Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

GABRIEL MOKOBODZKI

Sur des mesures qui définissent des graphes d'applications

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, nº 2 (1961-1962), exp. nº 13, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_2_A8_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
6e année, 1962, n° 13
Juin 1962

SUR DES MESURES QUI DÉFINISSENT DES GRAPHES D'APPLICATIONS

par Gabriel MOKOBODZKI

1. Préliminaires.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$; soient A et B deux ensembles convexes non vides de E et F respectivement, et soit f une application affine de A dans B.

Soit alors $y \in A$.

PROPOSITION 1. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective dans la facette de y ;

2. y est extrémal dans l'ensemble convexe $f^{-1}(f(y))$.

Démonstration. - (1) $\Rightarrow$ (2) est évident, car la facette de y par rapport à $f^{-1}(f(y))$ est contenue dans la facette de y par rapport à A.

(2) $\Rightarrow$ (1) se déduit du lemme suivant :

LEMME. - Si y est extrémal dans $f^{-1}(f(y))$ et si $y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$, ($y_1$, $y_2 \in A$; $y_1 \neq y_2$; $0 < \lambda < 1$) alors y_1 est extrémal dans $f^{-1}(f(y_1))$.

Soient alors y_1, y_2 dans la facette de y, et supposons que $f(y_1) = f(y_2) = z$.

Soit $y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$; y_3 est dans la facette de y, et comme f est affine,

$$f(y_3) = z \quad .$$

Mais y_3 est extrémal dans $f^{-1}(Z)$, par suite

$$y_3 = y_1 = y_2 \quad .$$

Autre forme (équivalente) de la proposition précédente. - Soient toujours E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, C_1 et C_2 deux cônes convexes pointés de E et F respectivement, et soit f une application positivement linéaire de C_1 dans C_2 .

Soit alors $y \in C_1$,tel que $f(y) \neq 0$.

PROPOSITION 2. - *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

1. f *est injective dans le cône convexe pointé engendré par* $(y - C_1) \cap C_1$ *(ce cône est la facette de* y *dans* C_1 *).*

2. y *définit une arête extrémale du cône convexe pointé engendré par* $f^{-1}(f(y))$.

3. y *est extrémal dans l'ensemble convexe* $f^{-1}(f(y))$.

La proposition se démontre suivant le schéma

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, Rightarrow] & & 2 \arrow[dl, Rightarrow] \\ & 3 \arrow[ul, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

2. *Étude des mesures extrémales.*

Soient Z et X deux espaces compacts, φ une application continue de Z dans X , qui se prolonge en une application linéaire vaguement continue de $\mathfrak{M}^+(Z)$ dans $\mathfrak{M}^+(X)$ définie par

$$\int f \, d(\varphi(\sigma)) = \int (f \circ \varphi) \, d\sigma$$

où $f \in \mathcal{C}(X)$ et $\sigma \in \mathfrak{M}^+(Z)$.

Posons $\nu = \varphi(\sigma)$.

LEMME 1. - *Pour que* f , *fonction numérique sur* X , *soit* ν-*intégrable, il faut et il suffit que* $f \circ \varphi$ *soit* σ-*intégrable.*

Désignons par M_σ et M_ν respectivement les ensembles

$$M_\sigma = \{\sigma' \ ; \ \sigma' \in \mathfrak{M}^+(Z) \ ; \ \sigma' \leq \sigma\} \ ; \qquad M_\nu = \{\nu' \ ; \ \nu' \in \mathfrak{M}^+(X) \ ; \ \nu' \leq \nu\} \ .$$

PROPOSITION 1. - Pour toute $\sigma \in \mathfrak{M}^+(Z)$, φ est une surjection de M_σ sur $M_{\varphi(\sigma)} = M_\nu$.

Démonstration. - Il existe une application affine ψ de M_ν dans M_σ telle que

$$\varphi \circ \psi = \text{identité de } M_\nu \quad .$$

Définissons ψ . Soit $0 \leqslant \nu' \leqslant \nu$. Alors

$$\nu' = f.\nu$$

où f est ν-intégrable et $0 \leqslant f \leqslant 1$.

Posons alors

$$\psi(\nu') = (f \circ \varphi).\sigma \quad .$$

Il est clair que $\psi(\nu')$ ne dépend que de ν' et que

$$\varphi \circ \psi(\nu') = \nu' \quad .$$

Nous allons maintenant utiliser les résultats préliminaires, en remarquant que φ est aussi une application affine de $\mathfrak{M}^1(Z)$ dans $\mathfrak{M}^1(X)$.

PROPOSITION 2. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. φ est une bijection de M_σ sur M_ν (ψ est alors l'application inverse).

2. σ est point extrémal dans l'ensemble convexe (compact) $\varphi^{-1}(\varphi(\sigma))$.

La proposition est une application directe de la proposition 2 des préliminaires et de la proposition 1 ci-dessus.

DÉFINITION. - Nous dirons que $\sigma \in \mathfrak{M}^+(Z)$ est φ-extrémale (ou simplement extrémale, s'il n'y a pas de confusion possible) si les conditions équivalentes de la proposition précédente sont vérifiées.

COROLLAIRE. - Si σ est extrémale et si $0 \leqslant \sigma' \leqslant \sigma$ alors σ' l'est aussi.

PROPOSITION 3. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

A. σ <u>est extrémale</u> $(\sigma \in \mathfrak{M}^+(Z))$.

B. <u>Pour toute</u> $f \geq 0$, <u>σ-intégrable sur</u> Z , <u>et tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un compact</u> $K \subset Z$ <u>tel que</u>

1. $\sigma(K) \geq (1 - \varepsilon)\ \sigma(Z)$;
2. $f|_K$ <u>continue dans</u> K .
3. $[((x , y) \in K) , (\varphi(x) = \varphi(y))] \Longrightarrow (f(x) = f(y))$.

Si ces conditions sont vérifiées, il existe une fonction numérique unique g définie et continue dans $\varphi(K)$ et telle que

$$g \circ \varphi(x) = f(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in K \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - On peut toujours se ramener au cas où $0 \leq f \leq 1$.

1, (A) $\Longrightarrow$ (B).

Soit

$$\nu' = \varphi(f.\sigma)$$

et soit f' ν-intégrable, $0 \leq f' \leq 1$, telle que

$$\nu' = f'.\nu = \varphi(f.\sigma) \quad .$$

L'application φ étant une bijection, on a

$$(f' \circ \varphi).\sigma = f.\sigma \quad .$$

Par suite $f = f' \circ \varphi$, σ - p. p. sur Z .

Soit alors K_1 un compact de Z tel que $\sigma(K_1) > \sigma(Z)(1 - \varepsilon)$ et tel que les restrictions de f et $f' \circ \varphi$ soient continues dans K_1 .

Soit K le support de $\sigma_{|K_1} = \sigma'$; $\sigma(K) = \sigma(K_1)$. Alors f et $f' \circ \varphi$ sont continues dans K et égales σ' - p. p. dans K , par suite

$$f(z) = f' \circ \varphi(z) \quad \text{pour tout} \quad z \in K \quad .$$

2. (B) $\Longrightarrow$ (A) .

On remarque immédiatement que si $0 \leqslant \sigma' \leqslant \sigma$ et si σ vérifie (B), il en est de même de σ' . On va montrer que (B) entraîne que φ est une injection de M_σ dans M_ν .

Nous aurons besoin des lemmes suivants :

LEMME 1. - Soient $\sigma_1 , \sigma_2 \in \mathfrak{M}^+(Z)$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ et $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2)$. Il existe alors σ_1' et $\sigma_2' \in \mathfrak{M}^+(Z)$ telles que

a. $\sigma_1' \leqslant \sigma_1$; $\sigma_2' \leqslant \sigma_2$; $\sigma_1' \neq \sigma_2'$.

b. $\varphi(\sigma_1') = \varphi(\sigma_2')$.

c. Les supports de σ_1' et σ_2' sont contenus dans deux compacts disjoints.

Démonstration. - Soient

$$\mu_1 = \sigma_1 - \inf(\sigma_1 , \sigma_2) \qquad ,$$

$$\mu_2 = \sigma_2 - \inf(\sigma_1 , \sigma_2) \qquad ,$$

et soit K un compact de Z tel que

$$\mu_2(K) = 0 \; ; \quad \mu_1(K) \geqslant \mu_1(Z)(1 - \varepsilon) \qquad (0 < \varepsilon < 1) \qquad .$$

Il existe alors $\mu_2' \geqslant 0$, $\mu_2' \leqslant \mu_2$ telle que

$$\varphi(\mu_2') = \varphi(\mu_1|_K) \qquad .$$

Soit maintenant H un compact de Z tel que

$$\mu_2'(H) \geqslant \mu_2'(Z)(1 - \alpha) \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \qquad ,$$

et tel que

$$H \cap K = \emptyset \qquad .$$

Il existe alors μ_1' , $0 \leqslant \mu_1' \leqslant \mu_1|_K$, telle que

$$\varphi(\mu_1') = \varphi(\mu_2'|_K) \quad .$$

Posons $\sigma_1' = \mu_1'$ et $\sigma_2' = \mu_2'|_K$.

Les mesures σ_1' et σ_2' répondent à la question.

LEMME 2. - <u>De plus, il existe deux points</u> x_1 <u>et</u> $x_2 \in Z$ <u>tels que</u> $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ <u>et</u>

$$x_1 \in S_{\sigma_1'} \; ; \qquad x_2 \in S_{\sigma_2'} \quad .$$

<u>Par suite, pour tous voisinages</u> V_1 <u>et</u> V_2 <u>de</u> x_1 <u>et</u> x_2 <u>respectivement, il existe</u> $\sigma_1'' , \sigma_2'' \in \mathfrak{M}^+(Z)$ <u>telles que</u>

1. $$0 \leqslant \sigma_1'' \leqslant \sigma_1' \, , \qquad 0 \leqslant \sigma_2'' \leqslant \sigma_2' \quad .$$

2. $$S_{\sigma_1''} \subset V_1 \; ; \qquad S_{\sigma_2''} \subset V_2 \quad .$$

3. $$\sigma_1'' \neq \sigma_2'' \; ; \qquad \varphi(\sigma_1'') = \varphi(\sigma_2'') \quad .$$

Il suffit de prendre x dans le support de $\varphi(\sigma_1')$, alors $\varphi^{-1}(x)$ rencontre les supports de σ_1' et σ_2' .

Revenons à la démonstration de ((B) $\Longrightarrow$ (A)).

Supposons que φ ne soit pas une injection de M_σ dans M_ν , $\nu = \varphi(\sigma)$.

Il existerait alors $\sigma_1 , \sigma_2 \geqslant 0$,

$$\sigma_1 , \sigma_2 \leqslant \sigma \; ; \; \sigma_1 \neq \sigma_2 \; ; \; \varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = \nu' \quad ,$$

les supports K_1 et K_2 de σ_1 et σ_2 étant disjoints.

Soit f la fonction caractéristique de K_1 .

D'après B , il existe un compact K de Z ; $K \subset K_1 \cup K_2$ tel que

1. $$\sigma_1(K) \geqslant \frac{3}{4}\sigma_1(Z) \; ; \qquad \sigma_2(K) \geqslant \frac{3}{4}\sigma_2(Z) \quad .$$

2. $f_{|K}$ continue et $((x, y) \in K)(\varphi(x) = \varphi(y)) \Longrightarrow (f(x) = f(y))$.

On a nécessairement

$$\varphi(K_1 \cap K) \cap \varphi(K_2 \cap K) \neq \emptyset \quad .$$

Sinon on aurait, puisque $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2)$,

$$\frac{3}{4}\,\sigma_2(Z) = \frac{3}{4}\,\sigma_1(Z) \leq \sigma_1(K \cap K_1) \leq \sigma_2(\varphi^{-1}(\varphi(K \cap K_1)))$$

$$\leq \sigma_2(K_2 \cap CK) \leq \frac{1}{4}\,\sigma_2(Z)$$

ce qui est contradictoire puisque $\sigma_2 \neq 0$. Il existe donc $x_1 \in K_1 \cap K$, $x_2 \in K_2 \cap K$ tels que

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \quad \text{et} \quad f(x_1) \neq f(x_2) \quad ,$$

contrairement à l'hypothèse (B).

Soit toujours $\sigma \in \mathfrak{M}^+(Z)$, σ extrémale.

COROLLAIRE 1. - Soit f_n une suite de fonctions numériques σ-mesurables sur Z .

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset Z$ tel que

1. $$\sigma(K) \geq (1 - \varepsilon)\ \sigma(Z) \quad .$$

2. $f_{n|K}$ continue dans K pour tout n .

3. $[(x , y \in K) , (\varphi(x) = \varphi(y))] \Longrightarrow f_n(x) = f_n(y) , \ \forall\ n$.

COROLLAIRE 2. - Soit H un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}(Z)$ et de type dénombrable.

Il existe alors une suite K_n de compacts de Z telle que

1. Les $\varphi(K_n)$ soient deux à deux disjoints .

2. $$\sigma(\bigcup_n K_n) = \sigma(Z) \quad .$$

3. Soit $A = \bigcup_n K_n$. Alors

$$[((x , y) \in A) , (\varphi(x) = \varphi(y))] \Longrightarrow (f(x) = f(y)) \quad \forall \ f \in H \quad .$$

Supposons que Z soit de la forme $Y \times X$ où Y est un espace compact métrisable et φ la projection canonique de Z sur X.

COROLLAIRE 3. - Il existe une suite K_n de compacts de X deux à deux disjoints et une application π de $A = \bigcup_n K_n$ dans Y telle que, si $\nu = \varphi(\sigma)$,

1. $$\nu(\bigcup_n K_n) = \nu(X) \quad .$$

2. π est continue dans chaque K_n .

3. Pour toute $f \in \mathcal{C}(Y)$,

$$\int (f \circ P_Y)\, d\sigma = \int f \circ \pi . d\nu$$

où P_Y est la projection de Z sur Y. Cela résulte du fait que $\mathcal{C}(Y)$ est de type dénombrable.

Soient maintenant X et Y deux espaces compacts, ν une mesure de Radon sur X, π une application de X dans Y, telle que, pour toute $f \in \mathcal{C}(Y)$,

$$f \circ \pi \text{ soit } \nu\text{-mesurable} \quad .$$

Soit alors $g \in \mathcal{C}(Y \times X)$, alors

$$x \to g(\pi(x) , x) \text{ est } \nu\text{-mesurable sur } X \quad .$$

(Utiliser STONE-WEIERSTRASS.)

On définit ainsi une mesure de Radon σ sur $Z = Y \times X$ par

$$\int g \, d\sigma = \int g(\pi(x) , x) \, d\nu(x) , \quad \forall \; g \in \mathcal{C}(Z) \quad .$$

PROPOSITION 4. – *La mesure* σ *est extrémale pour la projection* P_X *de* Z *sur* X , *et l'on a*

$$P_X(\sigma) = \nu \quad .$$
