérifiée pour f elle est vérifiée pour $f' \geq f$. Donc on peut supposer que f est bornée par un nombre M . Alors $F(g)$ est continue :

$$\begin{aligned} |F(gg') - F(g)| &\leq \int |f(gg'g_1^{-1}) f(g_1) - f(gg_1^{-1}) f(g_1)| dg_1 \\ &\leq M \int |f(gg'g_1^{-1}) - f(gg_1^{-1})| dg_1 \leq M \int |f(g'g_2) - f(g_2)| dg_2 \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand g' tend vers e , donc comme F ne peut être identiquement nulle, on a $F(g) > \varepsilon > 0$ sur un ouvert.

Soient M un espace, et ν_1 et ν_2 deux mesures sur M , on peut définir leur inf.

$$\inf(\nu_1, \nu_2) = \sup_{\substack{\nu \leq \nu_1 \\ \nu \leq \nu_2}} (\nu)$$

(On dit que $\mu \geq \nu$, si $\mu(B) \geq \nu(B)$ pour tout borélien $B \subset M$.) Si ν_1 et ν_2 sont deux mesures absolument continues par rapport à une mesure μ on peut définir $\inf(\nu_1, \nu_2)$ par

$$d(\inf(\nu_1, \nu_2))/d\mu = \inf(d\nu_1/d\mu, d\nu_2/d\mu) \quad .$$

Comme on peut prendre $\mu = \nu_1 + \nu_2$, on voit que $\inf(\nu_1, \nu_2)$ est toujours bien défini. On pose $\|\nu\| = \nu(M)$ pour toute mesure ν sur M .

LEMME 3.4. - Soient μ une mesure de probabilité sur G , absolument continue, et μ^n la puissance n -ième de μ pour la convolution ; alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon > 0$, et n entier positif tels que, si p_1 et p_2 sont tels que $d(p_1, p_2) < \varepsilon$, alors $\mu^n \cdot p_1$ et $\mu^n \cdot p_2$ vérifient $\|\inf \mu^n p_1, \mu^n p_2\| > \varepsilon$.

Démonstration. - D'après le lemme précédent on peut supposer que μ domine un multiple de la mesure de Haar sur un ouvert Q_1 . Soit Q_2 un ouvert tel que $\bar{Q}_2 \subset Q_1$, \bar{Q}_2 étant compact. Alors μ^n domine un multiple de la mesure de Haar sur Q_2^n . Soit π la restriction de la mesure de Haar à Q_2^n . Il suffit de prouver que pour un n , il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\|\inf(\pi p_1, \pi p_2)\| > \varepsilon$, si $d(p_1, p_2) < \varepsilon$. Il existe un entier ℓ tel que $Q_2^\ell p_2 \cap Q_2^\ell p_1 \neq \emptyset$ si

$d(p_1, p_2) < c$. Il existe $g_1, g_2 \in Q_2^l$ tel que $g_1 p_1 = g_2 p_2$. Soit π' la restriction de la mesure de Haar à Q_2 ; alors $\pi' g_1$ sera une mesure définie sur $Q_2 g_1 \subset Q_2^{l+1}$, et par l'invariance à droite de la mesure de Haar $\pi' g_1$ sera la restriction de π à $Q_2 g_1$. Donc $\pi' g_1 \leq \pi$. De même $\pi' g_2 \leq \pi$. Il s'ensuit que $\pi' g_1 p_1 \leq \pi p_1$ et $\pi' g_2 p_2 \leq \pi p_2$. Donc

$$\pi' g_1 p_1 = \pi' g_2 p_2 \leq \inf(\pi p_1, \pi p_2) \quad .$$

On en déduit

$$\|\inf(\pi p_1, \pi p_2)\| \geq \|\pi' g_1 p_1\| = \text{mesure de Haar de } Q_2 \quad .$$

Nous allons utiliser un procédé de "marche au hasard" sur D . Soient X_1, X_2, \dots, X_n , une suite de V. A. à valeurs dans G , indépendantes et de même répartition μ . Si φ est une fonction μ -intégrable sur G , on a

$$E(\varphi(X_n)) = \int_G \varphi(g) d\mu(g) \quad .$$

Pour tout $p \in D$, on définit une marche au hasard sur D en posant

$$W_n(p) = X_n X_{n-1} \dots X_1 \quad .$$

PROPOSITION 3.5. - Le processus W_n est un processus de Markov. Si f est une fonction numérique sur D vérifiant l'équation :

$$(II.3.1) \quad f(p) = \int_G f(gp) d\mu(g)$$

alors le processus $f \circ W_n(p)$ est une martingale.

Démonstration. - En effet on vérifie facilement que, pour tout ensemble $A \subset D$ borélien, on a :

$$\begin{aligned} E(W_{n+1} p \in A \mid W_1 p = x_1 ; W_2 p = x_2 ; \dots ; W_n p = x_n) \\ = E(W_{n+1} p \in A \mid W_n p = x_n) \quad . \end{aligned}$$

En outre la répartition conditionnelle de $W_{n+1} p$ connaissant $W_n p$ est la suivante (on pose $W_n p = x = g_x \cdot K$) :

$$\begin{aligned} E(W_{n+1} p \in A \mid W_n p = x) &= E(X_n g_x \in AK) = \int_{AK} d(\mu \star \varepsilon_{g_x})(g) \\ &= \int_G \chi_A(gx) d\mu(g) = \mu \star W_n p(\chi_A) \end{aligned}$$

(χ_A est la fonction caractéristique de A). Si de plus f vérifie l'équation (II.3.1)

$$E(f \circ W_{n+1} p \mid W_n) = \int_{G \times D} f(gy) d\mu(g) d(W_n p)(y) = f(W_n p) \quad .$$

Ce qui achève la démonstration.

THÉOREME 3.6. - Soit f une fonction bornée sur D vérifiant (II.3.1), alors f est une fonction constante.

COROLLAIRE 1. - Soit f une fonction sur G vérifiant les conditions suivantes :

$$- f(kg) = f(g) \quad (k \in K, g \in G)$$

$$- f(g) = \int_G f(gg') d\mu(g')$$

- f est bornée sur G .

Alors f est constante.

Démonstration. - Comme f vérifie (II.3.1) les $f \circ W_n$ forment une martingale ; comme f est bornée le théorème de convergence des martingales s'applique [8], et $f \circ W_n(p)$ converge pour tout p quand $n \rightarrow \infty$ avec la probabilité 1. Posons $\psi(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f \circ W_n(p)$. C'est une V. A. de p , et on a $f(p) = E(\psi(p))$.

Donc si on montre que $\psi(p)$ est presque sûrement une constante, on aura gagné. Soient $c > 0$, p_1 et p_2 deux points distincts de D , tels que $d(p_1, p_2) < c$, et soient n et ε définis par c comme dans le lemme précédent ; on a

$$\inf(\mu^n p', \mu^n p'') > \varepsilon > 0 \text{ si } d(p' p'') \leq d(p_1, p_2) \quad .$$

Posons $V_N(p) = E((f \circ W_{n+N}(p) - f \circ W_N(p))^2 | W_N(p))$. Comme $f \circ W_n$ est une martingale, $V_N(p)$ tend vers 0 presque sûrement quand N tend vers l'infini. D'autre part $V_N(p)$ est la variance de $f \circ W_{n+N}(p)$ conditionnellement à $f \circ W_N(p)$. Par l'inégalité de Čebičev, si $V_N(p)$, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(|f \circ W_{n+N}(p) - f \circ W_N(p)| > \delta) = 0 \quad .$$

De façon équivalente on peut dire que, pour la mesure μ^n , la mesure de l'ensemble des $g \in G$ pour lesquels $|f(gW_N p) - f(W_N(p))| > \delta$ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. Une autre formulation est la suivante :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu^n * W_N(p) \{p' \in D \mid |f(p') - f(W_N(p))| > \delta\} = 0 \quad .$$

Appliquons ce résultat successivement pour $p = p_1$ et $p = p_2$: Supposons que pour une infinité (N_α) d'indices N , on ait

$$|f \circ W_{N_\alpha}(p_1) - f \circ W_{N_\alpha}(p_2)| > 2\delta \quad .$$

Alors il n'existe pas de point p' vérifiant pour les N_α à la fois les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |f(p') - f \circ W_{N_\alpha}(p_1)| &< \delta \\ |f(p') - f \circ W_{N_\alpha}(p_2)| &< \delta \quad . \end{aligned}$$

Mais l'ensemble des points pour lesquels l'une et l'autre de ces inégalités n'est pas vérifiée a une mesure pour $\inf(\mu^N W_N(p_1), \mu^N W_N(p_2))$ qui tend vers 0 quand N tend vers l'infini, avec la probabilité 1.

Il s'ensuit que

$$\lim_N \inf(\mu^N W_N(p_1), \mu^N W_N(p_2)) = 0 \quad .$$

Cependant

$$d(W_N p_1, W_N p_2) = d(p_1, p_2) < \epsilon \quad ,$$

ce qui contredit le choix de n (cf. lemme 3.4). Par conséquent pour tout $\delta > 0$, on a $|f \circ W_N(p_1) - f \circ W_N(p_2)| < 2\delta$ pour N assez grand. Donc $\psi(p_1) = \psi(p_2)$ presque sûrement, donc $f(p)$ est constante.

COROLLAIRE 2. - Soient μ une mesure sur G ($\mu \in \mathcal{P} - G$) absolument continue par rapport à la mesure de Haar, et f une fonction numérique bornée sur G . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est harmonique sur G .

(ii) $f(g) = \int_{G \times K} f(gkg') dk d\mu(g')$.

COROLLAIRE 3. - Soit f une fonction numérique bornée sur D . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est harmonique.

(ii) f est de classe \underline{C}^2 et annulé par tout laplacien.

(iii) f est de classe \underline{C}^2 et annulé par un laplacien.

Démonstration. - Soit

$$F_g(g') = \int_K f(gkg') dk \quad .$$

Si f vérifie la propriété (ii) du corollaire 2, on a

$$F_g(kg') = F_g(g')$$

$$\int_{G \times K} F_g(g'k'g'') dk' d\mu(g'')$$

$$= \int_{G \times K \times K} f(gkg'k'g'') dk dk' d\mu(g'') = \int_K f(gkg') dk = F_g(g') \quad .$$

Donc F_g est constante, et $F_g(g') = f(g)$. On trouvera dans [6] un résultat analogue.

Pour le corollaire 3 : (i) \implies (ii) (proposition 2.4), (ii) \implies (iii) trivialement.

(iii) \implies (i). Dans [7], HUNT a déterminé les opérateurs qui, sur un groupe de Lie, opèrent comme générateurs infinitésimaux de semi-groupes de probabilité. En particulier les opérateurs tels que $\tilde{\Delta}$ sont de ce type : donc il existe une famille de mesures de probabilité $\{\mu_t; 0 \leq t\}$ sur G telles que :

$$1^\circ \mu_t \star \mu_s = \mu_{t+s} .$$

$$2^\circ \frac{d}{dt} \int_G \varphi(gg') d\mu_t(g') \Big|_{t=0} = \tilde{\Delta}\varphi(g)$$

(où φ est une fonction bornée de classe $\underline{\underline{C}}^2$).

Utilisant la propriété de semi-groupe, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_G \varphi(gg') d\mu_t(g') = \int_G \tilde{\Delta}\varphi(gg') d\mu_t(g') .$$

D'autre part $\tilde{\Delta}$ engendrant le semi-groupe μ_t , et vérifiant $R_k^{-1} \tilde{\Delta} R_k = \tilde{\Delta}$ comme un semi-groupe, est uniquement déterminé par son générateur infinitésimal, on a

$$R_k^{-1} \mu_t R_k = \mu_t ; \text{ donc } k \star \mu_t = \mu_t \star k ,$$

ce qui entraîne que $\mu_t \star m_K = m_K \star \mu_t$.

Supposons que f soit une fonction bornée sur D et de classe $\underline{\underline{C}}^2$, telle que $\tilde{\Delta}f = 0$: alors $\tilde{f}(g) = f(gp_0)$ vérifie $\tilde{\Delta}\tilde{f} = 0$ et $\tilde{f}(gk) = \tilde{f}(g)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{G \times K} \tilde{f}(gkg') dk d\mu_t(g') &= \frac{d}{dt} \int_G \tilde{f}(gg'') d(m_K \star \mu_t)(g'') \\ &= \frac{d}{dt} \int_G \tilde{f}(gg'') d(\mu_t \star m_K)(g'') = \frac{d}{dt} \int_{G \times K} \tilde{f}(gg'k) dk d\mu_t(g') \\ &= \frac{d}{dt} \int_G \tilde{f}(gg') d\mu_t(g') = 0 . \end{aligned}$$

De ce calcul on déduit

$$\int_{G \times K} \tilde{f}(gkg') dk d\mu_t(g') = \int_K \tilde{f}(gk) dk = \tilde{f}(g) .$$

D'autre part [6], les mesures μ_t sont absolument continues, donc $\tilde{f}(g)$ est harmonique.

4. Domaines de Cartan.

Soit $\mathcal{O} \subset \underline{\underline{C}}^r$ un ouvert ; on dit que c'est un domaine de Cartan si \mathcal{O} est un ouvert borné, et s'il admet un groupe G de transformations analytiques transitif et semi-simple, tel que le stabilisateur de chaque point soit un sous-groupe compact maximal [1]. On peut toujours supposer que l'origine z_0 de $\underline{\underline{C}}^r$ appartient à \mathcal{O} et que le groupe d'isotropie K de z_0 est représenté par des transformations linéaires de $\underline{\underline{C}}^r$. En particulier K opère sur la frontière $\overline{\mathcal{O}}$ de \mathcal{O} . Enfin l'application $\beta : G/K \rightarrow \mathcal{O}$ est un isomorphisme.

Le domaine \mathcal{O} admet une métrique riemannienne : la métrique de Bergmann, invariante par G . Cette métrique définit un opérateur de Laplace-Beltrami donné par

$$\Delta = \sum g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \quad .$$

L'opérateur Δ étant elliptique correspond à un laplacien sur D noté encore Δ . Une fonction f sur D sera dite harmonique si $\Delta f = 0$. Les fonctions analytiques sur \mathcal{O} vérifient $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f = 0$. Elles sont donc harmoniques au sens que nous venons de dire.

On va montrer que l'application $\beta : D \rightarrow \mathcal{O}$ se prolonge à la compactification standard \bar{D} de D et que $\beta(\bar{D}) \subset \bar{\mathcal{O}}$. Par cette application la frontière distinguée de D est envoyée sur un ensemble $\bar{\mathcal{O}}_0$ qui est la frontière de Bergmann-Silov de \mathcal{O} .

LEMME 4.1. - Soit f une fonction harmonique sur D telle que l'ensemble des translatés à gauche par K soit équicontinu. Alors \hat{f} est continue (cf. théorème 2.3). Soient $x \in B(G)$, et (x_n) une suite de points qui converge vers x . Comme K est transitif sur $B(G)$, on peut poser $x_n = k_n x$ et la suite k_n converge vers e . Posons

$$\varphi_n(p) = f(k_n p) - f(p) \quad .$$

La fonction φ_n est harmonique, et on a $\hat{\varphi}_n(x) = \hat{f}(k_n x) - \hat{f}(x)$. A cause de l'unicité de la fonction frontière, on a $\|\hat{\varphi}_n\|_\infty = \|\varphi_n\|_\infty$. Mais par hypothèse $\|\varphi_n\|_\infty \rightarrow 0$. D'où le lemme.

LEMME 4.2. - Soit f une fonction analytique sur \mathcal{O} , continue sur $\bar{\mathcal{O}}$, alors la fonction $f \circ \beta$ a une donnée frontière qui est continue.

Démonstration. - Comme K opère sur $\bar{\mathcal{O}}$, si $k_n \rightarrow k$, $f(k_n z) \rightarrow f(kz)$ uniformément pour tout $z \in \mathcal{O}$. Donc par le lemme précédent, $\widehat{f \circ \beta}$ est continue.

COROLLAIRE. - Sous les mêmes hypothèses, la fonction $f \circ \beta$ définie sur D se prolonge en une fonction continue sur la compactification standard \bar{D} .

Démonstration. - En effet si une fonction harmonique $\varphi(p)$ a une donnée frontière $\hat{\varphi}$ continue, alors par la formule de Poisson $\varphi(p) = p(\hat{\varphi})$ on voit que φ se prolonge en une fonction continue à \bar{D} .

On va appliquer ces résultats aux fonctions coordonnées z^i sur \mathcal{O} . Les fonctions $z^i \circ \beta$ vérifient les conditions du lemme 4.2 : elles se prolongent donc en des fonctions φ_i sur \bar{D} . D'autre part $\beta : D \rightarrow \mathcal{O}$ est donné par

$$\varphi(p) = \{z^1 \circ \beta, \dots, z^r \circ \beta\} = \{\varphi_1(p), \dots, \varphi_r(p)\}$$

en sorte que les fonctions φ_i définissent un prolongement continu de β à \bar{D} . Ceci prouve incidemment que le groupe G opère sur $\bar{\omega} = \beta(\bar{D})$, et que β commute aux opérations de G . On considère $B(G)$ comme plongé dans \bar{D} , et notons $\bar{\omega}_0 = \beta(B(G))$.

Soit maintenant $f(z)$ une fonction analytique sur ω , continue sur $\bar{\omega}$. La fonction $f \circ \beta$ définie sur D se prolonge à \bar{D} et sa restriction à $B(G)$ constitue la donnée frontière φ de $f \circ \beta$. Par ailleurs, puisque f est définie sur $\bar{\omega}$, et puisque β est une application continue sur \bar{D} , la fonction $f \circ \beta$ est déjà définie sur \bar{D} et continue; comme les deux coïncident, on conclut que $\varphi(x) = f \circ \beta(x)$ ($x \in B(G)$). Donc la donnée frontière de $f \circ \beta$ correspond à la restriction de f à $\bar{\omega}_0$. La représentation de Poisson de $f \circ \beta$ en terme de φ implique immédiatement une formule de Poisson de $f(z)$ en terme de sa restriction à $\bar{\omega}_0$. Soit \tilde{m} l'unique mesure K -invariante sur $\bar{\omega}_0$ ($\tilde{m} = \beta(m)$), alors

$$(II.4.1) \quad f(z) = \int_{\bar{\omega}_0} \hat{f}(g\zeta) d\tilde{m}(\zeta) \quad (z = gz_0) \quad .$$

De plus si $\hat{f}(\zeta)$ est une fonction continue sur $\bar{\omega}_0$ (II.4.1) détermine une fonction analytique sur ω qui se prolonge en une fonction continue sur $\bar{\omega}_0$. On a les résultats suivants :

- Toute fonction analytique sur ω continue sur $\bar{\omega}_0$ prend son maximum sur $\bar{\omega}_0$.
- Aucun sous-ensemble propre de $\bar{\omega}_0$ n'a cette propriété.

On en déduit que $\bar{\omega}_0$ est la frontière de Bergmann-Silov de ω .

THÉOREME 4.3. -- Soient ω un domaine de Cartan, G son groupe d'automorphismes, z_0 un point de ω et K le groupe d'isotropie de z_0 . Alors la frontière de Bergmann-Silov $\bar{\omega}_0$ de ω est l'image par une application qui commute aux opérations de G de la frontière distinguée de G , et en particulier, K opère transitivement sur $\bar{\omega}_0$. Si f est une fonction analytique sur ω , qui se prolonge en une fonction continue sur $\bar{\omega}$, alors f admet une représentation de Poisson :

$$f(z) = \int_{\bar{\omega}_0} \hat{f}(g\zeta) d\tilde{m}(\zeta)$$

($\tilde{m} =$ l'unique mesure de probabilité sur $\bar{\omega}_0$ invariante par K ; $z = gz_0$).

Exemple. - On reprend le 3e exemple de l'exposé I, § 7. On a vu que $\dim B(G) > \dim \bar{\mathcal{O}}_0$. L'application β , qui est injective sur D , ne l'est plus sur \bar{D} . En particulier la donnée frontière d'une fonction harmonique bornée quelconque sur D , donc sur \mathcal{O} , ne correspond pas nécessairement à une fonction sur $\bar{\mathcal{O}}_0$, puisque l'ensemble des fonctions mesurables et bornées sur $\bar{\mathcal{O}}_0$ correspond par (II.4.1) à un sous-ensemble strictement contenu dans l'ensemble des fonctions mesurables et bornées sur \bar{D} .

Ainsi (II.4.1), qui est valable pour les fonctions analytiques sur \mathcal{O} qui se prolongent en des fonctions continues sur $\bar{\mathcal{O}}$, n'est plus valable pour les fonctions harmoniques et bornées quelconques sur \mathcal{O} . En revanche la formule de Poisson écrite en termes de fonctions sur $B(G)$ reste toujours valable.

5. Les fonctions μ -harmoniques.

Arrivons-en à l'étude du cas général (II.1.1). Les fonctions qui vérifient II.1.1 sont dites μ -harmoniques.

DÉFINITION 5.1. - Une fonction f sur G est uniformément continue à gauche (l. u. c.) si elle est bornée et si, quand une suite g_n d'éléments de G tend vers l'élément neutre, alors $f(g_n g) \rightarrow f(g)$ uniformément en g .

Soit \mathcal{H} l'ensemble des fonctions l. u. c. et μ -harmoniques sur G . On va montrer que de telles fonctions sont celles qui correspondent à des données frontières continues pour une formule de Poisson appropriée.

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de V. A. indépendantes à valeurs dans G et ayant même répartition μ . Soit Ω l'espace du processus (Ω peut être choisi égal à $G.G.G \dots$ avec la mesure $\mu \otimes \mu \otimes \mu \otimes \mu \dots$).

DÉFINITION 5.2. - Soit \mathcal{A} la famille des fonctions sur $G.\Omega$ définies par :

$$z(g, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(gX_1(\omega) X_2(\omega) \dots X_n(\omega))$$

où f est l. u. c. et telle que la limite existe avec la probabilité + 1 pour tout g .

L'ensemble \mathcal{A} forme une algèbre (pour le produit évident) de fonctions mesurables sur $G.\Omega$ et on a une représentation continue de G dans \mathcal{A} par les translations à gauche :

$$\rho(g) z(g', \omega) = z(gg', \omega) = z^g(g', \omega) \quad .$$

Si $g_n \rightarrow e$, alors $z^{g_n} \rightarrow z$ uniformément. Soit $z \in \mathcal{A}$; posons

$$\zeta(g) = E(z(g, \omega)) \quad .$$

Comme f est l. u. c., il s'ensuit que ζ est également l. u. c. Montrons que ζ est μ -harmonique. Soit X_0 une V. A. de même répartition que les X_i ;

$$z(g, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(gX_1 X_2 \dots X_n)$$

$$\zeta(g) = E(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(f(gX_1 \dots X_n))$$

$$\zeta(gX_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(f(gX_0 X_1 \dots X_n) | X_0) \quad .$$

Cette dernière égalité peut encore s'écrire :

$$\int_G \zeta(gg') d\mu(g') = E(\zeta(gX_0)) = \lim_n E(f(gX_0 \dots X_n)) \quad .$$

La limite du deuxième membre est évidemment $\zeta(g)$. Donc $\zeta \in \mathcal{H}$. On a donc défini une application $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}$.

Réciproquement soit $f \in \mathcal{H}$; posons $W_n(g) = f(gX_1 X_2 \dots X_n)$. Comme f est une fonction μ -harmonique, on a $E(f(gX_n)) = f(g)$ pour tout g et pour tout n , par conséquent

$$E(W_n(g) | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = W_{n-1}(g) \quad .$$

Donc les $W_n(g)$ forment une martingale bornée et convergent donc presque sûrement [8] vers une variable aléatoire $z(g, \omega)$ qui appartient à \mathcal{A} . Posons $z = \beta(f)$. On a $\alpha \circ \beta = \text{Id}_{\mathcal{H}}$ et $\beta \circ \alpha = \text{Id}_{\mathcal{A}}$.

En effet, soient $f \in \mathcal{H}$ et $z = \beta(f)$:

$$E(z(g, \omega)) = E(\lim_n W_n(g)) = \lim_n E(W_n(g)) = f(g) \quad .$$

De plus soit $\zeta = \alpha(z)$ et $z' = \beta(\zeta)$. Puisque $\alpha(z') = \zeta$, on a $\alpha(z - z') = 0$. Soit $z \in \mathcal{A}$ tel que $E(z(g, \omega)) = 0$ pour tout $g \in G$. Puisque $z(g, \omega)$ est mesurable relativement à X_1, X_2, \dots, X_n , on a :

$$z(g, \omega) = \lim_n E(z(g, \omega) | X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (\text{cf. [3]}) \quad .$$

En outre si

$$z(g, \omega) = \lim_k f(g X_1 X_2 \dots X_n X_{n+1} \dots X_{n+k})$$

on peut écrire

$$z(g, \omega) = z(g X_1 \dots X_n, \omega_n)$$

(ω_n est le point de Ω tel que $X_j(\omega_n) = X_{j+n}(\omega)$). Comme X_n est un processus stationnaire, l'application $\omega \rightarrow \omega_n$ conserve la mesure et, comme $E(z(g, \omega)) = 0$, on trouve $E(z(g, \omega_n)) = 0$ pour tout g en sorte que

$$E(z(g X_1 \dots X_n, \omega) \mid X_1, \dots, X_n) = 0 \quad .$$

Ainsi $E(z(g, \omega) \mid X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$ et $z(g, \omega) = 0$.

On a donc défini une application linéaire bijective entre \mathcal{A} et \mathcal{K} . Mais \mathcal{A} et \mathcal{K} peuvent être munis chacun d'une topologie, en utilisant la norme L^∞ . Les applications α et β n'augmentent pas la norme, donc elles la conservent. \mathcal{K} est un espace de Banach (\mathcal{K} est fermé dans $L^\infty(G)$), donc \mathcal{A} aussi. De plus \mathcal{A} est une algèbre telle que $\|z_1 z_2\|_\infty \leq \|z_1\|_\infty \|z_2\|_\infty$; donc \mathcal{A} est une algèbre de Banach involutive (si $z \in \mathcal{A}$ alors $\bar{z} \in \mathcal{A}$ et $\|z\bar{z}\|_\infty = \|z\|_\infty^2$) donc c'est une C^* -algèbre. \mathcal{A} peut donc s'identifier à un espace de fonctions continues sur un espace compact Π [4].

DÉFINITION 5.3. - L'espace Π est appelé l'espace de Poisson de G relativement à μ .

Si $p \in \Pi$, le point p définit un homomorphisme de \mathcal{A} dans \mathbb{C} ; la topologie de Π est obtenue en prenant pour voisinages de p les points p' tels que $|p'(z_i) - p(z_i)| \leq \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$. En outre G opère sur \mathcal{A} et sur \mathcal{K} , et α et β commutent aux opérations de G . Ceci permet de faire opérer G continuellement sur Π par

$$gp(z) = p(z^g) \quad .$$

Soit φ une fonction continue sur Π correspondant à une fonction $f \in \mathcal{K}$. Posons $L(\varphi) = f(e)$. L est une forme linéaire continue sur $C(\Pi)$ positive et $L(1) = 1$. Donc il existe une mesure de probabilité ν sur Π telle que $\nu(\varphi) = L(\varphi)$. Soient $z \in \mathcal{A}$ et $p \in \Pi$; posons $\varphi(p) = p(z)$. On a

$$p(z^g) = \varphi(gp) = \varphi^g(p) \quad .$$

D'autre part à z correspond une fonction f de \mathcal{K} , et on a

$$f(g) = f^g(e) = \int_{\Pi} \varphi^g(p) d\nu(p) = \int_{\Pi} \varphi(gp) d\nu(p) \quad .$$

On a ainsi démontré le théorème suivant.

THÉOREME 5.4. - Il existe une mesure de probabilité ν sur l'espace de Poisson Π de G relativement à μ telle que :

$$f(g) = \int_{\Pi} \varphi(gp) d\nu(p) \quad .$$

Cette formule établit une correspondance bijective entre les éléments de \mathcal{K} et les fonctions continues sur Π .

COROLLAIRE. - La mesure ν vérifie $\mu \star \nu = \nu$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mu * \nu(\varphi) &= \int \varphi(gp) \, d\mu(g) \, d\nu(p) = \int f(g) \, d\mu(g) = f(e) \\ \mu * \nu(\varphi) &= \int \varphi(p) \, d\nu(p) = \nu(\varphi) \quad .\end{aligned}$$

6. L'espace de Poisson et la frontière maximale.

On suppose maintenant que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Haar.

LEMME 6.1. - Soit K un sous-groupe compact maximal de G . Alors K opère transitivement sur Π .

Démonstration. - Soit $z \in \mathcal{A}$ alors $z'(g, \omega) = \int_K z(kg, \omega) \, dk$ est une constante qui ne dépend ni de g , ni de ω . En effet si $\zeta = \alpha(z)$, on trouve

$$\alpha(z') = \int \zeta^k \, dk = \zeta' \quad .$$

Or $\zeta(g)$ (donc $\zeta'(g)$) est constante, et ζ' vérifie $\zeta'(kg) = \zeta'(g)$, donc ζ' est une constante; donc z' est également une constante. Soient $p_1, p_2 \in \Pi$. Les ensembles Kp_1 et Kp_2 sont deux compacts distincts ou confondus. Si $Kp_1 \neq Kp_2$, ils sont disjoints. Il existe $\varphi \in \mathcal{C}(\Pi)$ telle que $\varphi = +1$ sur Kp_1 et 0 sur Kp_2 . On a donc :

$$\int_K \varphi(kp) \, dk = 1 \text{ sur } Kp_1 \text{ et } 0 \text{ sur } Kp_2 \quad .$$

Mais si φ correspond à $z \in \mathcal{A}$, alors $\int \varphi^k \, dk$ correspond à z' qui est une constante. Ce qui entraîne une contradiction.

LEMME 6.2. - Soit M un espace compact où G opère. Soient $p_0 \in \Pi$ et H_{Π} le groupe d'isotropie de p_0 . Il existe une mesure θ sur M stable par H_{Π} .

Démonstration. - Soit $\mathcal{P}(M)$ l'opérateur T_{μ} ($T_{\mu}(\lambda) = \mu * \lambda$ ($\lambda \in \mathcal{P}(M)$) laisse $\mathcal{P}(M)$ invariant. Donc il existe $\lambda \in \mathcal{P}(M)$ tel que $\mu * \lambda = \lambda$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(M)$, et posons

$$\tilde{\varphi}(g) = g\lambda(\varphi) = \int_M \varphi(gx) \, d\lambda(x) \quad .$$

Alors la fonction $\tilde{\varphi}$ est μ -harmonique, et $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\int_G \tilde{\varphi}(gg') \, d\mu(g') = \int_{G \times M} \varphi(gg'x) \, d\mu(g') \, d\lambda(x) = \int \varphi(gx) \, d\lambda(x) = \tilde{\varphi}(g) \quad .$$

Si $g_n \rightarrow e$

$$|\tilde{\varphi}(g_n g) - \tilde{\varphi}(g)| \leq \int |\varphi(g_n gx) - \varphi(gx)| \, d\lambda(x)$$

qui tend vers 0 uniformément.

On a ainsi défini une application linéaire continue $\gamma : C(M) \rightarrow \mathcal{K}$. Si $p_0 \in \Pi$ alors l'application $f \rightarrow p_0(\beta(f))$ est une fonctionnelle linéaire sur \mathcal{K} . Donc l'application $\varphi \rightarrow p_0(\beta(\gamma(\varphi)))$ est aussi une fonctionnelle linéaire sur $C(M)$. Elle est positive et conserve la fonction 1 : elle est donc donnée par une mesure $\theta : p_0(\beta(\gamma(\varphi))) = \theta(\varphi)$. Soit $h \in H$, alors

$$\begin{aligned} h\theta(\varphi) &= \theta(\varphi^h) = p_0(\beta(\gamma(\varphi^h))) = p_0(\beta(\gamma(\varphi)^h)) = p_0(\beta(\gamma(\varphi))^h) \\ &= hp_0(\beta(\gamma(\varphi))) = p_0(\beta(\gamma(\varphi))) = \theta(\varphi) \end{aligned} \quad .$$

LEMME 6.3. - Si M est une frontière de G , il existe une application continue de Π sur M qui commute aux opérations de G .

Démonstration. - On sait qu'il existe une mesure θ sur M avec $h\theta = \theta$ ($h \in H_\Pi$). Soit $G\theta$ la trajectoire de θ par G ; on a une application $G/H_\Pi = \Pi \rightarrow G\theta$; donc $G\theta$ est compact. Comme M est une frontière il existe une mesure dans $G\theta$ qui est une mesure ponctuelle donc il existe une suite (k_n) d'éléments de K qui converge vers $k \in K$ et telle que $\lim k_n \theta = p$ ($p \in M$). Donc $\theta = k^{-1} p$ (lemme 6.1) et H_Π a un point fixe dans M : H_Π est contenu dans le stabilisateur de p .

LEMME 6.4. - Soit ν la mesure sur Π définie en 5.4. Alors, pour presque toute suite de V . A. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ sur Ω , la suite $X_1 X_2 \dots X_n \nu$ converge vers une mesure ponctuelle.

Démonstration. - Soit $\varphi \in C(\Pi)$ et posons

$$\tilde{\varphi}(g) = g\nu(\varphi) = \int \varphi(gx) d\nu(x)$$

alors $\tilde{\varphi} \in \mathcal{K}$ et $\beta(\tilde{\varphi}) \in \mathcal{A}$.

$$\beta(\tilde{\varphi})(e, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(X_1 X_2 \dots X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_1 \dots X_n \nu(\varphi) \quad .$$

Donc $X_1 \dots X_n \nu$ converge presque sûrement. Soit $\nu^i(\omega)$ sa limite

$$\beta(\tilde{\varphi})(e, \omega) = \nu^i(\omega)(\varphi) \quad .$$

L'application $\varphi \rightarrow \beta(\tilde{\varphi})$ est un isomorphisme d'algèbre : $\beta(\widetilde{\varphi_1 \varphi_2}) = \beta(\tilde{\varphi}_1) \beta(\tilde{\varphi}_2)$.
Donc on a

$$\nu^i(\omega)(\varphi_1 \varphi_2) = \nu^i(\omega)(\varphi_1) \nu^i(\omega)(\varphi_2) \quad .$$

Mais il s'ensuit que $\nu^i(\omega)$ est presque sûrement une mesure ponctuelle, car on a pour toute $\varphi \geq 0$:

$$\nu^i(\omega)(\varphi) = \nu^i(\omega)(\varphi^n)^{1/n}$$

qui tend vers le maximum essentiel de φ relativement à ν' , ce qui implique que toute φ est constante presque partout relativement à ν' , et donc que ν' est une mesure ponctuelle.

THÉOREME 6.5. - L'espace Π est un revêtement fini non ramifié de $B(G)$.

COROLLAIRE. - Le groupe G possède un nombre fini d'espaces de Poisson, qui sont tous des revêtements finis de $B(G)$.

Démonstration. - Par le lemme 6.3, on sait qu'il existe une application d'espaces homogènes $\sigma : \Pi \rightarrow B(G)$. Soient $p_0 \in \Pi$ et $q_0 = \sigma(p_0)$. Notons H_Π (resp. $H(G)$) le groupe d'isotropie de p_0 (resp. q_0). On a évidemment $H_\Pi \subset H(G)$. Il faut montrer que $[H(G) : H_\Pi] < +\infty$. Nous allons temporairement admettre le lemme suivant.

LEMME 6.6. - Il existe un ouvert Q dans Π tel que, pour toute mesure λ sur Π dont le support est intérieur à Q , il existe une suite $\{g_n\}$ d'éléments de G telle que la suite $g_n \lambda$ converge vers une mesure ponctuelle.

Le sous-groupe $H(G)$ a la propriété de point fixe. Donc $H(G)$ laisse invariante une mesure sur $H(G)/H_\Pi$ qui est un espace compact. L'injection $H(G) \rightarrow G$ applique $H(G)/H_\Pi$ dans $G/H_\Pi = \Pi$. Donc $H(G)$ laisse invariante une mesure λ sur Π dont le support est l'ensemble $H(G) p_0$. Soit Q un ouvert de Π vérifiant les propriétés du lemme 6.6 ; comme K opère transitivement sur Π il existe $k \in K$ tel que $k\lambda(Q') > 0$ pour un compact Q' de Q . Autrement dit $k\lambda$ domine une mesure λ' non nulle dont le support est intérieur à Q . Donc il existe une suite $\{g_n\}$ telle que $g_n \lambda'$ converge vers une mesure ponctuelle non nulle. Choisissons une sous-suite g'_n telle que $g'_n k\lambda$ converge vers $\tilde{\lambda}$. Cette dernière mesure domine donc une mesure ponctuelle non nulle. De plus λ est invariante par $H(G)$, et K opère transitivement sur $B(G)$. Si $g \in G$, $g = hk$ ($h \in S$; $k \in K$), alors $g\lambda = k\lambda$. Donc

$$\tilde{\lambda} = \lim g'_n \lambda = \lim k'_n \lambda = k' \lambda \quad (\text{pour un certain } k' \in K) \quad .$$

Comme $\tilde{\lambda}$ domine une mesure ponctuelle non triviale il en va de même de λ . Mais λ a son support dans $H(G) p_0$. Donc il existe $h \in H(G)$ tel qu'on ait $\lambda(\{hp_0\}) > 0$. Comme λ est invariante par $H(G)$, il s'en suit que $\lambda(\{hp_0\}) > 0$ pour tout $h \in H(G)$. Mais λ est une mesure de masse finie : on en conclut que $H(G) p_0 = H(G)/H$ est fini.

Remarquons que $H(G) = K_0 \cdot S$ (cf. exposé I) ; K_0 est un groupe compact qui a un nombre fini de composantes connexes et S est connexe. Soit $H(G)^0$ la composante connexe de $H(G)$. Pour chaque Π le groupe H_Π sera contenu dans $H(G)$ et contiendra $H(G)^0$. Donc les espaces Π correspondent aux sous-groupes de $H(G)/H(G)^0$.

Démonstration du lemme 6.6. - Avec les notations du théorème 5.4, on a $\mu \star \nu = \nu$; donc $\mu \star \mu \star \nu = \nu$. On sait (lemme 3.3) que $\mu \star \mu$ domine un multiple de la mesure de Haar de G sur un ouvert de G . Donc ν domine une mesure "bien foutue" sur un ouvert Q de Π . De plus il y a une suite $\{g_n\}$ telle que $\{g_n \nu\}$ converge vers une mesure ponctuelle (lemme 6.4). Donc pour toute mesure "bien foutue" π sur Q , la suite $g_n \pi$ converge vers une mesure ponctuelle. Soient π une mesure dont le support est intérieur à Q , et μ' une mesure concentrée sur un ouvert suffisamment petit de G , alors $\mu' \star \pi$ sera dominée par une mesure "bien foutue" sur Q , en sorte que $g_n \mu' \star \pi$ convergera vers une mesure ponctuelle. Par le même argument que dans la démonstration du théorème 3.1 de l'exposé I il existe une suite g'_n telle que $g'_n \pi$ converge vers une masse ponctuelle.

THÉORÈME 6.8. - Si le support d'une puissance μ^m (pour la convolution) de μ contient un voisinage de l'identité dans G alors l'espace de Poisson de G relativement à μ coïncide avec $B(G)$.

Démonstration. - Supposons que $\Pi \neq B(G)$. De toute façon Π est un revêtement de $B(G)$, et les automorphismes de la fibre commutent aux opérations de G . Soit η un tel automorphisme différent de l'identité. Soit ν la mesure sur Π construite en 5.4. Il existe une suite $\{g_n\}$ telle que $g_n \nu \rightarrow p$ ($p \in \Pi$). Alors $g_n \eta \nu = \eta g_n \nu \rightarrow \eta p \neq p$. Donc ν et $\eta \nu$ sont mutuellement étrangères. Mais (lemme 6.6) ν domine une mesure "bien foutue" sur un ouvert Q de Π . Si le support de μ^m contient un voisinage de l'identité, alors tout $g \in G$ appartient au support de μ^n pour un n . Comme $\mu^n \star \nu = \nu$ pour tout $q \in \Pi$, la mesure ν domine une mesure "bien foutue" sur un voisinage de q . On a le même résultat pour $\eta \nu$. Donc ν et $\eta \nu$ ne peuvent être mutuellement étrangères.

Exemple. - On va montrer sur un exemple que l'on peut effectivement avoir des espaces de Poisson qui soient différents de $B(G)$. On prend $G = SL(2, \mathbb{R})$, $K = SO(2)$, et S le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux positifs, $N(S)$ le groupe des matrices triangulaires supérieures.

$B(G) = \underline{\mathbb{P}}^1$ (droite projective réelle) ; $G/S = S^1$ (le tore) .

Soit Σ l'ensemble des matrices à coefficients tous positifs ou nuls et de déterminant 1 ; c'est un semi-groupe de G qui opère sur $\underline{\mathbb{R}}^2$ en conservant le premier quadrant. Soit μ une mesure sur G dont le support est contenu dans Σ . Alors l'espace de Poisson relativement à μ est S^1 . En effet il existe une mesure ν concentrée sur le premier quadrant de S^1 telle que $\mu \star \nu = \nu$. Pour cette mesure il existe une suite g_n (par exemple $g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $g_n = g^n$) telle que $g_n \nu \rightarrow$ une mesure ponctuelle p . Soit φ une fonction continue sur S^1 . Posons :

$$\tilde{\varphi}(g) = \int_{S^1} \varphi(gx) d\nu(x) = g\nu(\varphi) \quad .$$

Or $\mu \star \nu = \nu$. Donc :

$$\int \tilde{\varphi}(gg') d\mu(g') = \int \varphi(gg'x) d\nu(x) d\mu(g') = \tilde{\varphi}(g) \quad .$$

Donc $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}$. En outre

$$\lim \tilde{\varphi}(gg_n) = \lim g g_n \nu(\varphi) = \varphi(gp) \quad ;$$

donc si $\tilde{\varphi} = 0$, alors φ est nulle également : l'application $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ est injective. Supposons que l'espace de Poisson de μ ne soit pas S^1 ; c'est donc $\underline{\mathbb{P}}^1$. Pour toute fonction continue φ sur S^1 on peut trouver $\hat{\varphi}$ sur $\underline{\mathbb{P}}^1$ telle que $\tilde{\varphi}(g) = g\nu'(\hat{\varphi})$ (théorème 5.4) où ν' est une mesure sur $\underline{\mathbb{P}}^1$. Soit $g_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; alors $g_0 \nu' = \nu'$ et

$$\tilde{\varphi}(gg_0) = \tilde{\varphi}(g) = \tilde{\varphi}(g_0 g) = g_0 g\nu(\varphi) = g\nu(\varphi^{g_0}) = \varphi^{g_0}(g) \quad .$$

Comme l'application $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ est injective, on a pour toute φ la relation $\varphi^{g_0} = \varphi$, ce qui entraîne une contradiction.

Si $G = SL(2, \mathbb{C})$, alors $B(G)$ est isomorphe à la droite projective complexe qui est simplement connexe : il n'y a donc qu'un seul espace de Poisson.

7. La formule de Poisson.

On a montré jusqu'à présent que les fonctions μ -harmoniques qui appartiennent à \mathcal{H} admettent une représentation de Poisson, il reste à vérifier ce résultat dans le cas général.

Soit $f(g)$ une fonction μ -harmonique bornée sur G , et soit $\alpha_n(g)$ une suite de fonctions sur G continues à support compact approximant l'identité de $L^1(G)$: les α_n ont leur support dans des voisinages de l'origine de plus en plus petit ; $\alpha_n \geq 0$ et $\int \alpha_n(g) dg = 1$. Posons :

$$f_n(g) = \int_G \alpha_n(gx^{-1}) f(x) dx \quad .$$

Alors $f_n \in \mathcal{H}$. Ce qui permet d'écrire :

$$f_n(g) = \int_{\Pi} \hat{f}_n(gp) d\nu(p)$$

où \hat{f}_n est une fonction continue sur Π . De plus nous savons que $\mu * \nu = \nu$, ce qui peut s'écrire :

$$\nu = \int \mu \cdot p d\nu(p) \quad .$$

Comme μ est absolument continue par rapport à la mesure de Haar, il s'ensuit que $\mu \cdot p$ est absolument continue par rapport à une mesure m "bien foutue" sur Π , donc ν vérifie aussi cette propriété ; on peut donc écrire

$$f_n(g) = \int_{\Pi} \hat{f}_n(p) \frac{d\nu(p)}{dm} dm(p) \quad .$$

Les fonctions \hat{f}_n sont bornées car $\|\hat{f}_n\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$. Donc elles appartiennent à un ensemble borné de $L^{\infty}(\Pi, m)$, et donc il existe une sous-suite qui converge pour la topologie faible de $L^{\infty}(\Pi, m)$. Soit $\hat{f}_{n_j} \rightarrow \hat{f}$; alors

$$f_{n_j} \rightarrow \int_{\Pi} \hat{f}(p) \frac{d\nu}{dm}(p) dm(p) \quad .$$

Soit $\psi \in L^1(G)$; par définition de $f_n(g)$, on a

$$\int f_n(g) \psi(g) dg = \int f(g) \alpha_n(g_1) \psi(g, g) dg dg_1 \quad .$$

Donc par définition de α_n la fonction $f_n \rightarrow f$ pour la topologie faible de $L^{\infty}(G)$. En particulier $f_{n_j} \rightarrow f$. Mais f_{n_j} converge simplement ; comme les f_{n_j} sont uniformément bornés, la limite simple est aussi la limite faible (convergence dominée). Donc presque partout

$$f(g) = \int_{\Pi} \hat{f}(p) d\nu(p) = \int \hat{f}(gp) d\nu(p) \quad .$$

En définitive appliquant l'équation fonctionnelle des fonctions μ -harmoniques, on voit que l'équation précédente est valable partout.

THÉOREME 7.1. - Soient G et $B(G)$ comme précédemment. Il existe une famille Π_i de revêtements finis de $B(G)$ telle que, si μ est une mesure de probabilité absolument continue sur G , les fonctions μ -harmoniques bornées sont en correspondance bijective avec l'ensemble des fonctions mesurables et bornées sur un des Π_i , et la correspondance est donnée par l'équation précédente.

Appendice.

On va donner en prime au lecteur un résultat supplémentaire. Soient G un groupe topologique et M un espace localement compact où G opère. On dit que M est contractif s'il existe un ouvert $Q \subset M$ et un point $p_0 \in Q$ tel que pour tout voisinage U de p_0 il existe $g \in G$ tel que $gQ \subset U$.

Exemple. - $G = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($a, b, \in \underline{\mathbb{R}}; a > 0$); $M = \underline{\mathbb{R}}$; $gx = ax + b$. Si on prend $g_n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $g_n x \rightarrow 0$. Donc M est contractif.

THÉOREME. - Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe avec un centre fini. Soit M un espace homogène contractif de G . Alors M est compact.

Démonstration. - Soient Q et p_0 , comme dans la définition. Il existe un compact $\Delta \subset Q$, et un ouvert $W \subset G$ tels que $W\Delta \subset \Delta$. Soit μ une mesure sur G ayant son support dans W , il existe une mesure $\pi \in \mathcal{P}(M)$ telle que $\mu * \pi = \pi$. Soit M_c le compactifié d'Alexandroff de M où G opère trivialement sur le point à l'infini, et soit $\mathcal{C}(M_c)$ l'espace des fonctions continues sur M_c . On peut identifier π à une mesure sur M_c . Si $\psi \in \mathcal{C}(M_c)$ et soit $\tilde{\psi}(g) = g\pi(\psi)$. La fonction ψ est une fonction μ -harmonique et comme ψ est continue sur M_c , $\tilde{\psi} \in \mathcal{H}$. Soit Π, μ, ν , définis comme précédemment, alors il existe $\hat{\psi} \in \mathcal{C}(\Pi)$ telle que $\tilde{\psi} = g\nu(\hat{\psi})$, et l'application $\psi \rightarrow \hat{\psi}$ est une application linéaire de $\mathcal{C}(M_c)$ dans $\mathcal{C}(\Pi)$, et on a $g\pi(\psi) = g\nu(\hat{\psi})$. Soit $p \in \Pi$, alors $\hat{\psi}(p)$ est une fonctionnelle linéaire positive sur $\mathcal{C}(M_c)$, donc il existe une mesure de probabilité $\theta_p \in \mathcal{P}(M_c)$ telle que $\hat{\psi}(p) = \theta_p(\psi)$. Si $g \in G$, ψ^g correspond à ψ^g qui correspond à $\hat{\psi}^g$ donc $\theta_{gp} = g\theta_p$. L'application $p \rightarrow \theta_p$ est continue, et considérons la mesure :

$$\tilde{\theta}(\psi) = \int_{\Pi} \theta_p(\psi) d\nu(p) = \int \hat{\psi}(p) d\nu(p) = \nu(\hat{\psi}) = \pi(\psi); \quad \psi \in \mathcal{C}(M_c) \quad .$$

Donc $\tilde{\theta} = \pi$. Comme π a son support dans Δ , et comme $\pi = \int \theta_p d\nu(p)$, il s'ensuit que presque tous les θ_p ont leur support dans Δ . Mais $\Delta \subset Q$, donc il y a une suite $\{g_n\}$ telle que $g_n \theta \rightarrow p_0$. Mais l'application $p \rightarrow \theta_p$ est continue et Π est compact, donc si p' est limite d'une sous-suite de $\{g_n p\}$, alors $\theta_{p'} = 0$. Donc $\theta_{p'}$ est une mesure ponctuelle, et il en va de même de tous les θ_p , et définit une application de Π dans M_c qui commute aux opérations de G , puisque $\theta_{p'} = p_0$, envoie Π dans M . Comme M est un espace homogène, θ est surjective; comme θ est continue, M est nécessairement compact.

On dit qu'un espace M , où G opère, est irréductible si aucun sous-ensemble fermé strict de M n'est invariant par G .

COROLLAIRE. - Soit M un espace homogène où G opère, contractif et irréductible, alors M est un espace homogène compact.

En effet, dans la démonstration précédente, on a utilisé le fait que M est un espace homogène tout à fait à la fin.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN (Elie). - Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes, Abh. Math. Sem. Hamburg, t. 11, 1935, p. 116-162.
 - [2] CHEVALLEY (Claude). - Theory of Lie groups. - Princeton, Princeton University Press, 1946.
 - [3] DOOB (J. L.). - Stochastic processes. - New York, J. Wiley and Sons, 1953 (Wiley Publications in Statistics).
 - [4] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J.). - Linear operators, Part I : General theory. - New York, Interscience Publishers, 1958 (Pure and applied Mathematics, A Series of Texts and Monographs, 7).
 - [5] FÜRSTENBERG (H.). - A Poisson formula for semi-simple Lie groups (à paraître).
 - [6] GODEMENT (Roger). - Une généralisation du théorème de la moyenne pour les fonctions harmoniques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 234, 1952, p. 2137-2139.
 - [7] HUNT (G.). - Semigroups of measures on Lie groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 81, 1956, p. 264-293.
 - [8] MEYER (Paul-André). - Théorie des martingales et des semi-martingales, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, t. 5, 1960/61, n° 4, 11 p.
-