

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

GABRIEL MOKOBODZKI

**Quelques propriétés des fonctions numériques convexes (s. c.
i. ou s. c. s.) sur un ensemble convexe compact**

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, n° 2 (1961-1962), exp. n° 9,
p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=SB CD_1961-1962__6_2_A4_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS NUMÉRIQUES CONVEXES

(s. c. i. ou s. c. s.)

SUR UN ENSEMBLE CONVEXE COMPACT

par Gabriel MOKOBODZKI

Notations. - Soient E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$ localement convexe séparé, X un convexe compact de E . On désignera par E' l'espace produit $E \times \mathbb{R}$.

PROPOSITION 1. - Soit φ une fonction numérique ≥ 0 sur X , semi-continue inférieurement et convexe.

Alors φ est enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines continues sur X .

Démonstration. - Soit Γ l'ensemble des couples (x, y) de $X \times \mathbb{R}$ tels que $y \geq \varphi(x)$. Alors Γ est convexe et fermé. Il est donc l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

En particulier si $x \in X$, $(x, y) \notin \Gamma$, un hyperplan fermé, qui sépare strictement (x, y) et Γ , définit une fonction affine continue sur X , f telle que

$$f \leq \varphi \text{ et } y < f(x) \quad .$$

PROPOSITION 2. - Soit φ une fonction numérique semi-continue supérieurement, convexe sur X .

Alors φ est enveloppe inférieure d'une famille filtrante décroissante de fonctions convexes continues majorant strictement φ .

Démonstration. - La démonstration va résulter des deux lemmes suivants.

LEMME 1. - L'enveloppe convexe d'une famille finie d'ensembles convexes compacts de E' est encore compacte (voir BOURBAKI).

LEMME 2. - Soient f_1, f_2 s. c. i. convexes bornées supérieurement sur X , majorant strictement φ .

Il existe alors une fonction f_3 s. c. i. convexe sur X telle que

$$\varphi < f_3 \leq \inf(f_1, f_2) \quad .$$

Soit

$$\lambda > \sup(f_1, f_2, \varphi) + \varepsilon, \text{ avec } \varepsilon > 0 \quad .$$

On considère les convexes compacts $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ de $X \times \underline{\mathbb{R}}$ définis respectivement par

$$\Gamma = \{(x, y) ; x \in X ; y \in \underline{\mathbb{R}} ; \lambda \geq y > \varphi(x)\}$$

$$\Gamma_i = \{(x, y) ; x \in X ; y \in \underline{\mathbb{R}} ; \lambda \geq y \geq f_i(x)\} \quad i = 1, 2 \quad .$$

Les ensembles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ sont convexes et Γ_1 et Γ_2 sont compacts.

Or $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset \Gamma$; si Γ_3 désigne l'enveloppe convexe de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, alors $\Gamma_3 \subset \Gamma$.

Soit alors f_3 sur X définie par

$$f_3(x) = \inf_{(x,y) \in \Gamma_3} y \quad .$$

Il est clair que f_3 est convexe et s. c. i., et que, $\forall x \in X$,

$$\inf(f_1, f_2)(x) \geq f_3(x) > \varphi(x) \quad .$$

Ces lemmes étant démontrés, la proposition s'ensuit immédiatement :

Soit $(x, y) \in X \times \underline{\mathbb{R}}$ tel que

$$\lambda \geq y > \varphi(x) \quad .$$

Soit $\Gamma_{(x,y)}$ l'enveloppe convexe (donc compacte) de l'ensemble

$$(X \times \{\lambda\}) \cup (x, y) \quad .$$

Alors $\Gamma_{(x,y)}$ définit une fonction s. c. i. convexe $f_{(x,y)}$

$$f_{(x,y)}(x') = \inf_{(x',z) \in \Gamma_{(x,y)}} z$$

et il est clair que $\varphi = \inf f_{(x,y)}$.

Soit alors (f_α) une famille de fonctions affines continues sur X telle que

$$f_{(x,y)} = \sup f_\alpha \quad .$$

D'après le lemme de Dini, il existe une sous-famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ telle que

$$\varphi < \sup(f_1, \dots, f_n) \leq f_y \quad .$$

En effet il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi + \varepsilon \leq f_y$, car f_y est s. c. i. et φ est s. c. s.

COROLLAIRE. - Soit f une fonction affine s. c. s., sur X , alors f est enveloppe inférieure d'une famille filtrante décroissante de fonctions affines continues majorant strictement f .
