

# SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

GABRIEL MOKOBODZKI

## Sur des mesures qui définissent des graphes d'applications

*Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel*, tome 6, n° 2 (1961-1962),  
exp. n° 13, p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=SB CD\\_1961-1962\\_\\_6\\_2\\_A8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB CD_1961-1962__6_2_A8_0)

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR DES MESURES QUI DÉFINISSENT DES GRAPHES D'APPLICATIONS

par Gabriel MOKOBODZKI

1. Préliminaires.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  ; soient  $A$  et  $B$  deux ensembles convexes non vides de  $E$  et  $F$  respectivement, et soit  $f$  une application affine de  $A$  dans  $B$  .

Soit alors  $y \in A$  .

PROPOSITION 1. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est injective dans la facette de  $y$  ;
2.  $y$  est extrémal dans l'ensemble convexe  $f^{-1}(f(y))$  .

Démonstration. - (1)  $\Rightarrow$  (2) est évident, car la facette de  $y$  par rapport à  $f^{-1}(f(y))$  est contenue dans la facette de  $y$  par rapport à  $A$  .

(2)  $\Rightarrow$  (1) se déduit du lemme suivant :

LEMME. - Si  $y$  est extrémal dans  $f^{-1}(f(y))$  et si  $y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$ , ( $y_1, y_2 \in A$  ;  $y_1 \neq y_2$  ;  $0 < \lambda < 1$ ) alors  $y_1$  est extrémal dans  $f^{-1}(f(y_1))$  .

Soient alors  $y_1, y_2$  dans la facette de  $y$ , et supposons que  $f(y_1) = f(y_2) = z$  .

Soit  $y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$  ;  $y_3$  est dans la facette de  $y$ , et comme  $f$  est affine,

$$f(y_3) = z \quad .$$

Mais  $y_3$  est extrémal dans  $f^{-1}(z)$ , par suite

$$y_3 = y_1 = y_2 \quad .$$

Autre forme (équivalente) de la proposition précédente. - Soient toujours  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$ ,  $C_1$  et  $C_2$  deux cônes convexes pointés de  $E$  et  $F$  respectivement, et soit  $f$  une application positivement linéaire

de  $C_1$  dans  $C_2$  .

Soit alors  $y \in C_1$  , tel que  $f(y) \neq 0$  .

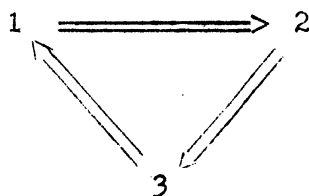
PROPOSITION 2. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est injective dans le cône convexe pointé engendré par  $(y - C_1) \cap C_1$  (ce cône est la facette de  $y$  dans  $C_1$  ) .

2.  $y$  définit une arête extrême du cône convexe pointé engendré par  $f^{-1}(f(y))$  .

3.  $y$  est extrême dans l'ensemble convexe  $f^{-1}(f(y))$  .

La proposition se démontre suivant le schéma



## 2. Étude des mesures extrémales.

Soient  $Z$  et  $X$  deux espaces compacts,  $\varphi$  une application continue de  $Z$  dans  $X$  , qui se prolonge en une application linéaire vaguement continue de  $\mathcal{M}^+(Z)$  dans  $\mathcal{M}^+(X)$  définie par

$$\int f d(\varphi(\sigma)) = \int (f \circ \varphi) d\sigma$$

où  $f \in \mathcal{C}(X)$  et  $\sigma \in \mathcal{M}^+(Z)$  .

Posons  $\nu = \varphi(\sigma)$  .

LEMME 1. - Pour que  $f$  , fonction numérique sur  $X$  , soit  $\nu$ -intégrable, il faut et il suffit que  $f \circ \varphi$  soit  $\sigma$ -intégrable.

Désignons par  $M_\sigma$  et  $M_\nu$  respectivement les ensembles

$$M_\sigma = \{\sigma' ; \sigma' \in \mathcal{M}^+(Z) ; \sigma' \leq \sigma\} ; \quad M_\nu = \{\nu' ; \nu' \in \mathcal{M}^+(X) ; \nu' \leq \nu\} .$$

PROPOSITION 1. - Pour toute  $\sigma \in \mathcal{M}^+(Z)$ ,  $\varphi$  est une surjection de  $M_\sigma$  sur  $M_{\varphi(\sigma)} = M_\nu$ .

Démonstration. - Il existe une application affine  $\psi$  de  $M_\nu$  dans  $M_\sigma$  telle que

$$\varphi \circ \psi = \text{identité de } M_\nu \quad .$$

Définissons  $\psi$ . Soit  $0 \leq \nu' \leq \nu$ . Alors

$$\nu' = f \cdot \nu$$

où  $f$  est  $\nu$ -intégrable et  $0 \leq f \leq 1$ .

Posons alors

$$\psi(\nu') = (f \circ \varphi) \cdot \sigma \quad .$$

Il est clair que  $\psi(\nu')$  ne dépend que de  $\nu'$  et que

$$\varphi \circ \psi(\nu') = \nu' \quad .$$

Nous allons maintenant utiliser les résultats préliminaires, en remarquant que  $\varphi$  est aussi une application affine de  $\mathcal{M}^1(Z)$  dans  $\mathcal{M}^1(X)$ .

PROPOSITION 2. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\varphi$  est une bijection de  $M_\sigma$  sur  $M_\nu$  ( $\psi$  est alors l'application inverse).
2.  $\sigma$  est point extrémal dans l'ensemble convexe (compact)  $\varphi^{-1}(\varphi(\sigma))$ .

La proposition est une application directe de la proposition 2 des préliminaires et de la proposition 1 ci-dessus.

DÉFINITION. - Nous dirons que  $\sigma \in \mathcal{M}^+(Z)$  est  $\varphi$ -extrémale (ou simplement extrémale, s'il n'y a pas de confusion possible) si les conditions équivalentes de la proposition précédente sont vérifiées.

COROLLAIRE. - Si  $\sigma$  est extrémale et si  $0 \leq \sigma' \leq \sigma$  alors  $\sigma'$  l'est aussi.

PROPOSITION 3. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

A.  $\sigma$  est extrémale ( $\sigma \in \mathcal{M}^+(Z)$ ) .

B. Pour toute  $f \geq 0$  ,  $\sigma$ -intégrable sur  $Z$  , et tout  $\varepsilon > 0$  , il existe un compact  $K \subset Z$  tel que

1.  $\sigma(K) \geq (1 - \varepsilon) \sigma(Z)$  ;
2.  $f|_K$  continue dans  $K$  .
3.  $[(x, y) \in K, (\varphi(x) = \varphi(y))] \implies (f(x) = f(y))$  .

Si ces conditions sont vérifiées, il existe une fonction numérique unique  $g$  définie et continue dans  $\varphi(K)$  et telle que

$$g \circ \varphi(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in K \quad .$$

Démonstration. - On peut toujours se ramener au cas où  $0 \leq f \leq 1$  .

1, (A)  $\implies$  (B).

Soit

$$\nu' = \varphi(f \cdot \sigma)$$

et soit  $f'$   $\nu'$ -intégrable,  $0 \leq f' \leq 1$  , telle que

$$\nu' = f' \cdot \nu = \varphi(f \cdot \sigma) \quad .$$

L'application  $\varphi$  étant une bijection, on a

$$(f' \circ \varphi) \cdot \sigma = f \cdot \sigma \quad .$$

Par suite  $f = f' \circ \varphi$  ,  $\sigma$ -p. p. sur  $Z$  .

Soit alors  $K_1$  un compact de  $Z$  tel que  $\sigma(K_1) > \sigma(Z)(1 - \varepsilon)$  et tel que les restrictions de  $f$  et  $f' \circ \varphi$  soient continues dans  $K_1$  .

Soit  $K$  le support de  $\sigma|_{K_1} = \sigma'$  ;  $\sigma(K) = \sigma(K_1)$  . Alors  $f$  et  $f' \circ \varphi$  sont continues dans  $K$  et égales  $\sigma'$ -p. p. dans  $K$  , par suite

$$f(z) = f' \circ \varphi(z) \quad \text{pour tout } z \in K \quad .$$

2. (B)  $\Rightarrow$  (A) .

On remarque immédiatement que si  $0 \leq \sigma' \leq \sigma$  et si  $\sigma$  vérifie (B), il en est de même de  $\sigma'$  . On va montrer que (B) entraîne que  $\varphi$  est une injection de  $M_\sigma$  dans  $M_\nu$  .

Nous aurons besoin des lemmes suivants :

LEMME 1. - Soient  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{M}^+(Z)$  ,  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  et  $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2)$  .

Il existe alors  $\sigma_1^i$  et  $\sigma_2^i \in \mathcal{M}^+(Z)$  telles que

a.  $\sigma_1^i \leq \sigma_1$  ;  $\sigma_2^i \leq \sigma_2$  ;  $\sigma_1^i \neq \sigma_2^i$  .

b.  $\varphi(\sigma_1^i) = \varphi(\sigma_2^i)$  .

c. Les supports de  $\sigma_1^i$  et  $\sigma_2^i$  sont contenus dans deux compacts disjoints.

Démonstration. - Soient

$$\mu_1 = \sigma_1 - \inf(\sigma_1, \sigma_2) \quad ,$$

$$\mu_2 = \sigma_2 - \inf(\sigma_1, \sigma_2) \quad ,$$

et soit  $K$  un compact de  $Z$  tel que

$$\mu_2(K) = 0 ; \mu_1(K) \geq \mu_1(Z)(1 - \varepsilon) \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad .$$

Il existe alors  $\mu_2^i \geq 0$  ,  $\mu_2^i \leq \mu_2$  telle que

$$\varphi(\mu_2^i) = \varphi(\mu_1|_K) \quad .$$

Soit maintenant  $H$  un compact de  $Z$  tel que

$$\mu_2^i(H) \geq \mu_2^i(Z)(1 - \alpha) \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad ,$$

et tel que

$$H \cap K = \emptyset \quad .$$

Il existe alors  $\mu_1^i$  ,  $0 \leq \mu_1^i \leq \mu_1|_K$  , telle que

$$\varphi(\mu_1^!) = \varphi(\mu_2^!|_K) \quad .$$

Posons  $\sigma_1^! = \mu_1^!$  et  $\sigma_2^! = \mu_2^!|_K$  .

Les mesures  $\sigma_1^!$  et  $\sigma_2^!$  répondent à la question.

LEMME 2. - De plus, il existe deux points  $x_1$  et  $x_2 \in Z$  tels que  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$   
et

$$x_1 \in S_{\sigma_1^!} ; \quad x_2 \in S_{\sigma_2^!} \quad .$$

Par suite, pour tous voisinages  $V_1$  et  $V_2$  de  $x_1$  et  $x_2$  respectivement, il  
existe  $\sigma_1'' , \sigma_2'' \in \mathbb{M}^+(Z)$  telles que

1.  $0 \leq \sigma_1'' \leq \sigma_1^! , \quad 0 \leq \sigma_2'' \leq \sigma_2^! \quad .$
2.  $S_{\sigma_1''} \subset V_1 ; \quad S_{\sigma_2''} \subset V_2 \quad .$
3.  $\sigma_1'' \neq \sigma_2'' ; \quad \varphi(\sigma_1'') = \varphi(\sigma_2'') \quad .$

Il suffit de prendre  $x$  dans le support de  $\varphi(\sigma_1'')$  , alors  $\varphi^{-1}(x)$  rencontre les supports de  $\sigma_1^!$  et  $\sigma_2^!$  .

Revenons à la démonstration de ((B)  $\implies$  (A)).

Supposons que  $\varphi$  ne soit pas une injection de  $M_\sigma$  dans  $M_\nu$  ,  $\nu = \varphi(\sigma)$  .

Il existerait alors  $\sigma_1 , \sigma_2 \geq 0$  ,

$$\sigma_1 , \sigma_2 < \sigma ; \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 ; \quad \varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = \nu' \quad ,$$

les supports  $K_1$  et  $K_2$  de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  étant disjoints.

Soit  $f$  la fonction caractéristique de  $K_1$  .

D'après B , il existe un compact  $K$  de  $Z$  ;  $K \subset K_1 \cup K_2$  tel que

1.  $\sigma_1(K) \geq \frac{3}{4} \sigma_1(Z) ; \quad \sigma_2(K) \geq \frac{3}{4} \sigma_2(Z) \quad .$

2.  $f|_K$  continue et  $((x, y) \in K)(\varphi(x) = \varphi(y)) \implies (f(x) = f(y))$  .

On a nécessairement

$$\varphi(K_1 \cap K) \cap \varphi(K_2 \cap K) \neq \emptyset \quad .$$

Sinon on aurait, puisque  $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2)$  ,

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \sigma_2(Z) &= \frac{3}{4} \sigma_1(Z) \leq \sigma_1(K \cap K_1) \leq \sigma_2(\varphi^{-1}(\varphi(K \cap K_1))) \\ &\leq \sigma_2(K_2 \cap K) \leq \frac{1}{4} \sigma_2(Z) \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire puisque  $\sigma_2 \neq 0$  . Il existe donc  $x_1 \in K_1 \cap K$  ,  $x_2 \in K_2 \cap K$  tels que

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \quad \text{et} \quad f(x_1) \neq f(x_2) \quad ,$$

contrairement à l'hypothèse (B).

Soit toujours  $\sigma \in \mathfrak{M}^+(Z)$  ,  $\sigma$  extrémale.

COROLLAIRE 1. - Soit  $f_n$  une suite de fonctions numériques  $\sigma$ -mesurables sur  $Z$  .

Pour tout  $\varepsilon > 0$  , il existe un compact  $K \subset Z$  tel que

1. 
$$\sigma(K) \geq (1 - \varepsilon) \sigma(Z) \quad .$$

2. 
$$f_n|_K \text{ continue dans } K \text{ pour tout } n \quad .$$

3. 
$$[(x, y \in K) , (\varphi(x) = \varphi(y))] \implies f_n(x) = f_n(y) , \forall n \quad .$$

COROLLAIRE 2. - Soit  $H$  un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{C}(Z)$  et de type dénombrable.

Il existe alors une suite  $K_n$  de compacts de  $Z$  telle que

1. 
$$\text{Les } \varphi(K_n) \text{ soient deux à deux disjoints} \quad .$$



$$2. \quad \sigma\left(\bigcup_n K_n\right) = \sigma(Z) \quad .$$

3. Soit  $A = \bigcup_n K_n$  . Alors

$$[(x, y) \in A, (\varphi(x) = \varphi(y))] \implies (f(x) = f(y)) \quad \forall f \in H \quad .$$

Supposons que  $Z$  soit de la forme  $Y \times X$  où  $Y$  est un espace compact métrisable et  $\varphi$  la projection canonique de  $Z$  sur  $X$  .

COROLLAIRE 3. - Il existe une suite  $K_n$  de compacts de  $X$  deux à deux dis-  
joints et une application  $\pi$  de  $A = \bigcup_n K_n$  dans  $Y$  telle que, si  $\nu = \varphi(\sigma)$ ,

$$1. \quad \nu\left(\bigcup_n K_n\right) = \nu(X) \quad .$$

2.  $\pi$  est continue dans chaque  $K_n$  .

3. Pour toute  $f \in \mathcal{C}(Y)$ ,

$$\int (f \circ P_Y) d\sigma = \int f \circ \pi d\nu$$

où  $P_Y$  est la projection de  $Z$  sur  $Y$ . Cela résulte du fait que  $\mathcal{C}(Y)$  est  
de type dénombrable.

Soient maintenant  $X$  et  $Y$  deux espaces compacts,  $\nu$  une mesure de Radon sur  $X$ ,  $\pi$  une application de  $X$  dans  $Y$ , telle que, pour toute  $f \in \mathcal{C}(Y)$ ,

$$f \circ \pi \text{ soit } \nu\text{-mesurable} \quad .$$

Soit alors  $g \in \mathcal{C}(Y \times X)$ , alors

$$x \rightarrow g(\pi(x), x) \text{ est } \nu\text{-mesurable sur } X \quad .$$

(Utiliser STONE-WEIERSTRASS.)

On définit ainsi une mesure de Radon  $\sigma$  sur  $Z = Y \times X$  par

$$\int g \, d\sigma = \int g(\pi(x), x) \, d\nu(x), \quad \forall g \in \mathcal{C}(Z) \quad .$$

PROPOSITION 4. - La mesure  $\sigma$  est extrémale pour la projection  $P_X$  de  $Z$  sur  $X$ , et l'on a

$$P_X(\sigma) = \nu \quad .$$


---