

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

PHILIPPE COURRÈGE

Décomposition des martingales de carré intégrable

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 7 (1962-1963), exp. n° 6, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SB CD_1962-1963__7__A5_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉCOMPOSITION DES MARTINGALES DE CARRÉ INTÉGRABLE

par Philippe COURRÈGE

Le présent exposé reprend, à titre d'introduction à l'exposé suivant sur les intégrales stochastiques, certains résultats obtenus par P.-A. MEYER comme application de ses théorèmes sur la décomposition des surmartingales (cf. [3] et [4]).

0. Notations et rappels.

La terminologie utilisée sera celle de l'exposé de P.-A. MEYER sur la décomposition des surmartingales (cf. [7], page 11-01). Si E est un ensemble, et A une partie de E , 1_A^E (ou 1_A) désigne l'indicateur de A dans E .

0.1. - On considère un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et une famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ (I désignant un intervalle de la droite numérique achevée $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$) qui satisfait aux propriétés suivantes :

(T₁) $\mathcal{F}_t$ croît avec t .

(T₂) La famille $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite : on a

$$\bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t \text{ pour tout } t \in I.$$

(T₃) Pour tout t , $\mathcal{F}_t$ contient les ensembles P -négligeables de $\mathcal{F}$.

Les propriétés étudiées dans la suite font intervenir, sans référence et sauf mention explicite du contraire, un terme $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$ ayant les propriétés précédentes.

0.2. - Un temps d'arrêt T sur I est une application de Ω dans I telle que, pour tout $t \in I$, $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ (où $\{T \leq t\}$ désigne l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $T(\omega) \leq t$). On dira qu'un temps d'arrêt T sur I est borné, si $T(\Omega)$ est contenu dans un intervalle compact contenu dans I .

Si T est un temps d'arrêt sur I , la tribu $\mathcal{F}_T$ des événements antérieurs à T est constituée par les $A \in \mathcal{F}$ tels que $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in I$. Si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$, on a : $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

0.3. - Un processus stochastique défini sur I est une application $\Phi = (\Phi_t)_{t \in I}$ de $I \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout $t \in I$, Φ_t est une variable aléatoire.

Si T est un temps d'arrêt sur I et Φ un processus défini sur I , Φ_T désigne la fonction $\omega \rightarrow \Phi_{T(\omega)}(\omega)$.

Un processus Φ est mesurable, si l'application $(t, \omega) \rightarrow \Phi_t(\omega)$ est mesurable pour la tribu $\mathcal{B}_I \times \Omega$ sur $I \times \Omega$ (où $\mathcal{B}_I$ désigne la tribu borélienne de I).

Si Φ est mesurable, Φ_T est une variable aléatoire pour tout temps d'arrêt T .

Un processus Φ est bien adapté (resp. fortement bien adapté) si Φ_t est F_t -mesurable pour tout $t \in I$ (resp. Φ_T est F_T -mesurable pour tout temps d'arrêt borné T sur I).

Un processus Φ est standard si toutes ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limite à gauche ; pour tout (t, ω) on pose alors

$$\Phi_t^-(\omega) = \lim_{s \uparrow t} \Phi_s(\omega) \quad .$$

Tout processus standard est mesurable.

Un processus Φ est intégrable (resp. de carré intégrable) si $\Phi_t \in \mathcal{L}^1(\Omega, F, P)$ (resp. $\Phi_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, F, P)$) pour tout $t \in I$.

0.4. - Si Φ et Ψ sont deux processus définis sur I ; on dit que Φ est une version (ou une modification) de Ψ si, pour tout $t \in I$, $\Phi_t = \Psi_t$ p. s.

Si Φ est une modification de Ψ , Φ et Ψ sont équivalents (au sens classique, cf. [6], page 2-04). " Φ est une version de Ψ " est une relation d'équivalence ; une classe d'équivalence relative à cette relation peut être identifiée à une famille $S = (S_t)_{t \in I}$ de classes de variables aléatoires équivalentes (pour la mesure P) ; par abus de langage on appellera aussi processus stochastique une telle classe ; si le processus Φ appartient à la classe S (c'est-à-dire $\Phi_t \in S_t$, $\forall t \in I$), on dira aussi que Φ est une version de la classe S .

0.5. - Une martingale, définie sur I , est un processus $(X_t)_{t \in I} = X$ bien adapté, intégrable et tel que $E[X_t | F_s] = X_s$ p. s. pour tout $s \leq t$. Toute martingale admet une version standard (cf. appendice 1).

0.6. - $A = (A_t)_{t \in I}$ est un processus croissant sur I si pour tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire $t \rightarrow A_t(\omega)$ est une fonction croissante et continue à droite.

0.7. - Si $A = (A_t)_{t \in [a, b[}$ est un processus croissant défini sur $[a, b[$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, et si $\Phi = (\Phi_t)_{t \in [a, b[}$ est un processus mesurable, par exemple ≥ 0 ou borné, on désignera par

$$\int_a^b \phi_t dA_t \quad (\text{resp.} \quad \int_u^v \phi_t dA_t, \text{ où } a \leq u < v < b)$$

la variable aléatoire, obtenue, pour chaque $\omega \in \Omega$, en intégrant la fonction $t \rightarrow \phi_t(\omega)$ (resp. la fonction $t \rightarrow 1_{[u,v)}(t) \phi_t(\omega)$) par rapport à la mesure ≥ 0 sur $[a, b[$ associée à la fonction croissante et continue à droite $t \rightarrow A_t(\omega)$.

1. Le processus croissant naturel associé à une martingale de carré intégrable.

1.1. - Premier exemple : le mouvement brownien (cf. [1], p. 97). - Soit $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un mouvement brownien défini sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, soient $X_t = \xi_t - \xi_0$, et $\mathcal{F}_t$ la plus petite tribu sur Ω contenant les ensembles négligeables, et rendant mesurables les variables aléatoires ξ_s , ($s \leq t$) ⁽¹⁾. $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale de carré sommable, satisfaisant la relation suivante :

$$\text{Pour tout } s \leq t, \quad E[(X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s] = t - s \quad \text{p.s.}$$

Cette relation peut aussi s'écrire :

$$E[(X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s] = E[A_t - A_s | \mathcal{F}_s]$$

où $(A_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est le processus croissant intégrable défini par : $A_t(\omega) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \omega \in \Omega$.

Par ailleurs, si $(Y_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale standard bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$E\left\{\int_0^t (Y_u - Y_u^-) du\right\} = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+$$

(on verra ci-dessous, en 1.3, l'utilité de cette propriété).

1.2. - Deuxième exemple : le cas discret ; Position du problème. - Soient $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ contenant les ensembles $\mathcal{P}$ -négligeables, et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable telle que $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, et t tel que $n \leq t < n+1$, posons $\hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_n$ et $\hat{X}_t = X_n$. La famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ possède les propriétés (T_1) , (T_2) et (T_3) et le processus

⁽¹⁾ On notera que la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ ainsi construite satisfait aux propriétés (T_1) , (T_2) , (T_3) introduites en 0.1 ; cf. à ce sujet la remarque en 3.1.

$\hat{X} = (\hat{X}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale de carré intégrable, (relativement à cette famille $(\hat{F}_t)$ de tribus).

Etudions d'abord la martingale discrète $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

Posons $A_0 = 0$, et, pour $n > 1$,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} (E\{X_{k+1}^2 | \mathcal{F}_k\} - X_k^2) \quad \text{p. s.}$$

Le processus discret $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi défini a les propriétés suivantes :

(1) $\forall n \quad A_n \leq A_{n+1} \quad \text{p. s.}, \quad A_n \in \mathcal{C}^1, \quad A_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable.}$

(2) $\forall n \quad E\{X_{n+1}^2 - X_n^2 | \mathcal{F}_n\} = E\{A_{n+1} - A_n | \mathcal{F}_n\}.$

(3) Pour toute martingale discrète bornée $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\forall n \quad E\left\{\sum_{k=0}^{n-1} (Y_{k+1} - Y_k)(A_{k+1} - A_k)\right\} = 0$$

((3) résultant de ce que A_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable).

Inversement, si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus discret ayant les propriétés (1) (2) (3) ci-dessus, on a nécessairement :

$$\forall n \quad A_n = B_n \quad \text{p. s.}$$

En effet, d'après la propriété de martingale de (Y_n) ,

$$E\{Y_n A_n\} = E\left\{\sum_{k=0}^{n-1} Y_{k+1}(A_{k+1} - A_k)\right\}.$$

La relation (3) s'écrit donc :

$$\forall n \quad E\{Y_n A_n\} = E\left\{\sum_{k=0}^{n-1} Y_k(A_{k+1} - A_k)\right\}.$$

D'où, puisque (A_n) et (B_n) satisfont la relation (2),

$$\forall n \quad E\{Y_n A_n\} = E\{Y_n B_n\}.$$

D'où le résultat, puisqu'on peut choisir pour Y_n une variable aléatoire $\mathcal{F}_n$ -mesurable et borné quelconque.

Ceci étant, posons, pour chaque n et t tel que $n \leq t < n+1$, $\hat{A}_t = A_n$ (après avoir modifié les A_n sur un ensemble négligeable, de manière à ce que, $\forall \omega$, $n \rightarrow A_n(\omega)$ soit une suite croissante); $(\hat{A}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus croissant intégrable, satisfaisant aux propriétés suivantes :

(D₀) $\hat{A}_0 = 0$ et $\hat{A}_t$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour tous $t \in \mathbb{R}_+$.

(D₁) Pour $s \in t$, $E\{\hat{X}_t^2 - \hat{X}_s^2 | \hat{\mathcal{F}}_s\} = E\{\hat{A}_t - \hat{A}_s | \hat{\mathcal{F}}_s\}.$

(D₂) Pour toute martingale $(\hat{Y}_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$ associée à une martingale discrète bornée, et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$E\left\{\int_0^t (\hat{Y}_u - \hat{Y}_u^-) d\hat{A}_u\right\} = 0 \quad .$$

Ainsi, à la martingale de carré intégrable $(\hat{X}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, nous avons associé le processus croissant intégrable $(\hat{A}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ vérifiant les deux relations (D_1) et (D_2') , et nous avons montré, qu'à une équivalence près, $(\hat{A}_t)$ est le seul processus croissant (discret) ayant ces propriétés.

Le théorème suivant, démontré par MEYER (cf. [3], page 203, théorème 4) généralise ces résultats au cas d'une martingale de carré intégrable quelconque.

1.3. Le processus croissant naturel associé à une martingale de carré intégrable. — Remarquons d'abord que, si $(X_t)_{a \leq t < b}$ est une martingale standard définie sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il résulte des théorèmes de convergence des surmartingales (cf. [6], page 406) que $\lim_{t \downarrow a} X_t$ existe p. s. ; et, si $X_a = \lim_{t \downarrow a} X_t$, $(X_t)_{a \leq t < b}$ est une martingale sur $[a, b[$. On ne perd donc pas en généralité en supposant X définie sur $[a, b[$ fermé à gauche.

On a alors le théorème de décomposition :

THEOREME 1. — Soit $(X_t)_{a \leq t < b}$ une martingale de carré intégrable définie sur l'intervalle $[a, b[$. Il existe un processus croissant intégrable $\Lambda = (\Lambda_t)_{a \leq t < b}$ et un seul, à une modification près, tel que :

(D_0) $\Lambda_a = 0$ et Λ_t est F_t -mesurable pour tous $t \in [a, b[$.

(D_1) $\forall s \leq t, E\{|X_t - X_s|^2 \mid F_s\} = E\{X_t^2 - X_s^2 \mid F_s\} = E\{\Lambda_t - \Lambda_s \mid F_s\}$.

(D_2) Pour toute martingale standard bornée $(Y_t)_{a \leq t < b}$, et tout $t \in [a, b[$,
 $E\left\{\int_a^t (Y_u - Y_u^-) d\Lambda_u\right\} = 0$.

Le processus $(\Lambda_t)_{t \in [a, b[}$ est appelé processus croissant naturel associé à la martingale $(X_t)_{t \in [a, b[}$.

1.4. Démonstration du théorème 1.

— Unicité de (Λ_t) . — Elle repose sur les deux lemmes suivants qui peuvent être démontrés simplement en approchant (Y_u) et (Y_u^-) par des processus étagés de la forme

$$\sum_i Y_{t_{i+1}} 1_{]t_i, t_{i+1}]}(u) \quad \text{et} \quad \sum_i Y_{t_i} 1_{]t_i, t_{i+1}]}(u) \quad ,$$

et en utilisant la propriété de martingale de (Y_u) :

LEMME 1. - Soient $(A_t)_{a \leq t < b}$ un processus croissant intégrable, et $(Y_t)_{a \leq t < b}$ une martingale standard bornée. Alors, pour tout $t \in [a, b[$,

$$E\{Y_t A_t\} - E\{Y_a A_a\} = E\left\{\int_a^t Y_u dA_u\right\}.$$

LEMME 2. - Si $A = (A_t)$ et $B = (B_t)$ sont deux processus croissants intégrables tels que

$$\forall s \leq t \quad E\{A_t - A_s \mid F_s\} = E\{B_t - B_s \mid F_s\},$$

alors, pour toute martingale standard bornée $(Y_u)_{a \leq u < b}$, et tout $t \in [a, b[$,

$$E\left\{\int_a^t Y_u dA_u\right\} = E\left\{\int_a^t Y_u dB_u\right\}.$$

Si alors, A et B sont des processus croissants intégrables, vérifiant (D_0) , (D_1) , (D_2) , il résulte des lemmes 1 et 2 que

$$E\{Y_t A_t\} = E\{Y_t B_t\} \quad \text{pour tout } t \in [a, b[$$

et toute martingale standard bornée $(Y_t)_{a \leq t < b}$. On en déduit que $A_t = B_t$ p. s., puisque Y_t peut être prise égale à une variable aléatoire bornée F_t -mesurable quelconque, d'où l'unicité.

- Existence de (A_t) . - Elle résulte (cf. [3], page 203, théorème 4) du théorème de décomposition d'un potentiel standard de classe (D) (cf. [7], page 11-04, et [3], page 196) :

a. En vertu de l'unicité, il suffit de montrer l'existence sur un intervalle compact $[a, c] \subset [a, b[$.

b. Soit $(\hat{X}_t)_{a \leq t \leq c}$ une version standard (cf. appendice 1) de la martingale $(X_t)_{a \leq t \leq c}$, et $(Z_t)_{a \leq t \leq c}$ une version standard du processus $(E\{\hat{X}_c^{-2} \mid F_t\} - \hat{X}_t^2)_{a \leq t \leq c}$. En utilisant la propriété forte de martingale (cf. appendice 2) on vérifie que (Z_t) est un potentiel de classe (D).

c. Il existe alors un processus croissant intégrable $(A_t)_{a \leq t \leq c}$ tel que, pour tout $t \in [a, c]$,

$$Z_t = E\{A_c \mid F_t\} - A_t \quad \text{p. s.}, \quad \text{et} \quad E\left\{\int_a^t (Y_u - Y_u^-) dA_u\right\} = 0$$

pour toute martingale standard bornée $(Y_u)_{a \leq u < b}$ (cf. [7], page 11-13, théorème 4). On a alors, si $a \leq s \leq t < c$:

$$\begin{aligned} E\{X_t^2 - X_s^2 \mid F_s\} &= E\{\hat{X}_c^2 - \hat{X}_s^2 \mid F_s\} - E\{E\{\hat{X}_c^2 - \hat{X}_t^2 \mid F_t\} \mid F_s\} \\ &= Z_s - E\{Z_t \mid F_s\} \\ &= E\{A_c - A_s \mid F_s\} - E\{E\{A_c - A_t \mid F_t\} \mid F_s\} \\ &= E\{A_t - A_s \mid F_s\} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

d. Enfin, la relation $E\{(X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\} = E\{X_t^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s\}$ résulte de la propriété de martingale de (X_t) .

1.6. - Propriété (D_1) forte.

PROPOSITION 1. - Soient $X = (X_t)_{a \leq t < b}$ une martingale standard de carré intégrable, et $A = (A_t)_{a \leq t < b}$ le processus croissant naturel associé. Si S et T sont deux temps d'arrêt bornés sur $[a, b[$ tels que $S \leq T$, on a :

$$(D_1 \text{ F}) \quad E\{|X_T - X_S|^2 \mid \mathcal{F}_S\} = E\{X_T^2 - X_S^2 \mid \mathcal{F}_S\} = E\{A_T - A_S \mid \mathcal{F}_S\}.$$

Il suffit de remarquer que la propriété (D_1) entraîne que le processus, $(X_t^2 - A_t)_{t \in [a, b[}$ est une martingale standard, et d'appliquer la propriété forte de martingale (cf. appendice 2).

2. Martingales de carré intégrable quasi continues à gauche.

Nous allons étudier, dans ce paragraphe, les martingales de carré intégrable pour lesquelles le processus croissant naturel a p. s. ses trajectoires continues.

2.1. DÉFINITION 1. - On dit qu'une martingale standard $(X_t)_{a \leq t < b}$ est quasi continue à gauche, si, pour toute suite (T_n) de temps d'arrêt sur $[a, b[$ croissant p. s. vers un temps d'arrêt borné T , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_T \text{ p. s.}$$

on a alors le théorème suivant :

2.2. THÉORÈME 2. - Soient $X = (X_t)_{a \leq t < b}$ une martingale standard de carré intégrable. Pour que le processus croissant naturel A associé à X ait ses trajectoires p. s. continues, il faut et il suffit que X soit quasi continue à gauche.

La condition est nécessaire : supposons A continu ; et soit (T_n) une suite de temps d'arrêt croissant vers le temps d'arrêt borné T ; d'après la proposition 1,

$$E\{|X_T - X_{T_n}|^2\} = E\{A_T - A_{T_n}\} ;$$

d'où le résultat, puisque pour toute sous-suite (T_{n_k}) de (T_n) ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_{T_{n_k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n}.$$

Pour montrer que la condition est suffisante, il suffit de montrer que le potentiel $(Z_t)_{a \leq t \leq c}$ ($c < b$) introduit en 1.4 est régulier, si X est quasi continue à gauche (cf. [7], page 11-09, théorème 3, et [3], page 200, théorème 3). Or, si (T_n) est une suite de temps d'arrêt sur $[a, c]$ croissant vers T , on a, d'après la propriété forte de martingale,

$$E\{Z_T - Z_{T_n}\} = E\{\hat{X}_T^2 - \hat{X}_{T_n}^2\} \quad .$$

D'où le résultat, puisque la sous-martingale discrète positive $(\hat{X}_{T_n}^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.

COROLLAIRE 1. - Si la martingale X a ses trajectoires presque sûrement continues, il en est de même du processus croissant naturel associé.

2.3. - Cas où la famille $(F_t)_{a \leq t \leq b}$ n'a pas de temps de discontinuité. Rappelons (cf. [7], page 11-16, et [4], § 2, défin. on 6) qu'un temps d'arrêt T sur $[a, b[$ est appelé temps de discontinuité de la famille $(F_t)_{a \leq t \leq b}$, s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt croissant vers T telle que $F_T \neq \sigma(\bigcup_n F_{T_n})$ ⁽²⁾

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 2. - Pour que la famille $(F_t)_{a \leq t \leq b}$ de sous-tribus de F n'ait pas de temps de discontinuité, il faut et il suffit que toute martingale standard $(X_t)_{a \leq t \leq b}$ sur $[a, b[$ soit quasi-continue à gauche.

La proposition résulte des deux lemmes suivants :

LEMME 3. - Pour que la famille $(F_t)_{a \leq t \leq b}$ n'ait pas de temps de discontinuité, il suffit qu'elle n'ait pas de temps de discontinuité borné.

En effet, soit $b_n = b - \frac{1}{n}$, et soit T_k une suite de temps d'arrêt sur $[a, b[$ croissant vers un temps d'arrêt T sur $[a, b[$. On a

$$F_T = \sigma\left(\bigcup_n F_{T \wedge b_n}\right) \quad ,$$

car, si $A \in F_T$, $A \cap [T \leq b_n] \in F_{T \wedge b_n}$ pour tout n ; d'où

$$F_T = \sigma\left(\bigcup_n F_{T \wedge b_n}\right) = \sigma\left(\bigcup_n \sigma(F_{T_k \wedge b_n})\right)$$

⁽²⁾ où $\sigma(\alpha)$ désigne la tribu engendrée par l'ensemble α de parties de Ω .

puisque, $T \wedge b_n$ étant borné, on a $F_{T \wedge b_n} = \sigma(\bigcup_k F_{T_k \wedge b_n})$ par hypothèse ; d'où

$$F_T = \sigma(\bigcup_n \bigcup_k F_{T_k \wedge b_n}) = \sigma(\bigcup_k F_{T_k})$$

C. Q. F. D.

LEMME 4. - Soit (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt sur (a, c) croissant vers T . Pour que $F_T = \sigma(\bigcup_n F_{T_n})$, il faut et il suffit que, pour toute martingale standard $(X_t)_{a \leq t \leq c}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_T \text{ p. s.}$$

La condition est nécessaire, car, d'après la propriété forte de martingale, $E\{X_T | F_{T_n}\} = X_{T_n}$ p. s. ; d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_T | F_{T_n}\} = E\{X_T | \sigma(\bigcup_n F_{T_n})\} = X_T \text{ p. s.}$$

Inversement, supposons que $F_T \neq \sigma(\bigcup_n F_{T_n})$; soit M un élément de F_T n'appartenant pas à $\sigma(\bigcup_n F_{T_n})$, et $(X_t)_{a \leq t \leq c}$ une version standard (appendice 1) de la martingale $(E\{1_M | F_t\})_{a \leq t \leq c}$. D'après la propriété forte de martingale, on a $X_T = 1_M$ p. s. ; on ne peut donc avoir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_T \text{ p. s.}$$

C. Q. F. D.

3. Exemples.

3.1. Processus à accroissements indépendants. - Soit $\xi = (\xi_t)_{a \leq t < b}$ un processus ayant les propriétés suivantes ⁽³⁾ :

- (1) ξ est standard, bien adapté et de carré intégrable.
- (2) $\forall s, t, E\{\xi_t\} = E\{\xi_s\}$.
- (3) $\forall s \leq t, \xi_t - \xi_s$ est indépendant de F_s .

Alors, si $X_t = \xi_t - \xi_a$, $X = (X_t)_{a \leq t < b}$ est une martingale de carré intégrable, et le processus croissant naturel associé à toutes ses trajectoires identiques à la fonction $t \rightarrow E\{X_t^2\}$.

⁽³⁾ On suppose toujours donnée une famille $(F_t)_{t \in (a, b)}$ de sous-tribus de F ayant les propriétés T_1, T_2, T_3 introduites en 0.1.

En effet : d'abord (X_t) est une martingale et on a :

$$E\{(X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s\} = E\{(X_t - X_s)^2\} = E\{X_t^2\} - E\{X_s^2\} \quad \text{si } s \leq t.$$

Soit a la fonction $t \rightarrow E\{X_t^2\}$; a est croissante d'après la relation précédente, et continue à droite puisque (X_t^2) est une sous-martingale standard ≥ 0 (donc uniformément intégrable).

D'autre part, soit (Y_u) une martingale standard bornée ; on a

$$E\left\{\int_a^t Y_u \, da(u)\right\} = E\left\{\int_a^t Y_u^- \, da(u)\right\} \quad \text{pour tout } t \in [a, b],$$

comme on le voit en approchant Y_u et Y_u^- par les processus étagés

$$\sum_i Y_{t_{i+1}^-} 1_{[t_i, t_{i+1})}(u) \quad \text{et} \quad \sum_i Y_{t_i} 1_{[t_i, t_{i+1})}(u)$$

respectivement.

La dernière partie de la démonstration précédente montre que la relation (D_2) (cf. 1.3) est toujours satisfaite par un processus croissant ayant toutes ses trajectoires identiques (cas envisagé par DOOB, cf. [1], page 437).

Cas particuliers :

1° Mouvement brownien (cf. n° 1.1).

2° Processus de Poisson. Soit $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le processus de Poisson (cf. [1], page 98). On a

$$E\{\theta_t - \theta_s\} = t - s, \quad \text{et} \quad E\{(\theta_t - \theta_s - (t - s))^2\} = t - s;$$

les conditions (1), (2), (3) sont satisfaites en prenant $\xi_t = \theta_t - t$.

On notera que la martingale ainsi associée au processus de Poisson, et celle associée au mouvement brownien admettent le même processus croissant naturel continu ; pourtant, presque toutes les trajectoires de la première admettent des discontinuités tandis que celles de la deuxième sont continues.

Remarque. - Au début de ce numéro, on a supposé la famille de sous-tribus $(\mathcal{F}_t)$ donnée, avec les propriétés (T_1) , (T_2) , (T_3) . Par contre, dans le cas particulier des martingales associées au mouvement brownien et au processus de Poisson, la famille $(\mathcal{F}_t)$ est canoniquement construite à partir de ces processus, en prenant pour $\mathcal{F}_t$ la plus petite tribu contenant les ensembles P -négligeables de P et rendant mesurables les ξ_s , $s \leq t$. La propriété (T_2) résulte alors du fait que les martingales considérées sont aussi des processus de Markov, et du résultat correspondant pour ces derniers (cf. n° 3.2 ci-après).

3.2. Le cas markovien. - Soient E un espace compact métrisable $\{P_t\}$ un semi-groupe fortement continu et markovien de transformations de $C(E)$, et

$$\xi = \{\Omega, F, (\xi_t)_{t \in R_+}, (P_x)_{x \in E}, (\theta_t)_{t \in R_+}\}$$

le processus de Markov stationnaire canonique admettant $\{P_t\}$ comme fonction de transition (cf. [6], page 5-04, et [7], p. 6-06).

Pour toute probabilité μ sur $(E, \mathcal{G}_E)$ et tout $t \in R_+$, soit F_t^μ la plus petite tribu sur Ω contenant les ensembles p_μ négligeables et rendant mesurables les ξ_s ; $s \leq t$. On peut montrer (cf. [6], p. 5-05, et [4], § 4, théorème 10) que la famille $(F_t^\mu)_{t \in R_+}$ satisfait la propriété (T_2) (cf. n° 0.1), et n'a pas de temps de discontinuité.

Soient alors h une fonction de $C(E)$ telle que $P_t h = h$ pour tout t ("fonction harmonique"), et X le processus $(h \circ \xi_t)_{t \in R_+}$.

X est une martingale standard de carré intégrable (X est même bornée), et le processus croissant naturel $A = (A_t)_{t \in R_+}$ associé à X est la fonctionnelle additive de classe (U) (cf. [5], p. 58⁺, définition 3.2, et p. 62, théorème 3.4) du processus de Markov ξ associée au potentiel de classe (D) provenant de la décomposition de Riesz de la fonction excessive $-h^2$.

En effet, cette décomposition s'écrit $-h^2 = u + v$, où $u = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_t h^2$; et on a, pour tout t ,

$$P_t u = u \text{ et } P_t v \leq v, \quad \lim_{t \downarrow 0} P_t v = v, \text{ et } \lim_{t \uparrow +\infty} P_t v = 0;$$

ces trois dernières relations expriment que v est un potentiel; ce potentiel est en outre de classe (D), puisque borné. $A = (A_t)_{t \in R_+}$ étant la fonctionnelle additive de classe (U) associée à v , (cf. [5], page 62, théorème 3.4), on a, par définition :

$$v \circ \xi_t = E_\mu \{A_\infty | F_t^\mu\} - At \quad P_\mu \text{ p. s.}$$

d'où

$$E_\mu \{v \circ \xi_s - v \circ \xi_t | F_s^\mu\} = E_\mu \{A_t - A_s | F_s^\mu\}, \text{ si } s \leq t;$$

ou encore,

$$(D_1) \quad E_\mu \{X_t^2 - X_s^2 | F_s^\mu\} = E_\mu \{A_t - A_s | F_s^\mu\} \quad (s \leq t),$$

puisque

$$E_\mu \{u \circ \xi_t | F_s^\mu\} = P_{t-s} u \circ \xi_s = u \circ \xi_s \quad P_\mu \text{ p. s.}$$

Enfin d'une part le fait que A est de classe (U) entraîne que $A_T = A_T^- p_\mu$ p. s. pour tout temps d'arrêt T totalement inaccessible (cf. [4], § 4, théorème 10, (2), et § 2, définition 5) ; d'autre part, cette dernière condition entraîne (D_2) (cf. [4], § 2, théorème 7, et [7], p. 11-19, théorème 6), compte tenu du fait que la famille (F_t^μ) n'a pas de temps de discontinuité.

4. Martingales généralisées.

Les notions introduites dans ce numéro seront utilisées, dans l'exposé suivant de ce séminaire, pour l'étude des intégrales stochastiques.

4.1. - A titre introductif, considérons un mouvement brownien réel $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ défini sur E ($\xi_0 = 0$). Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, soit F_t la plus petite tribu sur Ω contenant les ensembles P -négligeables et rendant mesurables les variables aléatoires $\xi_u - \xi_v$ où $v \leq u \leq t$. La famille $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ainsi définie a les propriétés (T_1) , (T_2) , (T_3) (cf. 0.1), et le processus $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ a les propriétés suivantes :

a. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\xi_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, F, P)$.

b. Pour tous $s \leq t$, $\xi_t - \xi_s$ est F_s -mesurable, et

$$E\{\xi_t - \xi_s | F_s\} = 0.$$

c. Pour tous $s \leq t$,

$$E\{|\xi_t - \xi_s|^2 | F_s\} = t - s \text{ p. s.}$$

4.2. - Le n° 4.1 introduit la définition suivante :

DÉFINITION 1. - Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; une martingale généralisée définie sur I est un processus $(X_t)_{t \in I}$ intégrable (cf. 0.3) tel que :

(G) $\forall s \leq t$, ($s, t \in I$), $X_t - X_s$ est F_s -mesurable et $E\{X_t - X_s | F_s\} = 0$.

Si $t_0 \in I$, le processus $(X_t - X_{t_0})_{t \in I, t \geq t_0}$ est une martingale ; en effet on

a, si $t_0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned} E\{X_t - X_{t_0} | F_s\} &= E\{X_t - X_s | F_s\} + E\{X_s - X_{t_0} | F_s\} \\ &= X_s - X_{t_0} \text{ p. s. d'après (G) } . \end{aligned}$$

Il en résulte, compte tenu de l'appendice 1, que toute martingale généralisée admet une version standard.

Toute martingale sur I est une martingale généralisée sur I ; mais, ainsi que le montre l'exemple du mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ (cf. n° 4.1), la réciproque est inexacte si I est ouvert à gauche.

4.3. Décomposition des martingales généralisées de carré intégrable. - Le théorème 1 (n° 1.3) admet la généralisation suivante :

THÉOREME 3. - Soient $(X_t)_{a < t < b}$ une martingale généralisée de carré intégrable définie sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[$, et $t_0 \in]a, b[$. Il existe un processus croissant intégrable $A = (A_t)_{a < t < b}$ et un seul, à une modification près, tel que :

(D'_0) $A_{t_0} = 0$ et pour tous $s \leq t$, $(s, t \in]a, b[)$, $A_t - A_s$ est F_t -mesurable.

(D'_1) Pour tous $s \leq t$, $(s, t \in]a, b[)$

$$E\{|X_t - X_s|^2 \mid F_s\} = E\{A_t - A_s \mid F_s\} \quad .$$

(D'_3) Pour toute martingale standard bornée $(Y_t)_{c \leq t \leq d}$ (où $a < c < d < b$),

$$E\left\{\int_c^d (Y_t - \bar{Y}_t) dA_t\right\} = 0 \quad .$$

Le processus $(A_t)_{a < t < b}$ est appelé processus croissant naturel normalisé en t_0 associé à la martingale généralisée $(X_t)_{a < t < b}$. La démonstration de ce théorème à partir du théorème 1, ainsi que celles des énoncés généralisant la proposition 1 (n° 1.6) et le théorème 2 (n° 2.1) sont laissés au lecteur.

Appendice 1 : Version standard d'une martingale.

THÉOREME. - Soit $Y = (Y_t)_{t \in I}$ un processus ⁽⁴⁾ défini sur l'intervalle I tel que :

(1) Y est bien adapté et intégrable.

(2) $\forall s \leq t$, $E\{Y_t \mid F_s\} \leq Y_s$.

(3) La fonction $t \rightarrow E\{Y_t\}$ est continue à droite en tout point de I .

Alors, Y admet une version standard.

⁽⁴⁾ Conformément à la convention générale (cf. 0.1), la famille (F_t) a les propriétés (T_1) , (T_2) , (T_3) .

COROLLAIRE. - Toute martingale admet une version standard.

Appendice 2 : La propriété forte de martingale ⁽⁵⁾.

THÉOREME. - Soit $X = (X_t)_{a \leq t \leq b}$ une martingale standard définie sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

(1) Si T est un temps d'arrêt sur $[a, b]$, X_T est F_T -mesurable et intégrable.

(2) Si S et T sont des temps d'arrêt sur $[a, b]$ tels que $S \leq T$, on a $E[X_T | F_S] = X_S$ p. s.

(3) Si, de plus, X est de carré intégrable, alors X_T est de carré intégrable pour tout temps d'arrêt T .

COROLLAIRE. - Si X est une martingale standard sur l'intervalle fermé $[a, b]$, l'ensemble des X_T , où T décrit l'ensemble des temps d'arrêt sur $[a, b]$, est uniformément intégrable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DOOB (J. L.). - Stochastic processes. - New York, J. Wiley and Sons, 1953 (Wiley Publications in Statistics).
- [2] ITO (Kiyoshi). - Lectures on stochastic processes. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1961 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 24).
- [3] MEYER (Paul-André). - A decomposition theorem for supermartingales, Illinois J. of Math., t. 6, 1962, p. 193-205.
- [4] MEYER (Paul-André). - A decomposition theorem for supermartingales, II : Uniqueness theorem, Illinois J. of Math. (à paraître).
- [5] MEYER (Paul-André). - Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 125-230 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).
- [6] Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 5, 1960/61. - Paris, Secrétariat mathématique, 1961.
- [7] Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 6, 1962. - Paris, Secrétariat mathématique, 1962.

⁽⁵⁾ cf. [6], page 4-08.