

# SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

PHILIPPE COURRÈGE

**Fonctionnelles multiplicatives, sous-processus d'un processus  
de Markov et semi-groupes subordonnés**

*Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel*, tome 6, n° 2 (1961-1962), exp. n° 6,  
p. 1-54

[http://www.numdam.org/item?id=SBCD\\_1961-1962\\_\\_6\\_2\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_2_A1_0)

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONNELLES MULTIPLICATIVES,  
SOUS-PROCESSUS D'UN PROCESSUS DE MARKOV  
ET SEMI-GROUPES SUBORDONNÉS

par Philippe COURRÈGE

Introduction. - Le but du présent exposé est d'étudier les relations entre trois manières différentes d'introduire ce que, cédant à la mode actuelle, on pourrait appeler les sous-trucs d'un processus de Markov stationnaire.

Un processus de Markov stationnaire étant donné, soit  $\zeta$  sa durée de vie, et  $\{P_t\}$  le semi-groupe associé à sa fonction de transition (cf. chapitre 1). Selon qu'on envisage le processus lui-même, ou seulement sa fonction de transition, on peut introduire un sous-truc de  $X$ ,

- Soit comme un processus de Markov stationnaire,  $\hat{X}$  ayant une durée de vie  $\hat{\zeta} \leq \zeta$ ; on dit alors que  $\hat{X}$  est un sous-processus de  $X$  (cf. chapitre 2);

- Soit comme un semi-groupe  $\{Q_t\}$  tel que  $0 \leq Q_t \leq P_t$ , pour tout  $t$ ; on dit alors que  $\{Q_t\}$  est un semi-groupe subordonné à  $\{P_t\}$  (cf. chapitre 4).

Un premier lien entre sous-processus et semi-groupes subordonnés réside dans le fait que le semi-groupe associé à la fonction de transition de  $\hat{X}$  est subordonné à  $\{P_t\}$  (corollaire de la proposition 2.2, et chapitre 4, exemple 2).

Les fonctionnelles multiplicatives de Markov (cf. chapitre 3) introduisant un deuxième lien de la façon suivante : pour tout  $t$ , soit  $M_t$  une fonction telle que

$$P_X[\hat{\zeta} > t \mid F] = M_t \quad P_X \text{ presque sûrement}$$

(où  $F$  désigne la tribu des ensembles mesurables pour  $X$ ) ; la famille  $(M_t)_{t \geq 0}$  possède les propriétés suivantes :

$$0 \leq M_t \leq 1$$

$$M_{t+s} = M_t \times M_s \circ \theta_t \quad P_X \text{ presque sûrement (cf. th. 2.1)}$$

$$Q_t f(x) = E_X[f \circ X_t \cdot M_t] \quad (\text{th. 4.1 et 4.2})$$

(où  $\theta_t$  est l'opérateur de translation de  $X$ , et  $\{Q_t\}$  le semi-groupe associé à la fonction de transition de  $\hat{X}$ ).

On appellera fonctionnelle multiplicative une telle famille  $(M_t)_{t \geq 0}$ , convenablement régularisée (cf. chapitre 3).

La manière axiomatique d'introduire les processus de Markov, et les relations entre sous-processus et fonctionnelles multiplicatives, sont empruntées à DYNKIN [1].

Les résultats concernant les relations entre semi-groupes subordonnés et fonctionnelles multiplicatives sont empruntés à MEYER [2].

## Chapitre 0. - Quelques résultats de théorie de la mesure.

### 1. $\pi$ - et $\lambda$ -systèmes.

Soit  $E$  un ensemble, et  $\mathcal{A}$  un ensemble de parties de  $E$ .

On dit que  $\mathcal{A}$  est un  $\pi$ -système si  $\mathcal{A}$  est stable par intersection finie.

On dit que  $\mathcal{A}$  est un  $\lambda$ -système si :

$$(\lambda_1) \quad \forall n, A_n \in \mathcal{A} \text{ et } A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{A} \quad ,$$

$$(\lambda_2) \quad A, B \in \mathcal{A} \text{ et } A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A} \quad ,$$

$$(\lambda_3) \quad A, B \in \mathcal{A} \text{ et } B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A} \quad .$$

On désignera par  $\sigma(\mathcal{A})$  le  $\sigma$ -clan engendré par  $\mathcal{A}$ .

LEMME 0.1. - Soient  $E$  un ensemble,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux ensembles de parties de  $E$ . Si  $\mathcal{A}$  est un  $\pi$ -système,  $\mathcal{B}$  un  $\lambda$ -système et  $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ , alors  $\mathcal{B} \supset \sigma(\mathcal{A})$ .

### 2. Espaces mesurables.

On appellera espace mesurable, tout couple  $(E, \mathcal{B})$  où  $E$  désigne un ensemble, et  $\mathcal{B}$  une tribu sur  $E$ . Si  $(E, \mathcal{B})$  est un espace mesurable, on désignera par  $G(E, \mathcal{B})$ , ou encore  $G(E)$ , l'ensemble des applications de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  mesurables et bornées ; muni de la norme uniforme,  $G(E, \mathcal{B})$  est un espace de Banach.

LEMME 0.2. - Soit  $(E, \mathcal{B})$  un espace mesurable, et soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $G(E, \mathcal{B})$  tel que :

$$A \in \mathcal{B} \Rightarrow 1_A \in H$$

où  $1_A$  désigne la fonction caractéristique de l'ensemble  $A \subset E$ .

$$\forall n, f_n \in H \text{ et } 0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow f \in H.$$

Alors

$$H = G(E, \mathcal{B}).$$

LEMME 0.3. - Soient  $(E, \mathcal{B})$  un espace mesurable et  $x, \Gamma \rightarrow P(x, \Gamma)$  une application de  $E \times \mathcal{B}$  dans  $[0, 1]$ , telle que

- pour tout  $x \in E$ ,  $\Gamma \rightarrow P(x, \Gamma)$  est une mesure bornée sur  $(E, \mathcal{B})$  ;
- pour tout  $\Gamma \in \mathcal{B}$ ,  $x \rightarrow P(x, \Gamma)$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable.

Alors, si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $\mathcal{B}$ -mesurable bornée, la fonction  $x \rightarrow \int P(x, dy) f(y)$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable.

### 3. Ensembles et fonctions universellement mesurables.

Soit  $(E, \mathcal{B})$  un espace mesurable. Nous désignerons par  $\mathcal{B}^*$  la tribu sur  $E$  définie par

$$"A \in \mathcal{B}^*" \iff \text{"Pour toute mesure bornée } \mu \text{ sur } (E, \mathcal{B}), \text{ il existe } A_1 \text{ et } A_2 \text{ appartenant à } \mathcal{B} \text{ tels que } A_1 \subset A \subset A_2 \text{ et } \mu(A_2 \setminus A_1) = 0 \text{"}.$$

Les ensembles de  $\mathcal{B}^*$  sont appelés ensembles universellement mesurables par rapport à l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ , et les fonctions  $\mathcal{B}^*$ -mesurables sont aussi appelées fonctions universellement mesurables (par rapport à  $(E, \mathcal{B})$ ).

Pour qu'une application  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  soit  $\mathcal{B}^*$ -mesurable, il faut et il suffit que, pour toute mesure bornée  $\mu$  sur  $E$ ,  $f$  coïncide  $\mu$ -presque partout sur  $E$  avec une fonction  $\mathcal{B}$ -mesurable.

Toute mesure bornée  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{B})$  se prolonge d'une façon et d'une seule à  $\mathcal{B}^*$ .

#### Cas d'un espace localement compact à base dénombrable.

Soit  $E$  un tel espace,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E$  sa tribu borélienne, et  $T$  une application linéaire positive de  $G(E, \mathcal{B})$  dans  $G(E, \mathcal{B})$ . Il existe une application  $x, \Gamma \rightarrow P(x, \Gamma)$  et une seule de  $E \times \mathcal{B}$  dans  $\mathbb{R}_+$  telle que :

- Pour tout  $x \in E$ ,  $\Gamma \rightarrow P(x, \Gamma)$  est une mesure de Radon  $\geq 0$  bornée sur  $E$ .
- Pour tout  $\Gamma \in \mathcal{B}$ , la fonction  $x \rightarrow P(x, \Gamma)$  appartient à  $G(E, \mathcal{B})$ .
- Pour tout  $g \in G(E, \mathcal{B})$ ,  $Tg(x) = \int P(x, dy) g(y)$ .

#### 4. Espérances mathématiques conditionnelles (cf. [2], p. 201).

Soient  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable,  $P$  une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $A \in \mathcal{F}$ , et  $\mathcal{F}_1$  une tribu sur  $A$  contenue dans  $\mathcal{F}$ . Désignons par  $\mathcal{L}^1(A, \mathcal{F}_1, P)$  l'ensemble des classes de fonctions numériques sur  $A$ ,  $\mathcal{F}_1$ -mesurables et intégrables par rapport à la mesure induite par  $P$  sur  $A$ .

Alors, il existe une application linéaire  $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ , et une seule, de  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sur  $\mathcal{L}^1(A, \mathcal{F}_1, P)$ , telle que

$$\int_A \varphi \, dP = \int_A \hat{\varphi} \, dP \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad .$$

La classe  $\hat{\varphi}$ , (ou un quelconque de ses représentants) est appelée espérance mathématique conditionnelle de la fonction  $\varphi$ , par rapport à la tribu  $\mathcal{F}_1$ , et notée  $E[\varphi | \mathcal{F}_1]$ .

Si  $B \in \mathcal{F}$ ,  $E[1_B | \mathcal{F}_1]$  est appelée probabilité conditionnelle de  $B$  par rapport à  $\mathcal{F}_1$ , et notée  $P[B | \mathcal{F}_1]$ .

Par abus de langage, on désignera aussi par  $E[\varphi | \mathcal{F}_1]$  un représentant (élément de  $\mathcal{L}^1(A, \mathcal{F}_1, P)$ , ou même élément de  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$   $\mathcal{F}_1$ -mesurable sur  $A$  et nul sur  $\bar{A}$ ) de la classe  $\hat{\varphi} = E[\varphi | \mathcal{F}_1]$ .

On a, avec ces conventions, les relations suivantes :

$$\alpha. \quad \int_A E[\varphi | \mathcal{F}_1] \, dP = \int_A \varphi \, dP \quad \varphi \in G(\Omega, \mathcal{F}), \quad A \in \mathcal{F}_1 \quad .$$

$$\beta. \quad \int \Psi E[\varphi | \mathcal{F}_1] \, dP = \int \Psi \varphi \, dP$$

pour  $\varphi \in G(\Omega, \mathcal{F})$ , et  $\Psi \in G(\Omega, \mathcal{F})$   $\mathcal{F}_1$ -mesurable sur  $A$  et nulle sur  $\bar{A}$ .

$\gamma$ . Si  $\varphi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , et si  $\Psi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est  $\mathcal{F}_1$ -mesurable sur  $A$ , on a

$$E[\varphi \cdot \Psi | \mathcal{F}_1] = (\Psi|A) \cdot E[\varphi | \mathcal{F}_1] \quad (*) \quad P \text{ presque partout sur } A \quad .$$

$\delta$ . Si  $\varphi \in G(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $E[\varphi | \mathcal{F}_1]$  contient au moins un représentant  $\Psi$  tel que

$$\sup_{\omega \in A} |\Psi(\omega)| \leq \sup_{\omega \in \Omega} |\varphi(\omega)| \quad .$$

On désignera dans la suite encore par  $E[\varphi | \mathcal{F}_1]$  un tel représentant.

---

(\*) Où  $\Psi|A$  désigne la restriction de la fonction  $\Psi$  à l'ensemble  $A$ .

### 5. Théorème de convergence des martingales.

Soient  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable,  $P$  une probabilité sur  $\mathcal{F}$ , et  $(\mathcal{F}_n)$  une suite croissante de sous-tribus de  $\mathcal{F}$ . On dit qu'une suite  $(X_n)$  de fonctions de  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est une martingale par rapport à la suite  $(\mathcal{F}_n)$  de tribus, si  $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$   $P$  presque partout, pour tout  $n$ .

LEMME 0.4. - Si la martingale  $(X_n)$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est telle que

$$\sup_n \int |X_n| dP < +\infty ,$$

alors la suite  $(X_n)$  converge  $P$  presque partout sur  $\Omega$  vers une fonction de  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

## Chapitre 1. - Processus de Markov stationnaires interrompus.

### 1. Fonctions de transition stationnaires et semi-groupes de transformations positives contractantes.

On appellera fonction de transition stationnaire sous-markovienne <sup>(1)</sup> sur l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ , toute application  $(t, x, \Gamma) \rightarrow P_t(x, \Gamma)$  de  $R_+ \times E \times \mathcal{B}$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  de  $R$ , telle que :

(FT<sub>1</sub>) Pour tout  $t \in R_+$ , et  $\Gamma \in \mathcal{B}$ ,  $x \rightarrow P_t(x, \Gamma)$  est une fonction de  $G(E)$ .

(FT<sub>2</sub>) Pour tout  $t \in R_+$  et  $x \in E$ ,  $\Gamma \rightarrow P_t(x, \Gamma)$  est une mesure (bornée) sur  $(E, \mathcal{B})$ .

(FT<sub>3</sub>) Pour tout  $s, t \in R_+$ ,  $x \in E$  et  $\Gamma \in \mathcal{B}$ ,

$$P_{t+s}(x, \Gamma) = \int_E P_t(x, dy) P_s(y, \Gamma) .$$

(Equation de Chapman-Kolmogorov.)

Pour tout  $t$  et  $x$ , on a  $P_t(x, E) \leq 1$ . Si  $P_t(x, E) = 1$  pour tout  $t \in R_+$  et  $x \in E$ , on dit que la fonction de transition est markovienne.

Toute fonction de transition stationnaire sur l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$  se prolonge de façon unique en une fonction de transition stationnaire sur l'espace

---

<sup>(1)</sup> ou, plus brièvement, fonction de transition.

mesurable  $(E, \mathcal{B}^*)$ .

Si  $\{P_t(x, \Gamma)\}$  est une fonction de transition sur  $(E, \mathcal{B})$ , et si, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $f \in G(E)$ ,  $x \in E$ , on pose

$$P_t f(x) = \int_E P_t(x, dy) f(y) ,$$

$\{P_t\}_{t \geq 0}$  constitue un semi-groupe de transformations positives contractantes <sup>(2)</sup>  
 $(\|P_t f\| \leq \|f\|)$  de l'espace de Banach  $G(E)$ .

## 2. Définition d'un processus de Markov stationnaire (interrompu).

Soient  $(E, \mathcal{B})$  un espace mesurable, et  $\{P_t(x, \Gamma)\}$  une fonction de transition stationnaire sous-markovienne sur  $(E, \mathcal{B})$ .

Considérons alors les termes suivants :

- Un ensemble  $\Omega$ .
- Une application  $\zeta$  de  $\Omega$  dans  $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$ .
- Pour chaque  $\omega \in \Omega$ , une application  $t \rightarrow X_t(\omega)$ , de  $[0, \zeta(\omega)[$  dans  $E$ .
- Pour chaque  $t \in \mathbb{R}_+$ , une application  $\theta_t$  de  $[\zeta > t]$  sur  $[\zeta > 0]$  <sup>(3)</sup>.
- Une tribu  $\mathcal{M}$  sur  $\Omega$ , et, pour chaque  $x \in E$ , une probabilité  $P_x$  sur  $(\Omega, \mathcal{M})$ .

On dira que le terme  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathcal{M}, (P_x), (\theta_t)\}$  est un processus de Markov stationnaire (interrompu) à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$  et admettant  $\{P_t(x, \Gamma)\}$  comme fonction de transition, si les relations suivantes sont satisfaites par  $X$  :

$$(M_1) \quad \zeta(\theta_t(\omega)) = \zeta(\omega) - t \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \omega \in [\zeta > t] .$$

$$(M_2) \quad X_{t+h}(\omega) = X_h(\theta_t(\omega)) \text{ pour tout } t, h \text{ et } \omega \in [\zeta > t+h] .$$

$$(M_3) \text{ Si } \mathcal{F} \text{ désigne la tribu sur } \Omega \text{ engendrée par les ensembles}$$

$$[X_t \in \Gamma] = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \zeta(\omega) > t \text{ et } X_t(\omega) \in \Gamma\}$$

où  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $\Gamma \in \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{M}$  contient  $\mathcal{F}$ .

<sup>(2)</sup> Un tel semi-groupe est aussi appelé sous-markovien.

<sup>(3)</sup> On désigne par  $[\zeta > t]$ , l'ensemble  $\{\omega \mid \omega \in \Omega \text{ et } \zeta(\omega) > t\}$ .

(M<sub>4</sub>) Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in E$  et  $\Gamma \in \mathcal{B}$ ,

$$P_t(x, \Gamma) = P_x[X_t \in \Gamma] \quad .$$

(M<sub>5</sub>) [Propriété de Markov.]

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , soit  $\mathcal{F}_t$  la tribu sur l'ensemble  $[\zeta > t]$  engendrée par les ensembles  $[X_u \in \Gamma] \cap [\zeta > t]$ ,  $0 \leq u \leq t$ ,  $\Gamma \in \mathcal{B}$ .

On a alors, pour  $0 \leq s \leq t$ ,  $x \in E$ ,  $\Gamma \in \mathcal{B}$ ,

$$P_x[X_t \in \Gamma \mid \mathcal{F}_s] = P_{t-s}(X_s, \Gamma) \quad (4)$$

$P_x$  presque sûrement <sup>(5)</sup> sur  $[\zeta > s]$ .

On dira que le terme  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathcal{M}, (P_x), (\theta_t)\}$  est un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ , si les axiomes  $M_1, M_2, M_3, M_5$  sont vérifiés, et si l'application

$$(t, x, \Gamma) \rightarrow P_x[X_t \in \Gamma]$$

de  $\mathbb{R}_+ \times E \times \mathcal{B}$  dans  $(0, 1]$  est une fonction de transition sur  $(E, \mathcal{B})$ ; cette application est alors appelée fonction de transition du processus  $X$ .

La terminologie suivante facilite l'interprétation probabiliste.

Les éléments de  $\Omega$  sont appelés trajectoires du processus  $X$ . Pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\zeta(\omega)$  est la "durée de vie" de la trajectoire  $\omega$ . Un processus, pour lequel  $\zeta(\omega) = +\infty$  pour tout  $\omega \in \Omega$ , est appelé processus non interrompu <sup>(6)</sup>.

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\theta_t$  est appelé l'opérateur de translation par  $t$ , et  $\mathcal{F}_t$  est appelé la tribu des événements antérieurs à  $t$ .

Si  $x \in E$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $\Gamma \in \mathcal{B}$ ,  $P_x[X_t \in \Gamma]$  est intuitivement, la probabilité pour qu'une trajectoire, partant de  $x$  à l'instant 0, soit dans l'ensemble  $\Gamma$  à l'instant  $t$  (cf. remarque 1).

<sup>(4)</sup>  $P_{t-s}(X_s, \Gamma)$  désigne la fonction  $\omega \rightarrow P_{t-s}(X_s(\omega), \Gamma)$  définie sur  $[\zeta > s]$ . Cette fonction peut aussi être notée  $P_{t-s} 1_\Gamma \circ X_s$ , où  $\{P_t\}$  désigne le semi-groupe associé à la fonction de transition  $\{P_t(x, \Gamma)\}$ .

<sup>(5)</sup> Conformément à l'usage courant chez les probabilistes, "presque sûrement" est ici synonyme de "presque partout".

<sup>(6)</sup> A tout processus de Markov, à valeurs dans  $(E, \mathcal{B})$ , on peut associer canoniquement un processus non interrompu à valeurs dans l'espace  $(E, \mathcal{B})$  obtenu en "adjoignant à  $E$  un point à l'infini". Cf. à ce sujet l'appendice 2.

Remarque 1. - Les fonctions de transition des processus de Markov classiques (cf. par exemple le théorème 1.1) satisfont généralement à une condition supplémentaire relative à l'opérateur  $P_0$ , par exemple :

$$(M) \quad \{x\} \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad P_0(x, E \setminus \{x\}) = 0 \quad \text{pour tout } x \in E \quad (7),$$

ou bien

$$(N) \quad P_0(x, E) = 1 \quad \text{pour tout } x \in E.$$

(N)  $\Rightarrow$  (M), (M) implique l'existence <sup>(8)</sup> d'un ensemble  $P \in \mathcal{B}$  tel que

$$P_0(x, \Gamma) = 1_{\Gamma \cap P}(x) \quad \text{pour tout } x \in E \text{ et } \Gamma \in \mathcal{B},$$

et (N) implique que  $P = E$ , c'est-à-dire  $P_0 = \text{identité de } G(E, \mathcal{B})$ .

Dans la plus grande partie de cet exposé, ces conditions n'interviendront pas ; nous les introduirons quand elles serviront.

Remarque 2. - Les axiomes  $(M_4)$  et  $(M_5)$  sont surabondants. On pourrait les remplacer par :

$(M'_4)$  Pour tout  $t \in R_+$  et  $\Gamma \in \mathcal{B}$ , la fonction

$$x \rightarrow P_x[X_t \in \Gamma] \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable sur } E.$$

$(M'_5)$  Pour  $0 \leq s \leq t$ ,  $x \in E$  et  $\Gamma \in \mathcal{B}$ , on a :

$$P_x[X_t \in \Gamma \mid \mathcal{F}_s] = P_{X_s}[X_{t-s} \in \Gamma] \quad P_x \text{ presque sûrement sur } [\zeta > s]$$

(où  $P_{X_s}[X_u \in \Gamma]$  désigne la fonction  $\omega \rightarrow P_{X_s(\omega)}[X_u \in \Gamma]$  définie sur  $[\zeta > s]$ ).

En effet, si on pose  $P_t(x, \Gamma) = P_x[X_t \in \Gamma]$ ,  $(t, x, \Gamma) \rightarrow P_t(x, \Gamma)$  vérifie alors  $(FT_1)$  et  $(FT_2)$ .

D'autre part, d'après  $(M'_5)$ , on a

$$\begin{aligned} P_{u+s}(x, \Gamma) &= P_x[X_{u+s} \in \Gamma] = \int P_{X_s}[X_u \in \Gamma] dP_x \\ &= \int P_s(x, dy) P_u(y, \Gamma), \end{aligned}$$

---

<sup>(7)</sup> Cette condition s'écrit aussi :  $P_x[X_0 \neq x] = 0$ , et permet d'interpréter  $P_x$  comme la probabilité, "sachant que les trajectoires partent de  $x$  à l'instant 0".

<sup>(8)</sup> D'après l'équation de Chapman-Kolmogorov  $(FT_3)$  et le théorème de Radon-Nikodym.

puisque  $\Lambda \rightarrow P_s(x, \Lambda)$  est la mesure image de  $P_x$  par  $X_s$ . D'où  $(FT_3)$ .

### 3. Processus canoniques. Processus équivalents. Processus subordonnés.

L'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$  étant donné, désignons par  $\Omega_E$  l'ensemble des applications d'un intervalle  $[0, \lambda[$  dans  $E$ , ( $\lambda \in R_+$ ). Si  $\varphi \in \Omega_E$  est définie dans  $[0, \lambda[$ , posons  $\zeta(\varphi) = \lambda$ . Si  $\zeta(\varphi) > t$ , posons

$$X_t(\varphi) = \varphi(t)$$

et définissons l'élément  $\bar{\Theta}_t(\varphi)$  de  $\Omega_E$  comme l'application  $u \rightarrow \varphi(t + u)$  de  $[0, \zeta(\varphi) - t[$  dans  $E$ . Désignons enfin par  $\bar{F}$  la tribu sur  $\Omega_E$  engendrée par les ensembles  $[\bar{X}_t \in \Gamma]$ ,  $t \in R_+$ ,  $\Gamma \in \mathcal{B}$ .

Les termes  $\Omega_E$ ,  $\zeta$ ,  $(X_t)$ ,  $\bar{F}$ ,  $(\bar{\Theta}_t)$ , ainsi définis, vérifient les axiomes  $(M_1)$ ,  $(M_2)$ ,  $(M_3)$  des processus de Markov stationnaires.

Un processus de Markov de la forme :

$$X = \{\Omega_E, \zeta, (X_t), \bar{F}, (\bar{P}_X), \bar{\Theta}_t\}$$

sera dit canonique.

Cas où  $E$  est un espace topologique. - Soit alors  $\bar{\Omega}$  le sous-ensemble de  $\Omega_E$  formé des trajectoires  $\varphi$  continues à droite et ayant une limite à gauche. Pour tout  $t \in R_+$ ,  $\bar{\Theta}_t(\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}$ ; désignons encore par  $\zeta$ ,  $X_t$ ,  $\bar{\Theta}_t$ ,  $\bar{F}$  les restrictions à  $\bar{\Omega}$  des termes précédemment définis sur  $\Omega_E$ . Les termes ainsi définis vérifient encore les axiomes  $(M_1)$ ,  $(M_2)$ ,  $(M_3)$ . Un processus de la forme

$$X = \{\bar{\Omega}, \zeta, (X_t), \bar{F}, (\bar{P}_X), \bar{\Theta}_t\}$$

sera appelé processus canonique à valeurs dans  $(E, \mathcal{B})$  et ayant toutes ses trajectoires continues à droite et pourvues de limite à gauche.

On introduirait de façon analogue un processus canonique ayant ses trajectoires continues.

Plus généralement, on dit qu'un processus de Markov  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \dots\}$  à valeurs dans  $(E, \mathcal{B}_E)$  a ses trajectoires continues à droite (resp. continues ...) si, pour tout  $\omega \in \Omega$  l'application  $t \rightarrow X_t(\omega)$  de  $[0, \zeta(\omega)[$  dans  $E$  est continue à droite en tout point (resp. continue ...).

Processus équivalents. - On dit que deux processus de Markov  $X$  et  $\hat{X}$  sont équivalents, s'ils sont à valeurs dans le même espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ , et s'ils admettent la même fonction de transition.

Processus subordonnés. - Soient

$$X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathcal{M}, (P_x), (\theta_t)\}$$

et

$$\hat{X} = \{\hat{\Omega}, \hat{\zeta}, (\hat{X}_t), \hat{\mathcal{M}}, (\hat{P}_x), (\hat{\theta}_t)\}$$

deux processus de Markov stationnaires, à valeurs dans le même espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ , et  $\gamma: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$ . On dit que  $\hat{X}$  est subordonné à  $X$  par  $\gamma$ , si

$$(S_1) \quad \hat{\zeta} = \zeta \circ \gamma$$

$$(S_2) \quad \hat{X}_t(\hat{\omega}) = X_t(\gamma(\hat{\omega})) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \hat{\omega} \text{ tel que } \hat{\zeta}(\hat{\omega}) > t.$$

$$(S_3) \quad \gamma^{-1}(\mathcal{M}) \subset \hat{\mathcal{M}}, \text{ et } \hat{P}_x \gamma^{-1} A = P_x A \text{ pour tout } A \in \mathcal{M} \quad (9).$$

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1.

1. Si le processus  $\hat{X}$  est subordonné au processus  $X$ ,  $\hat{X}$  et  $X$  sont équivalents.

2. Tout processus est subordonné à un processus canonique.

(1) résulte de ce que, si  $\hat{X}$  est subordonné à  $X$  par  $\gamma$ ,

$$\hat{P}_x[\hat{X}_t \in \Gamma] = \hat{P}_x \gamma^{-1}[X_t \in \Gamma] = P_x[X_t \in \Gamma].$$

Pour montrer (2), on considère un processus  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathcal{M}, (P_x), (\theta_t)\}$ , et on définit l'application  $\gamma$  de  $\Omega$  dans  $\Omega_E$  par la relation :

$$\bar{X}_t(\gamma(\omega)) = \gamma(\omega)(t) = X_t(\omega)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $\omega \in [\zeta > t]$ . Les relations  $(S_1)$  et  $(S_2)$  sont alors vérifiées,

---

(9) Autrement dit,  $P_x$  est image de  $\hat{P}_x$  par  $\gamma$ .

et  $\gamma^{-1}(\bar{F}) \subset \mathbb{M}$ .

On peut donc poser  $\bar{P}_x = \gamma(P_x)$  ( $\bar{P}_x$  image de  $P_x$  par  $\gamma$ ) ;  $(S_3)$  est alors vérifié, et il reste à vérifier la relation  $(M_5)$ , c'est-à-dire

$$\bar{P}_x[X_t \in \Gamma] \cap A = \int_A P_{t-s}(X_s, \Gamma) d\bar{P}_x$$

pour tout  $A \in \bar{F}_t$ , relation qui résulte de la définition de  $\bar{P}_x$  comme mesure image de  $P_x$  par  $\gamma$ .

#### 4. Propriétés élémentaires des processus de Markov stationnaires.

Dans ce numéro,

$$X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathbb{M}, (P_x), (\theta_t)\}$$

désigne un processus de Markov stationnaire à valeurs dans  $(E, \mathcal{B})$  et admettant  $\{P_t(x, \Gamma)\}$  comme fonction de transition.

a. Expression de  $P_x\{\bigcap_{i=1}^n [X_{t_i} \in \Gamma_i]\}$ ,  $t_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Gamma_i \in \mathcal{B}$ .

PROPOSITION 1.2. - Soient  $(\Gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$  une suite finie d'éléments de  $\mathcal{B}$ , et  $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$  une suite de nombres réels, tels que  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ . Alors :

$$\begin{aligned} & P_x\{\bigcap_{i=1}^n [X_{t_i} \in \Gamma_i]\} \\ &= \int_{\Gamma_1} P_{t_1}(x, dx_1) \int_{\Gamma_2} P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \int \dots \int_{\Gamma_{n-1}} P_{t_{n-1}-t_{n-2}}(x_{n-2}, dx_{n-1}) \\ & \quad P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, \Gamma_n) \quad . \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1. - Si  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$  est une fonction  $\mathcal{B}^n$ -mesurable sur  $E^n$ , et si  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ , on a :

$$\begin{aligned} & \int_{[\zeta > t_n]} f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) dP_x \\ &= \int P_{t_1}(x, dx_1) \int P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \int \dots \int P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) f(x_1, \dots, x_n) . \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2. - Pour tout  $A \in \mathcal{F}^{(10)}$ , la fonction  $x \rightarrow P_x(A)$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable.

Pour tout  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}$ -mesurable et bornée, et pour tout  $\varphi : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ ,  $\mathcal{F}$ -mesurable, la fonction  $x \rightarrow E_x[\varphi] = \int \varphi dP_x$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable.

Pour montrer la proposition 1.2, on montrera, par récurrence sur  $n$ , en utilisant les axiomes  $(M_4)$  et  $(M_5)$  et le lemme 0.3, que, si  $f_1, \dots, f_n$  sont des fonctions numériques bornées  $\mathcal{B}$ -mesurables sur  $E$ , et si  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ ,

$$\int \prod_{i=1}^n f_i \circ X_{t_i} dP_x = \int P_{t_1}(x, dx_1) f(x_1) \int P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) f(x_2) \\ \int \dots f(x_{n-1}) \int P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) f(x_n) \quad .$$

Les corollaires 1 et 2 en résultent en utilisant les lemmes 0.1 et 0.2.

b. Les mesures  $P_\mu$  et les tribus définitives. - Soit  $\mu$  une mesure bornée sur  $(E, \mathcal{B})$ . Pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,  $x \rightarrow P_x(A)$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable d'après le corollaire 2 de la proposition 1.2. Si on pose

$$P_\mu(A) = \int \mu(dx) P_x(A), \text{ pour } A \in \mathcal{F},$$

$P_\mu$  est une mesure bornée sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ , et si  $\mu$  est une probabilité,  $P_\mu$  est aussi une probabilité.

On appelle répartition initiale du processus, toute probabilité sur  $(E, \mathcal{B})$ .

D'après les lemmes 0.1 et 0.2, on a  $\int \varphi dP_\mu = \int \mu(dx) \int \varphi dP_x$ ; pour tout  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}$ -mesurable borné, on notera  $E_\mu[\varphi]$  l'intégrale  $\int \varphi dP_\mu$ . Si on pose en outre,

$$E_x[\varphi] = \int \varphi dP_x,$$

on a

$$E_\mu[\varphi] = \int \mu(dx) E_x[\varphi].$$

En particulier,

$$P_{\varepsilon_x} = P_x \text{ et } E_{\varepsilon_x} = E_x \quad (x \in E).$$

---

<sup>(10)</sup> Rappelons qu'on désigne par  $\mathcal{F}$  ( $n^\circ 3$ ) la tribu engendrée par les ensembles  $[X_t \in \Gamma]$ , ( $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Gamma \in \mathcal{B}$ ).

Désignons par  $F^*$  la tribu sur  $\Omega$  définie par

"  $A \in F^*$  "  $\iff$  "Pour toute répartition initiale  $\mu$ , il existe deux ensembles  $A_1$  et  $A_2$  de  $F$  tels que  $A_1 \subset A \subset A_2$  et  $P_\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$ ".

Pour tout  $\mu$ , la mesure  $P_\mu$  se prolonge de façon unique à  $F^*$ . Nous désignons encore par  $P_\mu$  ce prolongement.

Pour tout  $t \in R_+$ , désignons par  $F_t^*$  la tribu sur l'ensemble  $[\zeta > t]$  définie par

"  $A \in F_t^*$  "  $\iff$  "  $A \subset [\zeta > t]$ , et, pour tout  $\mu$ , il existe  $B \in F_t$  tel que  $A \setminus B \in F^*$ ,  $B \setminus A \in F^*$  et  $P_\mu(A \setminus B) = P_\mu(B \setminus A) = 0$ ".

Les tribus  $(F_t^*)_{t \geq 0}$  sont appelées "tribus définitives" associées au processus de Markov  $X$ ".

Elles possèdent les propriétés suivantes :

- $F_t \subset F_t^* \subset F^*$  pour tout  $t \in R_+$ .
- $s \leq t$  et  $A \in F_s^* \implies A \cap [\zeta > t] \in F_t^*$ .
- Si  $s \leq t$ , si  $\mu$  est une répartition initiale, et si  $\Gamma \in \mathcal{G}$ , on a

$$P_\mu[X_t \in \Gamma \mid F_s^*] = P_{t-s}(X_s, \Gamma) \quad P_\mu \text{ presque sûrement sur } [\zeta > s] .$$

Remarque 1. - Si  $\varphi : \Omega \rightarrow R$  est  $F^*$ -mesurable bornée, la fonction  $x \rightarrow E_x[\varphi] = \int \varphi dP_x$  est universellement mesurable sur l'espace  $(E, \mathcal{G})$ , et on a encore

$$E_\mu[\varphi] = \int \varphi dP_\mu = \int \mu(dx) E_x[\varphi] .$$

Si  $\varphi = 1_A$  où  $A \in F^*$ , cela résulte de la définition de  $F^*$ , puisque, pour tout  $\mu$ , il existe  $A_1$  et  $A_2 \in F$  tels que

$$P_x(A_1) \leq P_x(A) \leq P_x(A_2)$$

et

$$\int [P_x(A_2) - P_x(A_1)] \mu(dx) = \int P_x(A_2 \setminus A_1) \mu(dx) = P_\mu(A_2 \setminus A_1) = 0 .$$

D'où le résultat pour  $\varphi$   $F^*$ -mesurable bornée par application du lemme 0.2.

Remarque 2. - Soit  $X$  un processus de Markov à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{G})$ . Pour tout  $\Gamma \in \mathcal{G}^*$ ,  $[X_t \in \Gamma] \in F_t^*$ . Donc, en prolongeant la fonction

de transition de  $X$  à  $\mathcal{B}^*$ , et, compte tenu de la proposition 1.3,  $X$  est aussi un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B}^*)$ . On remarquera que les tribus  $F_t^*$  et  $F^*$  restent inchangées par ce passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}^*$ .

Remarque 3. - Soit  $\mathcal{M}^*$  la tribu sur  $\Omega$  définie par

"  $A \in \mathcal{M}^*$  "  $\iff$  "Pour tout  $x \in E$ , il existe  $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$  tels que  
 $A_1 \subset A \subset A_2$  et  $P_x(A_2 \setminus A_1) = 0$ ". On a  $\mathcal{M}^* \supset F^*$ ,

et pour tout  $x \in E$ ,  $P_x$  se prolonge de façon unique en une probabilité sur  $\mathcal{M}^*$ . On peut donc toujours supposer que  $\mathcal{M} \supset F^*$ . C'est ce que nous ferons dans la suite. En outre, lorsque  $\mathcal{M} = F^*$ , nous ne mentionnerons pas  $\mathcal{M}$ .

c. La propriété de Markov. - Soient  $A \in F^*$  un sous-ensemble de  $\Omega$ , et  $\varphi$  une application de  $A$  dans  $\mathbb{R}$   $F^*$ -mesurable et bornée. On notera  $E_\mu[\varphi]$  l'intégrale  $\int_A \varphi dP_\mu$  ( $\mu$  mesure bornée sur  $(E, \mathcal{B})$ ).

PROPOSITION 1.3. - Soient  $\mu$  une répartition initiale, et  $t \in \mathbb{R}_+$ .

1. Pour tout  $A \in F^*$ ,  $A \subset [\zeta > 0]$ , on a

$$P_\mu[\theta_t^{-1}(A) \mid F_t^*] = P_{X_t}(A) \quad P_\mu \text{ presque sûrement sur } [\zeta > t] \quad (11)$$

2. Pour toute application  $\varphi$  de  $[\zeta > 0]$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $F^*$ -mesurable et bornée, on a

$$E_\mu[\varphi \circ \theta_t \mid F_t^*] = E_{X_t}[\varphi] \quad P_\mu \text{ presque sûrement sur } [\zeta > t]$$

(2) résulte de (1) par application du lemme 0.2.

Pour montrer (1), il suffit de montrer en vertu du lemme 0.1, et de la définition des tribus définitives, que

$$(h) \quad P_\mu \theta_t^{-1}(A) \cap B = \int_B P_{X_t}(A) dP_\mu$$

pour  $A$  de la forme

$$\bigcap_{i=1}^m [X_{u_i} \in \Gamma_i]$$

et  $B$  de la forme

---


$$(11) \quad P_{X_t}(A) \text{ désignant l'application } \omega \rightarrow P_{X_t(\omega)}(A) \text{ de } [\zeta > t] \text{ dans } (0, 1).$$

$$\bigcap_{j=1}^n [X_{t_j} \in \Delta_j]$$

où  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$ , ce qui résulte de la proposition 1.2.

### 5. Un théorème d'existence.

Nous admettons ici le théorème suivant :

**THEOREME 1.1.** - Soient  $E$  un espace localement compact à base dénombrable et  $\{P_t\}$  un semi-groupe fortement continu et sous-markovien de transformations de  $C_0(E)$ . Si  $\{P_t(x, \Gamma)\}$  désigne la fonction de transition sur l'espace  $E$ , mesurable  $(E, \mathcal{B}_E)$  <sup>(12)</sup> associée à  $\{P_t\}$ , il existe un processus de Markov stationnaire

$$X = \{\Omega, \zeta, (X_t), (P_x), (\theta_t)\},$$

à valeurs dans  $(E, \mathcal{B}_E)$ , admettant  $\{P_t(x, \Gamma)\}$  comme fonction de transition et tel que pour tout  $\omega \in \Omega$ , la fonction  $t \rightarrow X_t(\omega)$  est continue à droite et a une limite à gauche en tout point.

En outre, si  $\{P_t\}$  est markovien, on peut choisir  $X$  tel que  $\zeta(\omega) = +\infty$  pour tout  $\omega \in \Omega$  (processus non interrompu).

Pour une démonstration de ce théorème dans le cas où  $\{P_t\}$  est markovien, cf. [3], exposé n° 5, page 4.

D'après la proposition 1.1, on peut toujours supposer que  $X$  est canonique.

## Chapitre 2. - Sous-processus stationnaire d'un processus de Markov stationnaire.

### 1. Définition d'un sous-processus.

Intuitivement, on obtient un sous-processus d'un processus de Markov  $X = (\Omega, \zeta, \dots)$  en raccourcissant la durée de vie  $\zeta$  de  $X$ . De façon précise :

**DÉFINITION 2.1.** - Soit  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathbb{K}, (P_x), (\theta_t)\}$  un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ . On appelle sous-processus stationnaire du processus  $X$ , tout couple  $(\hat{X}, \gamma)$  où

---

<sup>(12)</sup>  $\mathcal{B}_E$  désignant la tribu borélienne de  $E$ .

$\hat{X} = \{(\hat{\Omega}, \hat{\zeta}, (\hat{X}_t), \hat{\mathbb{M}}, (\hat{P}_x), (\hat{\theta}_t))\}$  est un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesuré  $(E, \mathcal{B}^*)$  <sup>(13)</sup>, et  $\gamma$  une application de  $\hat{\Omega}$  dans  $\Omega$  telle que les relations suivantes soient satisfaites :

$$(SM_1) \quad \hat{\zeta}(\hat{\omega}) \leq \zeta(\gamma(\hat{\omega})) \text{ pour tout } \hat{\omega} \in \hat{\Omega}.$$

$$(SM_2) \quad \hat{X}_t(\hat{\omega}) = X_t(\gamma(\hat{\omega})) \text{ pour tout } t \in R_+ \text{ et } \hat{\omega} \in [\hat{\zeta} > t].$$

$$(SM_3) \text{ Pour tout } u, t \in R_+, \text{ et } A \in F \text{ tel que } A \subset [\zeta > 0],$$

$$\hat{\theta}_t^{-1}(\gamma^{-1}(A) \cap [\hat{\zeta} > u]) = \gamma^{-1}(\theta_t^{-1}(A)) \cap [\hat{\zeta} > t + u].$$

$$(SM_4) \quad \gamma^{-1}(\mathbb{M}) \subset \hat{\mathbb{M}}, \text{ et } \hat{P}_x(\gamma^{-1}(A)) = P_x(A) \text{ pour tout } A \in \mathbb{M}.$$

(SM<sub>5</sub>) Pour tout  $t \in R_+$ , il existe une application  $M_t$  de  $\Omega$  dans  $(0, 1)$ , nulle hors de  $[\zeta > t]$ ,  $F_t^*$ -mesurable sur  $[\zeta > t]$ , et telle que

$$\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t \mid \gamma^{-1}(\mathbb{M})] = M_t \circ \gamma$$

$\hat{P}_x$  presque sûrement sur  $\Omega$ , pour tout  $x \in E$ .

Remarque. - Indépendamment de l'axiome (SM<sub>5</sub>), puisque pour chaque  $t, x$ ,  $\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t \mid \gamma^{-1}(\mathbb{M})]$  est une classe de fonctions  $\gamma^{-1}(\mathbb{M})$ -mesurables sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $(0, 1)$ , il existe une application  $M_t^x$  de  $\Omega$  dans  $(0, 1)$ ,  $\mathbb{M}$ -mesurable et telle que  $M_t^x \circ \gamma$  appartienne à la classe  $\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t \mid \gamma^{-1}(\mathbb{M})]$  (ce que l'on note aussi

$$\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t \mid \gamma^{-1}(\mathbb{M})] = M_t^x \circ \gamma$$

$P_x$  presque sûrement).

On a alors

$$\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t] \cap \gamma^{-1}(A) = \int_{\gamma^{-1}(A)} M_t^x \circ \gamma d\hat{P}_x = \int_A M_t^x dP_x$$

pour tout  $A \in \mathbb{M}$ , d'après (SM<sub>4</sub>).

En particulier, si on prend  $A = [\zeta \leq t]$ ; d'après (SM<sub>1</sub>),

---

<sup>(13)</sup> Où  $\mathcal{B}^*$  désigne la tribu des ensembles universellement mesurables (cf. chapitre 0, n° 3) par rapport à  $(E, \mathcal{B})$ .

$$\gamma^{-1}([\zeta \leq t]) \subset [\hat{\zeta} \leq t] \quad ,$$

donc

$$\int_{[\zeta \leq t]} M_t^x dP_x = 0 \quad .$$

Ceci montre, puisque  $M_t^x$  est une fonction positive, que  $M_t^x = 0$   $P_x$  presque sûrement sur  $[\zeta \leq t]$ , ce qui introduit l'axiome  $(SM_5)$ .

## 2. Exemples.

Exemple 1. - Soient  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), F^*, (P_x), (\theta_t)\}$  un processus de Markov stationnaire, et  $T$  une application de  $\Omega$  dans  $[0, +\infty)$  telle que :

$$(TE_1) \quad 0 \leq T(\omega) \leq \zeta(\omega) \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega .$$

$$(TE_2) \quad \text{Pour tout } t \in R_+ \text{ et } \omega \in [T > t], \quad T(\theta_t(\omega)) = T(\omega) - t .$$

$$(TE_3) \quad [T > t] \in F_t^* \quad \text{pour tout } t \in R_+ .$$

Pour tout  $t \in R_+$ , soient  $\hat{X}_t$  la restriction de  $X_t$  et  $\hat{\theta}_t$  la restriction de  $\theta_t$  à l'ensemble  $[T > t]$ .

Alors  $\hat{X} = \{\Omega, T, (\hat{X}_t), F^*, P_x, (\hat{\theta}_t)\}$  est un sous-processus du processus  $X$  (prendre pour  $\gamma$  l'application identique de  $\Omega$ , et  $M_t = 1_{[T > t]}$  pour tout  $t \in R_+$ ). Voir ci-dessous chapitre 3, n° 2, exemple 1, et n° 3, applications du théorème 3.2.

## Exemple 2. - Sous-processus canonique.

Soit  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathbb{M}, (P_x), (\theta_t)\}$  un processus de Markov stationnaire.

Posons

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times \overline{R_+} = \Omega \times [0, +\infty) \quad ,$$

$$\tilde{\zeta}(\omega, \lambda) = \inf(\zeta(\omega), \lambda) \quad \text{pour tout } (\omega, \lambda) \in \tilde{\Omega} \quad ,$$

$$\tilde{X}_t(\omega, \lambda) = X_t(\omega)$$

$$\tilde{\theta}_t(\omega, \lambda) = (\theta_t(\omega), \lambda - t)$$

pour tout  $t \in R_+$  et  $(\omega, \lambda) \in [\tilde{\zeta} > t]$ .

$$\tilde{\gamma}(\omega, \lambda) = \omega \text{ pour tout } (\omega, \lambda) \in \tilde{\Omega} ;$$

et désignons par  $\tilde{\mathcal{M}}$  la tribu sur  $\tilde{\Omega}$  engendrée par les ensembles  $[\tilde{X}_t \in \Gamma]$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Gamma \in \mathcal{B}$ , et par  $\tilde{\gamma}^{-1}(\mathcal{M})$ . Cette tribu  $\tilde{\mathcal{M}}$  est engendrée par les ensembles de la forme  $A \cap [\zeta > t] \times ]t, +\infty)$  ou  $A \times \{0, +\infty)$ ,  $A \in \mathcal{M}$ , qui forment un  $\pi$ -système.

Les termes  $\tilde{\Omega}$ ,  $\tilde{\zeta}$ ,  $(\tilde{X}_t)$ ,  $\tilde{\mathcal{M}}$ ,  $(\tilde{\theta}_t)$  satisfont aux axiomes  $(M_1)$ ,  $(M_2)$ ,  $(M_3)$  des processus de Markov (chapitre 2, § 2), aux axiomes  $(SM_1)$ ,  $(SM_2)$ ,  $(SM_3)$  des sous-processus, ainsi qu'à la relation  $\gamma^{-1}(\mathcal{M}) \subset \tilde{\mathcal{M}}$ .

Vérifions par exemple  $(SM_3)$  : soit  $A = [X_s \in \Gamma]$ . On a

$$\gamma^{-1}(A) = [X_s \in \Gamma] \times \{0, +\infty)$$

et

$$[\tilde{\zeta} > u] = [\zeta > u] \times ]u, +\infty) ,$$

donc

$$\gamma^{-1}(A) \cap [\tilde{\zeta} > u] = [X_s \in \Gamma] \cap [\zeta > u] \times ]u, +\infty) = \bigcup_{v > u} [X_s \in \Gamma] \cap [\zeta > u] \times \{v\} .$$

D'où

$$\tilde{\theta}_t^{-1}(\gamma^{-1}(A) \cap [\tilde{\zeta} > u]) = \bigcup_{v > u} \tilde{\theta}_t^{-1}([X_s \in \Gamma] \cap [\zeta > u] \times \{v\}) ,$$

mais

$$\tilde{\theta}_t^{-1} B \times \{v\} = \theta_t^{-1}(B) \times \{v + t\} ,$$

donc

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_t^{-1}(\gamma^{-1}(A) \cap [\tilde{\zeta} > u]) &= \bigcup_{v > u} \theta_t^{-1}([X_s \in \Gamma] \cap [\zeta > u]) \times \{t + v\} \\ &= \theta_t^{-1}(A) \cap [\zeta > t + u] \times ]u + t, +\infty) \\ &= \tilde{\gamma}^{-1}(\theta_t^{-1}(A)) \cap [\tilde{\zeta} > t + u] . \end{aligned}$$

On en déduit alors  $(SM_3)$ , puisque l'ensemble des  $A \in \mathcal{F}$ ,  $A \subset [\zeta > 0]$  tels que

$$\gamma_t^{-1}(\tilde{\gamma}^{-1}(A) \cap [\tilde{\zeta} > u]) = \gamma^{-1}(\theta_t^{-1}(A)) \cap [\tilde{\zeta} > t + u]$$

est une tribu sur  $[\zeta > 0]$ .

On dira alors qu'un sous-processus  $\tilde{X}$  de  $X$  est canonique s'il est de la forme :

$$\tilde{X} = \{\tilde{\Omega}, \tilde{\zeta}, (\tilde{X}_t), \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{P}_X, (\tilde{\theta}_t)\}$$

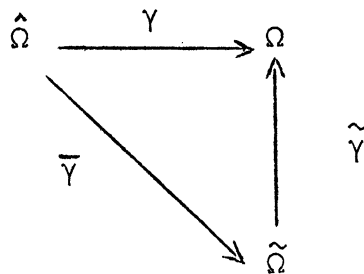
(où  $\tilde{\Omega}$ ,  $\tilde{\zeta}$ ,  $(\tilde{X}_t)$ ,  $\tilde{\mathcal{M}}$  et  $(\tilde{\theta}_t)$  sont les termes définis ci-dessus), et on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. - Tout sous-processus stationnaire d'un processus de Markov stationnaire est subordonné à un processus canonique.

Soit  $(\hat{X}, \gamma)$  un sous-processus du processus  $X$ .

Définissons l'application  $\bar{\gamma}$  de  $\hat{\Omega}$  dans  $\tilde{\Omega}$  en posant

$$\bar{\gamma}(\hat{\omega}) = (\gamma(\hat{\omega}), \hat{\zeta}(\hat{\omega}))$$



on vérifie alors que :

$$\tilde{\zeta}(\bar{\gamma}(\hat{\omega})) = \hat{\zeta}(\hat{\omega}) \quad \hat{\omega} \in \hat{\Omega}$$

$$\tilde{X}_t(\bar{\gamma}(\hat{\omega})) = \hat{X}_t(\hat{\omega}) \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \hat{\omega} \in [\hat{\zeta} > t]$$

$$\bar{\gamma}^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}) \subset \hat{\mathcal{M}}.$$

Ce qui nous permet de prendre pour  $\tilde{P}_X$  la mesure sur  $\tilde{\mathcal{M}}$  image de  $\hat{P}_X$  par  $\bar{\gamma}$ . On vérifie alors que le terme

$$\tilde{X} = \{\tilde{\Omega}, \tilde{\zeta}, (\tilde{X}_t), \tilde{\mathcal{M}}, (\tilde{P}_X), (\tilde{\theta}_t)\}$$

définit un processus de Markov stationnaire (et, par conséquent, un sous-processus canonique de  $X$ ).

D'où le résultat, puisque  $\hat{X}$  est subordonné à  $\tilde{X}$  par  $\bar{\gamma}$  d'après la définition de  $\bar{\gamma}$ .

### 3. Propriétés de la famille $(M_t)_{t \geq 0}$ introduite par l'axiome $(SM_5)$ .

La proposition 2.2 ci-dessous est une conséquence directe des axiomes  $(SM_5)$  et  $(SM_4)$  :

PROPOSITION 2.2. - Soient  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathcal{M}, (P_x), (\theta_t)\}$  un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ , et  $(\hat{X}, \gamma)$  un sous-processus de  $X$ .

1. Pour tout  $t \in R_+$ ,  $x \in E$  et  $A \in \mathcal{M}$ , on a

$$\hat{P}_x([\hat{\zeta} > t] \cap \bar{\gamma}^{-1}(A)) = \int_A M_t dP_x.$$

2. Pour tout  $t \in R_+$ ,  $x \in E$  et  $\varphi : \Omega \rightarrow R$   $\mathcal{M}$ -mesurable bornée, on a :

$$\int_{[\hat{\zeta} > t]} \varphi \circ \gamma d\hat{P}_x = \int \varphi M_t dP_x.$$

COROLLAIRE.

1.  $\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t] = E_x[M_t]$ ,  $t \in R_+$ ,  $x \in E$ .

2. Pour tout  $t \in R_+$ ,  $x \in E$  et  $\Gamma \in \mathcal{B}^*$ ,

$$\hat{P}_t(x, \Gamma) = \hat{P}_x[\hat{X}_t \in \Gamma] = E_x[1_{[X_t \in \Gamma]} \times M_t] = \int_{[X_t \in \Gamma]} M_t dP_x.$$

3. Pour tout  $t \in R_+$ ,  $x \in E$  et  $f \in G(E, \mathcal{B})$ ,

$$\hat{P}_t f(x) = E_x[f \circ X_t \times M_t] \leq E_x[f \circ X_t] = P_t f(x),$$

où  $(\hat{P}_t)$  désigne le semi-groupe de transformation de  $G(E, \mathcal{B}^*)$  associé à la fonction de transition de  $\hat{X}$ .

La proposition 2.3 ci-dessous montre que la famille  $(M_t)_{t \geq 0}$  définit le sous-processus  $\hat{X}$  à une équivalence près, ou exactement si  $\hat{X}$  est canonique.

PROPOSITION 2.3. - Soient  $(\hat{X}, \hat{\gamma})$  et  $(\bar{X}, \bar{\gamma})$  deux sous-processus d'un processus  $X$ ;  $(\hat{M}_t)_{t \geq 0}$  et  $(\bar{M}_t)_{t \geq 0}$  des familles correspondantes de fonctions introduites par l'axiome  $(SM_5)$ .

Pour que  $\hat{X}$  et  $\bar{X}$  soient équivalents, il faut et il suffit que  $\hat{M}_t = \bar{M}_t$   $P_x$  presque sûrement pour tout  $x \in E$ .

La condition est suffisante, car

$$\hat{P}_x[\hat{X}_t \in \Gamma] = \hat{P}_x[\hat{\zeta} > t] \cap \hat{\gamma}^{-1}([X_t \in \Gamma]) = \int_{[X_t \in \Gamma]} \hat{M}_t dP_x.$$

Pour montrer qu'elle est nécessaire, montrons que, si  $\hat{X}$  et  $\bar{X}$  sont équivalents, alors

$$\int_A \hat{M}_t dP_x = \int_A \bar{M}_t dP_x \text{ pour tout } A \in F_t^*.$$

Soit d'abord

$$A = \bigcap_{i=1}^n [X_{t_i} \in \Gamma_i] \text{ où } 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$$

on a :

$$\begin{aligned} \int_A \hat{M}_t dP_x &= \int_{\hat{\gamma}^{-1}(A)} \hat{M}_t \circ \hat{\gamma} d\hat{P}_x \quad \text{d'après } (SM_4) \\ &= \hat{P}_x([\hat{\zeta} > t] \cap \hat{\gamma}^{-1}(A)) \quad \text{d'après } (SM_5) \\ &= \hat{P}_x \bigcap_{i=1}^n [\hat{X}_{t_i} \in \Gamma_i] \quad \text{d'après } (SM_1) \text{ et } (SM_2) \end{aligned}$$

et de même

$$\int_A \bar{M}_t dP_x = \bar{P}_x \bigcap_{i=1}^n [\bar{X}_{t_i} \in \Gamma_i].$$

La proposition 1.2 montre alors que, si  $\hat{X}$  et  $\bar{X}$  sont équivalents,

$$\bar{P}_x \bigcap_{i=1}^n [\bar{X}_{t_i} \in \Gamma_i] = \hat{P}_x \bigcap_{i=1}^n [\hat{X}_{t_i} \in \Gamma_i]$$

d'où

$$\int_A \hat{M}_t dP_x = \int_A \bar{M}_t dP_x.$$

On en déduit que

$$\int_A \hat{M}_t dP_x = \int_A \bar{M}_t dP_x \quad \text{pour tout } A \in F_t$$

d'après le lemme 0.1 donc pour tout  $A \in F_t^*$ . Il en résulte que

$$\hat{M}_t = \bar{M}_t \quad P_x \text{ p. s. sur } [\zeta > t] ,$$

puisque  $\hat{M}_t$  et  $\bar{M}_t$  sont  $F_t^*$ -mesurables sur  $[\zeta > t]$ .

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - Si deux sous-processus canoniques  $\hat{X}$  et  $\bar{X}$  d'un processus  $X$  sont équivalents, ils coïncident.

L'ensemble des  $B \in \tilde{\mathcal{M}}$  tels que

$$(1) \quad \hat{P}_x(B) = \bar{P}_x(B)$$

est un  $\lambda$ -système. Comme  $\tilde{\mathcal{M}}$  est engendré par le  $\pi$ -système  $\mathcal{N}$  formé des ensembles  $A \cap [\zeta > t] \times ]t, +\infty)$  et  $A \times [0, +\infty) = \tilde{\gamma}^{-1}(A)$ , il suffit, d'après le lemme 0.1, de vérifier (1) pour tout  $B \in \mathcal{N}$ .

Si  $B = \tilde{\gamma}^{-1}(A)$ ,  $\hat{P}_x(B) = \bar{P}_x(B)$  d'après  $(SM_4)$ .

Si  $B = A \cap [\zeta > t] \times ]t, +\infty)$ ,  $B = \tilde{\gamma}^{-1}(A) \cap [\tilde{\zeta} > t]$  donc

$$\hat{P}_x(B) = \int_A \hat{M}_t dP_x \quad \text{et} \quad \bar{P}_x(B) = \int_A \bar{M}_t dP_x ,$$

d'où le résultat d'après la proposition 2.3.

COROLLAIRE 2. - Soient  $X$  un processus de Markov stationnaire, et  $\hat{X}$  un sous-processus de  $X$ . Si  $(M_t)$  et  $(M_t^!)$  sont deux familles de fonctions satisfaisant à l'axiome  $(SM_5)$  relativement à  $\hat{X}$ , alors pour tout  $t \in R_+$  et  $x \in E$ ,

$$M_t = M_t^! \quad P_x \text{ presque sûrement} .$$

Le théorème 2.1 ci-dessous donne les propriétés fondamentales de la famille  $(M_t)_{t \geq 0}$ .

THÉORÈME 2.1. - Soient  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathcal{N}, (P_x), (\theta_t)\}$  un processus de Markov stationnaire, et  $(\hat{X}, \gamma)$  un sous-processus de  $X$ .

La famille  $(M_t)_{t \geq 0}$  d'applications de  $\Omega$  dans  $[0, 1]$  introduites par l'axiome  $(SM_5)$  possède les propriétés suivantes :

1° Pour tout  $s, t$  et  $x \in E$ ,

$$M_{s+t} = M_s \cdot (M_t \circ \theta_s) \quad P_x \text{ presque sûrement sur } [\zeta > s + t] \quad .$$

2° Pour tout  $x \in E$ , et toute suite  $(t_n)$  décroissant vers  $t \in R_+$ ,

$$\lim_{t_n \downarrow t} M_{t_n} = M_t \quad P_x \text{ presque sûrement sur } \Omega \quad .$$

COROLLAIRE.

a. Pour tout  $x \in E$  et  $t \in R_+$ ,

$$0 \leq M_t \leq 1 \quad .$$

b. Pour tout  $x \in E$ ,  $s, t \in R_+$ ,

$$M_{s+t} \leq M_s \quad P_x \text{ presque sûrement} \quad .$$

Le corollaire résulte de la définition de  $M_t$  pour (a) et du 1° pour (b).

Montrons le 2° : Soit  $(t_n)$  une suite décroissant vers  $t$  ; la suite d'ensembles  $[\hat{\zeta} > t_n]$  croît vers  $[\hat{\zeta} > t]$  :

$$[\hat{\zeta} > t] = \bigcup_n [\hat{\zeta} > t_n] \quad ;$$

donc, si  $A \in \mathcal{M}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_x \gamma^{-1}(A) \cap [\hat{\zeta} > t_n] = \hat{P}_x \gamma^{-1}(A) \cap [\hat{\zeta} > t] \quad .$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A M_{t_n} dP_x = \int_A M_t dP_x \quad .$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{t_n} = M_t \quad P_x \text{ presque sûrement} \quad ,$$

puisque  $M_{t_n}$  et  $M_t$  sont  $\mathbb{M}$ -mesurables <sup>(14)</sup>.

Montrons enfin le 1°. Pour cela montrons d'abord que, si  $A \in F_s$ ,  $B \in F_t$ , et  $D = A \cap \theta_s^{-1}(B)$ , on a :

$$(1) \quad P_x^1(\gamma^{-1}(D) \cap [\hat{\zeta} > s + t]) = E_x[1_D \times M_s \times M_t \circ \theta_s]$$

où  $1_D$  désigne la fonction caractéristique de  $D$ .

Le 1° en résulte ; en effet, d'une part, les ensembles  $A \cap \theta_s^{-1}(B)$ ,  $A \in F_s$ ,  $B \in F_t$ , forment un  $\pi$ -système qui contient les ensembles

$$\bigcap_{i=1}^n [X_{t_i} \in \Gamma_i], \quad 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq s + t, \quad \Gamma_i \in \mathcal{G},$$

donc engendre  $F_{t+s}$  ; d'autre part les ensembles  $D \in \mathbb{M}$  tels que (1) soit vérifiée forment un  $\lambda$ -système.

Il en résulte donc d'après le lemme 0.1 que (1) est vérifiée pour tout  $D \in F_{s+t}$ , donc pour tout  $D \in F_{s+t}^*$ . Comme par ailleurs, on a d'après (SM<sub>5</sub>)

$$\hat{P}_x(\gamma^{-1}(D) \cap [\hat{\zeta} > s + t]) = \int_D M_{s+t} dP_x,$$

on a

$$\int_D M_{s+t} dP_x = \int_D M_s \times M_t \circ \theta_s dP_x$$

d'où, puisque  $M_{s+t}$  et  $M_s \times M_t \circ \theta_s$  sont  $F_{s+t}^*$ -mesurables,

$$M_{s+t} = M_s \times M_t \circ \theta_s \quad P_x \text{ presque sûrement sur } [\hat{\zeta} > t + s].$$

Soient donc  $A \in F_s$ ,  $B \in F_t$  et  $D = A \cap \theta_s^{-1}(B)$ .

Remarquons d'abord que  $\gamma^{-1}(A) \cap [\hat{\zeta} > s] \in \hat{F}_s$ . En effet, l'ensemble des  $A \in F_s$  qui satisfont cette relation est une tribu, et contient les ensembles  $[X_u \in \Gamma]$ ,  $u \leq s$ ,  $\Gamma \in \mathcal{G}$ . On a alors

$$\gamma^{-1}(D) \cap [\hat{\zeta} > s + t] = \gamma^{-1}(A) \cap [\hat{\zeta} > s] \cap \gamma^{-1}(\theta_s^{-1}(B)) \cap [\hat{\zeta} > s + t];$$

---

<sup>(14)</sup> Rappelons (cf. chapitre 1, n° 4, remarque 3) que  $\mathbb{M} \supset F^*$ .

mais, d'après (SM<sub>3</sub>),

$$\gamma^{-1}(\theta_s^{-1}(B)) \cap [\hat{\zeta} > s + t] = \hat{\theta}_s^{-1}(\gamma^{-1}(B) \cap [\hat{\zeta} > t]) \quad ;$$

d'où, en utilisant la propriété de Markov (proposition 1.3) pour le processus  $\hat{X}$ , on obtient :

$$\hat{P}_x(\gamma^{-1}(D) \cap [\hat{\zeta} > s + t]) = \int_{\gamma^{-1}(A) \cap [\hat{\zeta} > s]} \hat{P}_{\hat{X}_s}(\gamma^{-1}(B) \cap [\hat{\zeta} > t]) d\hat{P}_x \quad .$$

Par ailleurs

$$\hat{P}_y(\gamma^{-1}(B) \cap [\hat{\zeta} > t]) = \int_B M_t dP_y = E_y[1_B \cdot M_t] \quad ,$$

d'après la proposition 2.2.

Donc, de nouveau d'après la proposition 2.2,

$$\hat{P}_x(\gamma^{-1}(D) \cap [\hat{\zeta} > s + t]) = \int_A M_s \times E_{X_s}[1_B \cdot M_t] dP_x \quad ,$$

et, en appliquant encore la propriété de Markov,

$$\begin{aligned} \hat{P}_x(\gamma^{-1}(D) \cap [\hat{\zeta} > s + t]) &= \int_A M_s \times (1_B \cdot M_t) \circ \theta_s dP_x \\ &= \int_{A \cap \theta_s^{-1}(B)} M_s \times M_t \circ \theta_s dP_x \\ &= \int_D M_s \times M_t \circ \theta_s dP_x = E_x[1_D \times M_s \times M_t \circ \theta_s] \quad . \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

### Chapitre 3. - Fonctionnelles multiplicatives de Markov.

#### 1. Définition.

Les propriétés 1° et 2° de la famille  $(M_t)_{t \geq 0}$  (théorème 2.1) introduisent la définition suivante.

DÉFINITION 3.1. - Soit  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathbb{P}, (P_x), (\theta_t)\}$  un processus de Markov stationnaire. On appelle fonctionnelle multiplicative de Markov du processus  $X$  toute famille  $(M_t)_{t \geq 0}$  d'applications de  $\Omega$  dans  $R$  telle que :

(FM<sub>1</sub>) Pour tout  $t \in R_+$ ,  $0 \leq M_t \leq 1$ , et  $M_t(\omega) = 0$  pour tout  $\omega \in [\zeta \leq t]$ .

(FM<sub>2</sub>) Pour tout  $\omega \in \Omega$ , l'application  $t \rightarrow M_t(\omega)$  de  $R_+$  dans  $(0, 1)$  est continue à droite et décroissante.

(FM<sub>3</sub>) Pour tout  $t \in R_+$ , la restriction de  $M_t$  à  $[\zeta > t]$  est  $F_t^*$ -mesurable.

(FM<sub>4</sub>) Pour tout  $s, t \in R_+$ , et  $x \in E$ ,

$$M_{s+t} = M_s \times M_t \circ \theta_s \quad P_x \text{ presque sûrement sur } [\zeta > s + t] \quad .$$

Remarque. - L'axiome (FM<sub>4</sub>) peut aussi s'énoncer ainsi :

Pour tout  $s, t$  et  $x \in R$ ,

$$P_x([M_{t+s} \neq M_s \times M_t \circ \theta_s] \cap [\zeta > t + s]) = 0$$

et alors on a aussi

$$P_\mu([M_{t+s} \neq M_s \times M_t \circ \theta_s] \cap [\zeta > t + s]) = 0$$

pour toute répartition initiale  $\mu$ .

DÉFINITION 3.2. - On dit que deux fonctionnelles multiplicatives  $(M_t)$  et  $(M_t')$  du processus  $X$  sont équivalentes, si  $P_x([M_t \neq M_t']) = 0$  pour tout  $t \in R_+$  et  $x \in E$ .

## 2. Exemples.

Exemple 1. - Soient  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathbb{P}, (P_x), (\theta_t)\}$  un processus de Markov stationnaire, et  $T$  une application de  $\Omega$  dans  $(0, +\infty)$  telle que

(TE<sub>1</sub>)  $0 \leq T(\omega) \leq \zeta(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .

(TE<sub>2</sub>) Pour  $t \in R_+$  et  $\omega \in [T > t]$ ,

$$T(\theta_t(\omega)) = T(\omega) - t \quad .$$

(TE<sub>3</sub>)  $[T > t] \in F_t^*$  pour tout  $t \in R_+$ .

Si on pose  $M_t = 1_{[T > t]}$ ,  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une fonctionnelle multiplicative du processus  $X$ . On a même dans ce cas :

(FM<sub>4</sub><sup>1</sup>)  $M_{s+t}(\omega) = M_s(\omega) \times M_t(\theta_s(\omega))$  pour tout  $s, t$  et  $\omega \in [\zeta > t + s]$  <sup>(15)</sup>.

(FM<sub>4</sub><sup>1</sup>) résulte en effet de la relation  $[T > s + t] = [T > s] \cap [T \circ \theta_s > t]$ , qui résulte elle-même de (TE<sub>2</sub>).

En particulier : Soient  $X$  le processus introduit dans le théorème 1.1,  $\Gamma$  un sous-ensemble de  $E$  et  $T = T_\Gamma$  le temps d'entrée dans l'ensemble  $\Gamma$  ; on a :

$$T_\Gamma(\omega) = \inf\{t \mid \omega \in [X_t \in \Gamma]\} \text{ s'il existe } t < \zeta(\omega) \text{ tel que } X_t(\omega) \in \Gamma,$$

et

$$T_\Gamma(\omega) = \zeta(\omega) \text{ si } X_t(\omega) \notin \Gamma \text{ pour tout } t < \zeta(\omega) ;$$

et  $T_\Gamma$  satisfait aux relations (TE<sub>1</sub>) et (TE<sub>2</sub>). Si  $\Gamma$  est un ensemble borélien dans  $E$ , on peut montrer <sup>(16)</sup> que l'on a aussi  $[T_\Gamma > t] \in F_t^*$  pour tout  $t \in R_+$ . Si  $M_t = 1_{[T_\Gamma > t]}$ , pour tout  $t \in R_+$ ,  $(M_t)$  est donc une fonctionnelle multiplicative du processus  $X$ .

Exemple 2. - Soient  $X$  un processus de Markov et  $(M_t)_{t \geq 0}$  une fonctionnelle multiplicative du processus  $X$  satisfaisant (FM<sub>4</sub><sup>1</sup>) (exemple 1). Posons, pour tout  $\omega \in \Omega$  :

$$T_1(\omega) = \inf\{t \mid t \geq 0 \text{ et } M_t(\omega) = 0\}, \text{ s'il existe } t < \zeta(\omega) \text{ tel que } M_t(\omega) = 0,$$

et

$$T_1(\omega) = \zeta(\omega) \text{ si } M_t(\omega) \neq 0 \text{ pour tout } t < \zeta(\omega).$$

La fonction  $T_1$  ainsi définie satisfait (TE<sub>1</sub>), (TE<sub>2</sub>) (à cause de (FM<sub>4</sub><sup>1</sup>)) et (TE<sub>3</sub>) (à cause de la relation  $[T_1 > t] = [M_t > 0]$ ). Il lui correspond donc une fonctionnelle multiplicative  $N_t = 1_{[T_1 > t]}$ .

Si  $M_t$  est elle-même obtenue à partir d'une fonction  $T$  (exemple 1), alors  $M_t = N_t$  pour tout  $t \in R_+$ .

<sup>(15)</sup> Toute fonctionnelle multiplicative vérifiant (FM<sub>4</sub><sup>1</sup>) est dite parfaite.

<sup>(16)</sup> Cf. par exemple [3], exposé n° 5, p. 9.

Exemple 3 (Fonctionnelles multiplicatives de type intégral).

Soit  $X$  un processus de Markov à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ , tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , l'application  $(u, \omega) \rightarrow X_u(\omega)$  de  $[0, t[ \times [\zeta > t]$  dans  $\mathcal{B}$  soit mesurable lorsque  $[0, t[$  est muni de sa tribu borélienne, et  $[\zeta > t]$  de la tribu  $\mathcal{F}_t^*$ , et soit  $h$  une fonction positive de  $G(E, \mathcal{B}^*)$ .  
Posons :

$$M_t(\omega) = \exp\left(-\int_0^t h(X_u(\omega)) du\right) \text{ si } \omega \in [\zeta > t],$$

et

$$M_t(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin [\zeta > t].$$

$(M_t)_{t \geq 0}$  est une fonctionnelle multiplicative du processus  $X$  satisfaisant  $(FM_4)$ .

Cas particulier :  $h = \lambda = \text{Cte}$  donne la fonctionnelle  $M_t = \exp(-\lambda t) 1_{[\zeta > t]}$ .

3. Fonctionnelles multiplicatives de Markov et sous-processus.

A tout sous-processus correspond une fonctionnelle multiplicative :

THEOREME 3.1. - Soient  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathcal{M}, (P_x), (\theta_t)\}$  un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ , et  $(\hat{X}, \gamma)$ ,  $\hat{X} = \{\hat{\Omega}, \hat{\zeta}, (\hat{X}_t), \hat{\mathcal{M}}, (\hat{P}_x), (\hat{\theta}_t)\}$ , un sous-processus de  $X$ .

Alors, il existe une fonctionnelle multiplicative  $(N_t)_{t \geq 0}$  du processus  $X$ , et une seule, à une équivalence près, telle que :

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in E$ ,  $\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t \mid \gamma^{-1}(\mathcal{M})] = N_t \circ \gamma \hat{P}_x$  presque sûrement.

- L'unicité, à une équivalence près, résulte du corollaire 2 de la proposition 2.3, et de la définition 3.2.

- Pour montrer l'existence de  $(N_t)_{t \geq 0}$ , partons de la famille  $(M_t)_{t \geq 0}$  de fonctions qui existe d'après  $(SM_5)$ .

D'après le théorème 2.1, le problème est de "régulariser"  $(M_t)$  pour rendre l'application  $t \rightarrow M_t(\omega)$  continue à droite et décroissante pour tout  $\omega$ , et pas seulement  $P_x$  presque sûrement.

Pour tout  $p, q \in \mathbb{R}_+$ , soit

$$A_{p,q} = [M_{p+q} \neq M_p \times M_q \circ \theta_p] \cap [\zeta > p + q] \quad .$$

D'après le théorème 2.1, 1°,  $P_x(A_{p,q}) = 0$  pour tout  $x \in E$ , donc  $P_\mu(A_{p,q}) = 0$  pour toute répartition initiale  $\mu$ . Soit

$$A = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}_+} A_{p,q} \quad (\mathbb{Q}_+ \text{ désignant l'ensemble des rationnels positifs}) \quad .$$

On a alors

$$P_\mu(A) = 0, \text{ pour tout } \mu,$$

$$M_{p+q}(\omega) = M_p(\omega) M_q(\theta_p(\omega)) \text{ pour tout } p, q \in \mathbb{Q}_+$$

et

$$\omega \in [\zeta > p + q] \cap CA \quad .$$

Il en résulte que, pour  $\omega \notin A$ , l'application  $p \rightarrow M_p(\omega)$  de  $\mathbb{Q}_+$  dans  $(0, 1)$  est décroissante.

Posons alors

$$N_t(\omega) = \lim_{p \downarrow t, p \in \mathbb{Q}_+} M_p(\omega) \text{ pour } \omega \notin A$$

$$N_t(\omega) = 1_{[\zeta > t]}(\omega) \text{ pour } \omega \in A \quad .$$

$N_t$  est  $F^*$ -mesurable, et, d'après le théorème 2.1, 2°,

$$P_x[N_t \neq M_t] = 0$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $x \in E$ , donc

$$P_\mu[N_t \neq M_t] = 0$$

pour tout  $\mu$ . Il en résulte que  $N_t$  est  $F_t^*$ -mesurable sur  $[\zeta > t]$  pour tout  $t$ , donc que  $(N_t)_{t \geq 0}$  vérifie  $(FM_3)$ . Il est clair que  $(N_t)_{t \geq 0}$  vérifie  $(FM_1)$  et  $(FM_2)$ .

Enfin, pour montrer que  $(N_t)_{t \geq 0}$  vérifie  $(FM_4)$ , il suffit de montrer que,  $s, t$  et  $x$  étant fixés,

$$P_x(\theta_s^{-1}[N_t \neq M_t]) = 0 \quad .$$

Or, d'après la propriété de Markov appliquée au processus  $X$ ,

$$[P_x(\theta_s^{-1}[N_t \neq M_t])] = E_x[P_{X_s}[N_t \neq M_t]] = 0$$

C. Q. F. D.

Inversement, à toute fonctionnelle multiplicative correspond un sous-processus.

**THÉORÈME 3.2.** - Soient  $X$  un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ , et  $(M_t)_{t \geq 0}$  une fonctionnelle multiplicative du processus  $X$ .

Alors, il existe un sous-processus canonique  $(\tilde{X}, \gamma)$  de  $X$  et un seul, tel que : pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $x \in E$  :

$$(1) \quad \tilde{P}_x[\tilde{\zeta} > t \mid \tilde{\gamma}^{-1}(\mathcal{M})] = M_t \circ \gamma \quad \tilde{P}_x \text{ presque sûrement} ;$$

et la fonction de transition  $\tilde{P}_t(x, \Gamma)$  de  $\tilde{X}$  est donnée par

$$\tilde{P}_t(x, \Gamma) = E_x[1_\Gamma \circ X_t \cdot M_t] = \int_{[X_t \in \Gamma]} M_t dP_x .$$

- L'unicité résulte de la proposition 2.3 et de son corollaire 1.

- Pour montrer l'existence, <sup>(17)</sup> nous avons à construire pour chaque  $x \in E$ , une probabilité  $\tilde{P}_x$  sur  $\tilde{\mathcal{M}}$  (cf. chapitre 2, n° 1) telle que :

$$1. \quad \tilde{X} = \{\tilde{\Omega}, \tilde{\zeta}, (\tilde{X}_t), \tilde{\mathcal{M}}, (\tilde{P}_x), (\tilde{\theta}_t)\} \text{ est un processus de Markov} .$$

$$2. \quad \tilde{P}_x(\tilde{\gamma}^{-1}(B)) = P_x(B), \quad \forall B \in \mathcal{M} \quad (SM_4) .$$

$$3. \quad \tilde{P}_x(\tilde{\gamma}^{-1}(B) \cap [\tilde{\zeta} > t]) = \int_B M_t dP_x, \quad \forall B \in \mathcal{M} \quad (\text{relation (1)}) .$$

Supposons le problème résolu.

(3) s'écrit encore

$$(1') \quad \tilde{P}_x(B \cap [\zeta > t] \times ]t, +\infty)) = \int 1_{B \cap [\zeta > t]} \times M_t dP_x .$$

D'autre part, les axiomes  $(FM_1)$  et  $(FM_2)$  impliquent l'existence, pour chaque

---

<sup>(17)</sup> Cf. en appendice une autre démonstration de l'existence.

$\omega \in \Omega$ , d'une probabilité  $\Gamma \rightarrow \alpha(\omega, \Gamma)$  sur  $([0, +\infty), \mathcal{B}_{[0, +\infty)})$  <sup>(18)</sup> telle que

$$\alpha(\omega, ]t, +\infty) = M_t(\omega), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

(1') s'écrit alors

$$\tilde{P}_x(B \cap [\zeta > t] \times ]t, +\infty) = \int 1_{B \cap [\zeta > t]}(\omega) \alpha(\omega, ]t, +\infty) dP_x(\omega);$$

mais si, pour tout  $A \subset \Omega \times [0, +\infty) = \tilde{\Omega}$ , et  $\omega \in \Omega$ , on pose

$$A^\omega = \{\lambda \mid \lambda \in [0, +\infty) \text{ et } (\omega, \lambda) \in A\},$$

pour  $A = B \cap [\zeta > t] \times ]t, +\infty)$ , on a :

$$1_{A^\omega} = 1_{B \cap [\zeta > t]}(\omega) 1_{]t, +\infty)}$$

donc

$$(1'') \quad \tilde{P}_x(A) = \int \alpha(\omega, A^\omega) dP_x(\omega).$$

La relation (1'') va nous permettre inversement de construire  $\tilde{P}_x$  :

Pour tout  $A \subset \tilde{\Omega}$ ,  $A \in \mathcal{M} \times \mathcal{B}_{[0, +\infty)}$ ,  $A^\omega \in \mathcal{B}_{[0, +\infty)}$ , et la fonction

$\omega \rightarrow \alpha(\omega, A^\omega)$  est  $\mathcal{M}$ -mesurable (en vertu du lemme 0.1). Posons

$$\tilde{P}_x(A) = \int \alpha(\omega, A^\omega) dP_x(\omega)$$

pour tout  $x \in E$  et  $A \in \mathcal{M} \times \mathcal{B}_{[0, +\infty)}$ ;  $\tilde{P}_x(A)$  est une probabilité sur

$\mathcal{M} \times \mathcal{B}_{[0, +\infty)}$ , donc aussi sur  $\tilde{\mathcal{M}}$  qui est contenu dans  $\mathcal{M} \times \mathcal{B}_{[0, +\infty)}$ . D'après ce qui a déjà été vu, la relation (1') est satisfaite pour tout  $B \in \mathcal{M}$ , donc aussi 3, et 2 résulte de ce que, si  $A = B \times [0, +\infty) = \tilde{\gamma}^{-1}(B)$ , ( $B \in \mathcal{M}$ ),

$$\alpha(\omega, A^\omega) = 1_B(\omega).$$

Il reste à montrer que  $\tilde{X}$  est un processus de Markov, c'est-à-dire que les axiomes  $(M_4)$  et  $(M_5)$  sont satisfaits :

α. Pour tout  $t, x$  et  $\Gamma \in \mathcal{B}$ , soit

---

<sup>(18)</sup>  $\mathcal{B}_{[0, +\infty)}$  désignant la tribu borélienne de  $[0, +\infty)$ .

$$\tilde{P}_t(x, \Gamma) = \tilde{P}_x[\tilde{X}_t \in \Gamma]$$

d'après la relation 1', où  $B = [X_t \in \Gamma]$ ,

$$\tilde{P}_t(x, \Gamma) = E_x[1_{[X_t \in \Gamma]} \times M_t] = E_x[1_\Gamma \circ X_t \times M_t] \quad .$$

Il résulte alors du théorème 4.1 <sup>(19)</sup> que  $\{\tilde{P}_t(x, \Gamma)\}$  est une fonction de transition sous-markovienne sur  $(E, \mathcal{B}^*)$ ;  $(M_t)$  est donc satisfait.

$\beta$ . Montrons enfin que

$$\tilde{P}_x[\tilde{X}_t \in \Gamma \mid \tilde{F}_s] = \tilde{P}_{t-s}(\tilde{X}_s, \Gamma)$$

si  $s \leq t$ ,  $\Gamma \in \mathcal{B}$ ,  $x \in E$ ; c'est-à-dire

$$\tilde{P}_x([\tilde{X}_t \in \Gamma] \cap A) = \int_A \tilde{P}_{t-s}(\tilde{X}_s, \Gamma) d\tilde{P}_x \text{ pour tout } A \in \tilde{F}_s \quad .$$

D'une part, tout  $A \in \tilde{F}_s$  est de la forme  $\tilde{\gamma}^{-1}(B) \cap [\tilde{\zeta} > s]$ , où  $B \in \mathcal{F}_s$ ; d'autre part,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_x([\tilde{X}_t \in \Gamma] \cap [\tilde{\zeta} > s] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(B)) &= \tilde{P}_x([\tilde{\zeta} > t] \cap \tilde{\gamma}^{-1}[X_t \in \Gamma] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(B)) \\ &= \int_{[X_t \in \Gamma] \cap B} M_t dP_x \end{aligned}$$

d'après la proposition 2.2 ;

$$\begin{aligned} &= \int_B 1_{[X_t \in \Gamma]} M_s \times M_{t-s} \circ \theta_s dP_x \\ &= \int 1_B \times M_s \times 1_\Gamma \circ X_{t-s} \circ \theta_s \times M_{t-s} \circ \theta_s dP_x \\ &= E_x[1_B \times M_s \times E_{X_s}[1_\Gamma \circ X_{t-s} \cdot M_{t-s}]] \end{aligned}$$

d'après la propriété de Markov (proposition 1.3).

Enfin,

$$E_y[1_\Gamma \circ X_{t-s} \times M_{t-s}] = \tilde{P}_y[\tilde{X}_{t-s} \in \Gamma] \quad ,$$

---

<sup>(19)</sup> La démonstration de ce théorème, donnée au chapitre 4, est indépendante des résultats de ce numéro.

encore d'après la proposition 2.2.

Il en résulte que, si  $A = \tilde{\gamma}^{-1}(B) \cap [\tilde{\zeta} > s]$ ,  $B \in \mathcal{F}_s$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_x([\tilde{X}_t \in \Gamma] \cap A) &= \int 1_B M_s \tilde{P}_{\tilde{X}_s}[\tilde{X}_{t-s} \in \Gamma] dP_x \\ &= \int_A \tilde{P}_{\tilde{X}_s}[\tilde{X}_{t-s} \in \Gamma] dP_x, \end{aligned}$$

toujours d'après la proposition 2.2 ; d'où le résultat, puisque

$$\tilde{P}_{t-s}(\tilde{X}_s, \Gamma) = \tilde{P}_{\tilde{X}_s}[\tilde{X}_{t-s} \in \Gamma].$$

DÉFINITION 3.2. - Soient  $X$  un processus de Markov stationnaire,  $(\hat{X}, \gamma)$  un sous-processus de  $X$ , et  $(M_t)_{t \geq 0}$  une fonctionnelle multiplicative de  $X$ . On dit que la fonctionnelle multiplicative  $(M_t)_{t \geq 0}$  est associée au sous-processus  $(\hat{X}, \gamma)$  si, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $x \in E$ ,

$$\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t \mid \gamma^{-1}(\mathcal{M})] = M_t \circ \gamma \hat{P}_x \text{ presque sûrement.}$$

Il résulte alors des théorèmes 3.1, 3.2 et de la proposition 2.3 (chapitre 2) qu'il existe une application biunivoque de l'ensemble des classes de sous-processus équivalents d'un processus  $X$ , sur l'ensemble des classes de fonctionnelles multiplicatives équivalentes de  $X$ . Cette application fait correspondre à toute classe de sous-processus équivalent, la classe des fonctionnelles multiplicatives associées.

Application : Construction de sous-processus d'un processus donné. - A chacun des exemples de fonctionnelle multiplicative donné au n° 2 ci-dessus, le théorème 3.2 permet d'associer un sous-processus du processus donné.

En particulier, si on reprend l'exemple 1, le sous-processus introduit par le théorème 3.2 est identique au sous-processus canonique associé (proposition 2.1) au sous-processus construit dans l'exemple 1 du n° 2 du chapitre 2.

## Chapitre 4. - Semi-groupes subordonnés.

### 1. Définition et exemples.

L'objet du présent chapitre est l'étude des fonctions de transition des sous-processus d'un processus de Markov donné.

Le corollaire de la proposition 2.2 introduit la définition suivante :

**DÉFINITION 4.1.** - Soient  $(E, \mathcal{B})$  un espace mesurable, et  $\{P_t\}$  un semi-groupe de transformations linéaires positives contractantes de  $G(E, \mathcal{B})$ .

On appelle semi-groupe subordonné à  $\{P_t\}$ , tout semi-groupe  $\{Q_t\}$  de transformations linéaires de  $G(E, \mathcal{B}^*)$  <sup>(20)</sup> telles que :

(SB) Pour tout  $f \in G(E, \mathcal{B}^*)$ ,  $f \geq 0$ , tout  $x \in E$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq Q_t f(x) \leq P_t f(x)$ .

(CD) Pour tout  $x \in E$ , la fonction  $t \rightarrow Q_t^{-1}(x)$  est continue à droite.

D'après (SB), pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $Q_t$  est une transformation positive contractante ( $\|Q_t f\| \leq \|f\|$ ,  $f \in G$ ) de  $G(E, \mathcal{B}^*)$ .

Exemple 1. - Soient  $\lambda > 0$ , et  $Q_t f(x) = \exp(-\lambda t) P_t f(x)$  pour  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in E$ .  $\{Q_t\}$  est un semi-groupe subordonné à  $\{P_t\}$ .

Exemple 2. - Soient  $X$  un processus de Markov stationnaire sur l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ , et  $\{P_t\}$  le semi-groupe associé à sa fonction de transition.

On a  $P_t^{-1}(x) = P_x[\zeta > t]$ , donc  $\{P_t\}$  satisfait l'axiome (CD);  $\{P_t\}$  est donc subordonné à lui-même.

Si  $(\hat{X}, \gamma)$  est un sous-processus de  $X$ , et si  $\{Q_t\}$  est le semi-groupe de transformations de  $G(E, \mathcal{B}^*)$  associé à la fonction de transition de  $\hat{X}$ ,  $\{Q_t\}$  est un semi-groupe subordonné à  $\{P_t\}$  (corollaire de la proposition 2.2).

Exemple 3. - Cf. ci-dessous le théorème 4.1.

---

<sup>(20)</sup> Où  $\mathcal{B}^*$  désigne la tribu des ensembles universellement mesurables (cf. chapitre 0, n° 3) par rapport à  $(E, \mathcal{B})$ .

## 2. Semi-groupes subordonnés et fonctionnelles multiplicatives.

THÉOREME 4.1. - Soient  $X$  un processus de Markov stationnaire sur l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ ,  $\{P_t\}$  le semi-groupe associé à sa fonction de transition, et  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  une fonctionnelle multiplicative du processus  $X$ .

Alors, si on pose

$$Q_t f(x) = E_x[f \circ X_t \cdot M_t]$$

pour tout  $x \in E$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $f \in G(E, \mathcal{B}^*)$ ,  $\{Q_t\}$  est un semi-groupe subordonné à  $\{P_t\}$ , qui est dit associé à la fonctionnelle  $(M_t)_{t \geq 0}$ .

Cette proposition résulte évidemment du théorème 3.2 et de l'exemple 2 ci-dessus.

Donnons une démonstration directe. D'abord, pour tout  $f \in G(E, \mathcal{B}^*)$ ,  $Q_t f \in G(E, \mathcal{B}^*)$  (chapitre 1, n° 4 b, remarque 1).

Montrons ensuite la relation  $Q_{t+s} = Q_t \circ Q_s$  : soit  $f \in G(E, \mathcal{B}^*)$ , et  $x \in E$

$$Q_{t+s} f(x) = E_x[f \circ X_{t+s} \times M_{t+s}] = \int_{[\zeta > t+s]} f \circ X_{t+s} \times M_{t+s} dP_x.$$

Soit  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$\varphi(\omega) = f(X_s(\omega)) \text{ si } \omega \in [\zeta > s] \text{ et } \varphi(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin [\zeta > s].$$

On a

$$\varphi \circ \theta_t(\omega) = f(X_{t+s}(\omega)) \text{ si } \omega \in \theta_t^{-1}[\zeta > s] = [\zeta > t+s],$$

et

$$\varphi \circ \theta_t(\omega) = 0 \text{ ailleurs.}$$

Donc

$$\varphi \circ \theta_t^{-1}[\zeta > t] = f \circ X_{t+s} \times 1_{[\zeta > t+s]}.$$

On a donc

$$Q_{t+s} f(x) = \int_{[\zeta > t]} \varphi \circ \theta_t \times M_t \times M_s \circ \theta_t dP_x ;$$

d'où, d'après la propriété de Markov (proposition 1.3),

$$\begin{aligned}
Q_{t+s} f(x) &= \int_{[\zeta > t]} M_t \times E_{X_t} [\varphi M_s] dP_x = \int_{[\zeta > t]} M_t \times E_{X_t} [f \circ X_s \times M_s] dP_x \\
&= \int_{[\zeta > t]} M_t \times Q_s f \circ X_t dP_x = Q_t Q_s f(x) .
\end{aligned}$$

Si  $f \geq 0$ ,  $f \in G(E, \mathcal{B}^*)$ , la relation  $0 \leq Q_t f(x) \leq P_t f(x)$  résulte de ce que  $0 \leq M_t \leq 1$ . Enfin la continuité à droite de  $t \rightarrow Q_t 1(x)$  résulte de celle de  $t \rightarrow M_t(\omega)$  (pour tout  $\omega \in \Omega$ ) et du théorème de Lebesgue.

**PROPOSITION 4.1.** - Pour que deux fonctionnelles multiplicatives  $(M_t)$  et  $(N_t)$  d'un processus  $X$  soient équivalentes, il faut et il suffit qu'elles aient même semi-groupe associé.

Soient  $\hat{X}$  est un sous-processus de  $X$  tel que  $(M_t)$  est la fonctionnelle multiplicative associée à  $\hat{X}$  (chapitre 3, théorème 3.2 et définition 3.2), et  $\{Q_t\}$  le semi-groupe associé à la fonction de transition de  $\hat{X}$ . On a (théorème 3.2) :

$$Q_t f(x) = E_x [f \circ X_t M_t] \quad (f \in G(E, \mathcal{B}^*)) .$$

Autrement dit,  $\{Q_t\}$  est le semi-groupe associé à  $(M_t)$ . La proposition résulte alors de la proposition 2.3 du chapitre 2.

On peut aussi la démontrer à l'aide du lemme suivant et du lemme 0.2.

**LEMME 4.1.** - Soient  $X$  un processus de Markov stationnaire  $(M_t)_{t \geq 0}$  une fonctionnelle multiplicative de  $X$ , et  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ . Pour tout  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , bornée et  $F_{t_0}^*$ -mesurable sur  $[\zeta > t_0]$ , tout  $f \in G(E, \mathcal{B}^*)$ ,  $s \in \mathbb{R}_+$  et  $x \in E$ , on a

$$E_x [h \times M_{t_0+s} \times f \circ X_{t_0+s}] = E_x [h \times M_{t_0} \times Q_s f \circ X_{t_0}]$$

où  $\{Q_s\}$  désigne le semi-groupe associé à  $(M_t)$ .

Le théorème 4.1 admet la réciproque suivante <sup>(21)</sup> :

**THÉORÈME 4.2.** - Soient  $E$  un espace topologique admettant une base dénombrable d'ouverts <sup>(22)</sup>, et  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathcal{M}, (P_x), (\theta_t)\}$  un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B}_E)$  et tel que :

<sup>(21)</sup> Cf. [2], théorème 2.2, page 18.

<sup>(22)</sup> Cf. remarque 1 ci-dessous.

1. Pour tout  $\omega \in \Omega$ , l'application  $t \rightarrow X_t(\omega)$  est continue à droite (autrement dit,  $X$  a ses trajectoires continues à droite).

2. Si  $\{P_t(x, \Gamma)\}$  est la fonction de transition de  $X$ , on a  $P_0(x, E \setminus \{x\}) = 0$ , pour tout  $x \in E$ .

Alors, si  $\{Q_t\}$  est un semi-groupe de transformations de  $G(E, \mathcal{B}^*)$  (\*) subordonné à  $\{P_t\}$  (où  $\{P_t\}$  est le semi-groupe associé à la fonction de transition de  $X$ ), il existe une fonctionnelle multiplicative de Markov  $(M_t)_{t \geq 0}$  du processus  $X$  telle que

$$Q_t f(x) = E_x[f \circ X_t \times M_t] \text{ pour tout } t \in R_+, x \in E \text{ et } f \in G(E, \mathcal{B}^*)$$

(autrement dit, telle que le semi-groupe  $\{Q_t\}$  soit associé à  $(M_t)$ ).

Pour montrer le théorème 4.2, nous établirons les résultats partiels suivants :

$\alpha$ . LEMME 4.1. - Pour tout  $t \in R_+$ , et tout  $x \in E$ , il existe une version  $q_t(x, y)$  de la densité de la mesure  $Q_t(x, dy)$  par rapport à la mesure  $P_t(x, dy)$ , telle que l'application  $(x, y) \rightarrow q_t(x, y)$  est  $(\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*)$ -mesurable, et  $0 \leq q_t(x, y) \leq 1$  pour tout  $t$ .

En effet, rangeons les ouverts d'une base dénombrable de la topologie de  $E$  en une suite  $(O_n)$ , et construisons par récurrence une suite  $(P_n)$  de partitions de  $E$ ,  $P_n = (A_n^K)_{K \in I_n}$ , telle que  $P_0 = \{\emptyset, E\}$ , et que  $P_{n+1}$  soit la partition engendrée par les ensembles de  $P_n$ , et les ensembles  $O_{n+1}$  et  $E \setminus O_{n+1}$ . Pour tout  $n, t, x, y$ , soit

$$q_t^n(x, y) = Q_t(x, A_n(y)) / P_t(x, A_n(y))$$

où  $A_n(y)$  est l'ensemble de  $P_n$  qui contient  $y$ , si  $P_t(x, A_n(y)) \neq 0$ , et où  $q_t^n(x, y) = 0$  si  $P_t(x, A_n(y)) = 0$ . D'une part, l'application

$(x, y) \rightarrow q_t^n(x, y)$  est  $(\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*)$ -mesurable. D'autre part, si, pour tout  $n$ ,  $F_n$  désigne la tribu sur  $E$  engendrée par  $P_n$ , pour tout  $t, n$ , la suite de fonctions  $y \rightarrow q_t^n(x, y)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) est pour la mesure  $P_t(x, dy)$ , une martingale par rapport aux tribus  $(F_n)$  (ces propriétés sont faciles à vérifier).

Il résulte alors du lemme 0.4, que pour tout  $t, x$ , la suite de fonctions  $y \rightarrow q_t^n(x, y)$  converge presque partout (pour la mesure  $P_t(x, dy)$ ) vers une version de la densité cherchée ; or, l'ensemble des  $(x, y)$  tels que la suite

---

(\*) On désignera dans la suite de ce numéro par  $\mathcal{G}$  la tribu borélienne  $\mathcal{B}_E$  de  $E$ .

$(q_t^n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$  converge est  $(\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*)$ -mesurable ; il suffit alors de définir  $q_t(x, y)$  par  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_t^n(x, y)$  lorsque cette limite existe, et par 0 ailleurs, pour obtenir une version de la densité cherchée.

On vérifie enfin que l'on a

$$Q_t(x, 0_n) = \int_{0_n} P_t(x, dy) q_t(x, y)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in E$ , et  $t \in \mathbb{R}_+$  ; d'où le lemme 4.1.

### Remarques.

a. Le raisonnement précédent demeure valable si on suppose seulement qu'il existe un sous-ensemble dénombrable  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{B}_E$  tel que  $\mathcal{B}_E$  est la tribu engendrée par  $\mathcal{A}$ . L'existence de la densité mesurable  $q_t(x, y)$  subsiste donc sous cette hypothèse.

b. L'hypothèse de l'existence d'une base dénombrable d'ouverts n'intervient dans la démonstration du théorème 4.2 que pour démontrer, comme ci-dessus, le lemme 4.1.

c. Il résulte de (a) et (b) que : la conclusion du théorème 4.2 subsiste si l'on remplace l'hypothèse de l'existence d'une base dénombrable pour la topologie de  $E$ , par l'une des deux hypothèses suivantes :

- Il existe un sous-ensemble dénombrable  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{B}_E$  tel que  $\mathcal{B}_E$  est la tribu engendrée par  $\mathcal{A}$ .

- Pour tout  $t$ , et tout  $x \in E$ , il existe pour la mesure  $Q_t(x, dy)$  une densité  $q_t(x, y)$ ,  $(\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*)$ -mesurable.

$\beta$ . Soient  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $t > 0$ , et  $U$  une partie finie de  $[0, t[$  contenant 0.

Désignons par

$F_t^U$  la tribu sur  $[\zeta > t]$  engendrée par les ensembles  $[X_u \in \Gamma]$ ,  $u \in U \cup \{t\}$ ,  $\Gamma \in \mathcal{B}$ ,

$F_t^{U*}$  la tribu sur  $[\zeta > t]$  définie par : " $A \in F_t^{U*}$ "  $\iff$  "pour toute répartition initiale  $\mu$ , il existe  $A_1 \in F_t^U$  tel que  $A \setminus A_1 \in F^*$ ,  $A_1 \setminus A \in F^*$  et  $P_\mu(A \setminus A_1) = P_\mu(A_1 \setminus A) = 0$ ",

$M_t^U$ , l'application de  $[\zeta > t]$  dans  $(0, \cdot)$  définie par :

$$M_t^U(\omega) = \prod_{i=0}^n q_{t_{i+1}-t_i}(X_{t_i}(\omega), X_{t_{i+1}}(\omega)) \text{ pour tout } \omega \in [\zeta > t],$$

où  $t_0 = 0$ ,  $t_{n+1} = t$  et où  $t_0, t_1, \dots, t_n$  est une suite strictement croissante telle que  $U = \{t_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ .

LEMME 4.2. -  $F_t^U$ ,  $F_t^{U*}$  et  $M_t^U$  ont les propriétés suivantes :

a.  $U \subset V \Rightarrow F_t^{U*} \subset F_t^{V*}$ , et  $F_t^{U*} \subset F_t^*$ .

b. Si  $(U_n)$  est une suite croissante de parties finies de  $[0, t[$  contenant 0 et telle que  $D = \bigcup_n U_n$  est dense dans  $[0, t[$ , alors  $\bigcup_n F_t^{U_n}$  engendre la tribu  $F_t$ .

c. Pour tout  $f \in G(E, \mathcal{B}^*)$ , et  $x \in E$ ,

$$Q_t f(x) = E_x[f \circ X_t \times M_t^U] .$$

d. Si  $U \subset V$  pour tout  $x \in E$ ,

$$E_x[M_t^V | F_t^{U*}] = M_t^U \quad P_x \text{ presque partout sur } [\zeta > t] .$$

(a) résulte immédiatement des définitions.

(b) est une conséquence de la continuité à droite des trajectoires, car, si  $\Gamma$  est un ouvert de  $E$ , et si  $s \in [0, t[$ ,

$$[X_s \in \Gamma] = \bigcup_m \bigcap_{\substack{r \in D \\ s \leq r < s + \frac{1}{m}}} [X_r \in \Gamma] .$$

(c) résulte de

$$Q_t f(x) = Q_{t_1} \circ Q_{t_2 - t_1} \circ \dots \circ Q_{t - t_n} f(x)$$

et du corollaire de la proposition 1.2 du chapitre 1.

Il suffit de montrer (d), dans le cas où  $U = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  et  $V = \{t_0, \dots, t_i, s, t_{i+1}, \dots, t_n\}$ , c'est-à-dire, (chapitre 0, n° 4, relation (γ)) de montrer que :

$$E_x[q_{s-t_i}(X_{t_i}, X_s) q_{t_{i+1}-s}(X_s, X_{t_{i+1}}) | F_t^{U*}] = q_{t_{i+1}-t_i}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})$$

$P_x$  presque partout sur  $[\zeta > t]$ , ou encore, que

$$\int_{\bigcap_{j=1}^{n+1} [X_{t_j} \in \Gamma_j]} q_{s-t_i}(X_{t_i}, X_s) q_{t_{i+1}-s}(X_s, X_{t_{i+1}}) dP_x = \int_{\bigcap_{j=1}^{n+1} [X_{t_j} \in \Gamma_j]} q_{t_{i+1}-t_i}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}}) dP_x$$

où  $\Gamma_j \in \mathcal{B}$ ,  $0 \leq j \leq n$  et  $t_{n+1} = t$ , ou enfin, compte tenu du corollaire de la proposition 1.2, que

$$\begin{aligned} & \int P_{s-t_i}(z, dz_1) \int_{\Gamma_{i+1}} P_{t_{i+1}-s}(z_1, dz_2) q_{s-t_i}(z, z_1) q_{t_{i+1}-s}(z_1, z_2) \\ &= \int_{\Gamma_{i+1}} P_{t_{i+1}-t_i}(z, dy) q_{t_{i+1}-t_i}(z, y) \text{ pour tout } z \in E, \end{aligned}$$

relation qui résulte immédiatement de ce que

$$Q_{s-t_i} \circ Q_{t_{i+1}-s} = Q_{t_{i+1}-t_i}.$$

Le lemme 4.2 est démontré.

Si  $(U_n)$  est alors une suite croissante de parties finies de  $[0, t[$ , contenant 0, (d) entraîne que, pour tout  $x \in E$ ,  $(M_t^{U_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale pour la mesure  $P_x$  par rapport aux tribus  $(F_t^{U_n})$ ; et il résulte du lemme 0.4 (chapitre 0, n° 5) que, pour toute suite croissante  $(U_n)$  de parties finies de  $[0, t[$  contenant 0, il existe une application  $M_t$  de  $\Omega$  dans  $[0, 1]$  nulle hors de  $[\zeta > t]$ ,  $F_t^*$ -mesurable sur  $[\zeta > t]$ , et telle que, pour tout  $x \in E$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_t^{U_n}(\omega) = M_t(\omega) \quad P_x \text{ presque sûrement sur } [\zeta > t].$$

**γ. LEMME 4.3.** - Si  $(U_n)$  et  $(\bar{U}_n)$  sont deux suites croissantes de parties finies de  $[0, t[$  contenant 0 telles que  $D = \bigcup_n U_n$  et  $\bar{D} = \bigcup_n \bar{U}_n$  sont denses

dans  $[0, t[$ , alors les fonctions  $M_t$  et  $\bar{M}_t$  correspondantes sont égales  $P_x$  presque partout pour tout  $x \in E$ . Il suffit de le montrer si  $D \subset \bar{D}$  et  $U_n \subset \bar{U}_n$  pour tout  $n$ . On a alors (lemme 4.2, (d)) :

$$E_x[M_t^p | F_t^{U_n}] = M_t^{U_n} = E_x[M_t^p | F_t^{\bar{U}_n}]$$

pour tout  $x$  et  $p \geq n$ ; donc, en passant à la limite en  $p$ ,

$$E_x[\bar{M}_t | F_t^{U*}] = E_x[M_t | F_t^{U*}] \quad P_x \text{ presque sûrement pour tout } n \quad ;$$

ou encore,

$$\int_A (\bar{M}_t - M_t) dP_x = 0 \quad \text{pour tout } A \in \bigcup_n F_t^{U*} .$$

D'où

$$\int_A (\bar{M}_t - M_t) dP_x = 0 \quad \text{pour tout } A \in F_t^*$$

d'après le lemme 4.2 (b) ; d'où le résultat.

Nous pouvons maintenant établir le lemme suivant :

LEMME 4.4. - Il existe une famille  $(M_t^0)_{t \geq 0}$  d'applications de  $\Omega$  dans  $R_+$  telles que :

1.  $0 \leq M_t^0 \leq 1$  ;  $M_t^0(\omega) = 0$  pour  $\omega \in [\zeta \leq t]$  ;  $M_t^0$  est  $F_t^*$ -mesurable sur  $[\zeta > t]$  .
2.  $Q_t f(x) = E_x[f \circ X_t \times M_t^0]$  pour tout  $t \in R_+$ ,  $x \in E$  et  $f \in G(E, \mathcal{B}^*)$  .
3. Pour tout  $x \in E$ ,  $t > 0$ ,  $s \geq 0$

$$M_{t+s}^0 = M_s^0 \times M_t^0 \circ \theta_s \quad P_x \text{ presque sûrement sur } [\zeta > t + s] .$$

Pour  $t > 0$ , définissons  $M_t^0$  comme précédemment, au moyen d'une suite  $(U_n)$  croissante de parties finies de  $[0, t[$  contenant 0 et telle que  $\bigcup_n U_n = D$  est dense dans  $[0, t[$ . (Suite dont le choix n'importe pas d'après le lemme 4.3.) Et posons

$$M_0^0(\omega) = q_0(X_0(\omega), X_0(\omega)) \quad \text{pour } \omega \in [\zeta > 0] ,$$

et

$$M_0^0(\omega) = 0 \quad \text{pour } \omega \notin [\zeta > 0] .$$

Pour  $t > 0$ , (1) et (2) résultent du lemme 4.2, et  $Q_0 f(x) = E_x[f \circ X_0 \times M_0^0]$  résulte de la relation

$$\begin{aligned} Q_0 f(x) &= \int P_0(x, dy) q_0(x, y) f(y) = \int q_0(x, X_0) f \circ X_0 dP_x , \\ &= \int q_0(X_0, X_0) f \circ X_0 dP_x , \end{aligned}$$

compte tenu de l'hypothèse selon laquelle

$$P_0(x, E \setminus \{x\}) = P_x[X_0 \neq x] = 0 \quad .$$

Montrons d'abord (3) dans le cas où  $t > 0$  et  $s > 0$ .

Soient  $D$  la réunion de l'ensemble des rationnels de  $[0, t + s[$  et de l'ensemble des  $s + r$ , où  $r$  est un rationnel de  $[0, t[$ , et  $(U_n)$  une suite croissante de parties finies de  $D$  contenant 0 et  $s$  et telle que  $\bigcup_n U_n = D$ .

On a, d'après la définition de  $M_{t+s}^n$  :

$$M_{t+s}^n(\omega) = M_s^n \cap (0, s[ (\omega) \times M_t^n \cap (s, s+t[-s (\theta_s(\omega))$$

pour tout  $\omega \in [\zeta > t + s]$ , et  $n \in \mathbb{N}$ . D'où le résultat, d'après le lemme 4.3, en passant à la limite en  $n$ .

Si maintenant,  $s = 0$ , il suffit de montrer, puisque  $0 \leq M_0 \leq 1$ , que

$$E_x[M_t^0] = E_x[M_0^0 M_t^0]$$

ou encore que

$$E_x[M_t^U] = E_x[M_0^0 M_t^U] \quad \text{pour tout } U \quad .$$

Or, si  $U = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ , cette relation résulte de la relation

$$Q_t^1(x) = Q_0 \circ Q_{t_1} \circ Q_{t_2-t_1} \circ \dots \circ Q_{t-t_n}^1(x) = Q_{t_1} \circ \dots \circ Q_{t-t_n}^1(x)$$

et de l'hypothèse selon laquelle  $P_0(x, E \setminus \{x\}) = 1$ . Le lemme 4.4 est établi.

δ. Il reste à régulariser la famille  $(M_t^0)_{t \geq 0}$ , pour obtenir une fonctionnelle multiplicative, par un procédé analogue à celui déjà utilisé dans la démonstration du théorème 3.1.

Pour tout  $p, q \in \mathbb{R}_+$ ,  $p > 0$ ,  $q > 0$ , soit

$$A_{p,q} = [M_{p+q}^0 \neq M_p^0 \times M_q^0 \circ \theta_q] \cap [\zeta > p + q] \quad .$$

Pour tout  $x \in E$ ,  $P_x(A_{p,q}) = 0$ , d'après le lemme 4.4, (2), donc  $P_\mu(A_{p,q}) = 0$

pour toute répartition initiale  $\mu$ .

Soit

$$A = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}_+^*} A_{p,q} \quad (\mathbb{Q}_+^* \text{ désignant l'ensemble des rationnels } > 0).$$

On a  $P_\mu(A) = 0$  pour toute répartition initiale  $\mu$ , et

$$M_{p+q}^0(\omega) = M_p^0(\omega) M_q^0(\theta_p(\omega))$$

pour tous  $p, q \in \mathbb{Q}_+$  et  $\omega \in [\zeta > p + q] \cap CA$ . Il résulte que, pour  $\omega \notin A$ , l'application  $p \rightarrow M_p^0(\omega)$  de  $\mathbb{Q}_+^*$  dans  $(0, 1]$  est décroissante.

Posons alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$M_t(\omega) = \lim_{P \downarrow t, p \in \mathbb{Q}_+} M_p^0(\omega) \quad \text{pour } \omega \notin A$$

$$M_t(\omega) = 1_{[\zeta > t]}(\omega) \quad \text{pour } \omega \in A.$$

La famille  $(M_t)_{t \geq 0}$  ainsi définie satisfait aux axiomes  $(FM_1)$  et  $(FM_2)$ , et, pour tout  $t$ ,  $M_t$  est  $F^*$ -mesurable. Montrons que, pour tout  $t$  et  $x \in E$ ,

$M_t = M_t^0 P_x$  presque sûrement. Il en résultera que, pour tout  $t$ ,  $M_t = M_t^0 P_\mu$  presque sûrement pour toute répartition initiale  $\mu$ , donc, compte tenu du lemme 4.4, que  $(M_t)_{t \geq 0}$  satisfait aussi à  $(FM_3)$ , et que  $Q_+ f(x) = E_x[f \circ X_t \times M_t]$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in E$ , et  $f \in G(E, \mathcal{B}^*)$ .

On a d'abord, pour tout  $x \in E$ ,  $M_t \leq M_t^0 P_x$  presque sûrement, puisque, d'après le lemme 4.4, (3),  $M_p^0 \leq M_t^0 P_x$  presque sûrement pour tout  $p \geq t$ ,  $p \in \mathbb{Q}_+$ .

Il suffit donc de montrer que  $E_x[M_t^0] = E_x[M_t]$ . Or  $E_x[M_t^0] = Q_t 1(x)$  d'après le lemme 4.4, (2), et

$$E_x[M_t] = \lim_{\substack{P \downarrow t \\ p \in \mathbb{Q}_+}} E_x[M_p^0] = \lim_{\substack{P \downarrow t \\ p \in \mathbb{Q}_+}} Q_p 1(x) = Q_t 1(x)$$

d'après l'hypothèse de continuité à droite de l'application  $t \rightarrow Q_t 1(x)$ .

Il reste à montrer que  $(M_t)$  satisfait à  $(FM_4)$ ; d'après le lemme 4.4, (3), et ce qui précède, on a  $M_{t+s} = M_s \times M_t \circ \theta_s P_x$  presque sûrement sur  $[\zeta > t + s]$ .

pour  $t > 0$  et  $s \geq 0$  ; et, en faisant tendre  $t$  vers 0 par valeurs rationnelles dans cette relation, on obtient, puisque  $(FM_2)$  est satisfaite, que  $M_s = M_s \times M_0 \circ \theta_s$   $P_X$  presque sûrement sur  $[\zeta > s]$ .

$(M_t)_{t \geq 0}$  satisfait donc  $(FM_4)$ , et le théorème 4.2 est démontré.

#### Appendice 1. - Sur les temps terminaux (cf. [2], page 23).

Nous allons donner ci-dessous une autre démonstration du théorème 3.2, dans le cas où la fonctionnelle multiplicative  $(M_t)_{t \geq 0}$  est parfaite.

Soient  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathbb{M}, (P_X), (\theta_t)\}$  un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ , et  $(M_t)_{t \geq 0}$  une fonctionnelle multiplicative parfaite <sup>(23)</sup> du processus  $X$ .

Pour tout  $t, \omega$ , soit  $A_t(\omega) = -\text{Log } M_t(\omega)$  (en posant  $-\text{Log}(0) = +\infty$ ).  $(A_t)_{t \geq 0}$  est une famille d'applications de  $\Omega$  dans  $\bar{R}_+ = [0, +\infty]$  ayant les propriétés suivantes :

$(FA_1)$  Pour tout  $t \in R_+$ ,  $0 \leq A_t \leq +\infty$ , et  $A_t(\omega) = +\infty$  pour tout  $\omega \in [\zeta \leq t]$ .

$(FA_2)$  Pour tout  $\omega \in \Omega$ , l'application  $t \rightarrow A_t(\omega)$  de  $R_+$  dans  $\bar{R}_+$  est continue à droite et croissante.

$(FA_3)$  Pour tout  $t \in R_+$ , la restriction de  $A_t$  à  $[\zeta > t]$  est  $F_t^*$ -mesurable.

$(FA'_4)$  Pour tout  $s, t \in R_+$ ,

$$A_{s+t}(\omega) = A_s(\omega) + A_t(\theta_s(\omega)) \text{ pour tout } \omega \in [\zeta > s]$$

(toute famille  $(A_t)_{t \geq 0}$ , vérifiant les relations  $(FA_1)$ ,  $(FA_2)$ ,  $(FA_3)$  et  $(FA'_4)$ , est appelée une fonctionnelle additive parfaite du processus de Markov  $X$  ; cf. à ce sujet [2], page 57).

Comme au chapitre 2 (n° 2, exemple 2), posons

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times [0, +\infty) \text{ et } \tilde{\gamma}(\omega, \lambda) = \omega, \text{ pour tout } (\omega, \lambda) \in \tilde{\Omega} ;$$

posons aussi

$$R(\omega, \lambda) = \inf\{t \mid t \geq 0 \text{ et } \lambda \leq A_t(\omega)\} \text{ pour tout } (\omega, \lambda) \in \tilde{\Omega} ,$$

---

<sup>(23)</sup> Cf. chapitre 3, n° 2, exemple 1.

$$\hat{X}_t(\omega, \lambda) = X_t(\omega) \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_t(\omega, \lambda) = (\theta_t(\omega), \lambda - A_t(\omega)) \quad \text{pour tout} \\ (\omega, \lambda) \in [R > t]$$

et

$$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \mathcal{B}_{[0, +\infty)}$$

où  $\mathcal{B}_{[0, +\infty)}$  est la tribu borélienne de  $[0, +\infty)$ . Comme  $R$  satisfait la relation :

$$R(\omega, \lambda) > t \iff \lambda > A_t(\omega),$$

$\hat{\theta}_t$  applique  $\tilde{\Omega}$  dans  $\tilde{\Omega}$  (plus précisément,  $[R > t]$  dans  $[R > 0]$ ).

Nous allons construire un sous-processus  $(\hat{X}, \hat{\gamma})$  du processus  $X$ , de la forme

$$\hat{X} = \{\tilde{\Omega}, R, (\hat{X}_t), \hat{\mathcal{M}}, \hat{P}_x, (\hat{\theta}_t)\}$$

tel que, pour tout  $x \in E$ ,

$$(1) \quad \hat{P}_x[R > t \mid \tilde{\gamma}^{-1}(\mathcal{M})] = M_t \circ \tilde{\gamma} \quad \hat{P}_x \text{ presque sûrement.}$$

α. Les termes  $\tilde{\Omega}, R, (\hat{X}_t), (\hat{\theta}_t)$  satisfont aux relations  $(SM_1), (SM_2), (SM_3)$ , ainsi qu'aux relations  $(M_1), (M_2), (M_3)$ .

Vérifions par exemple  $(SM_3)$  : soit

$$A = [X_s \in \Gamma];$$

$$\tilde{\gamma}^{-1}(A) = [X_s \in \Gamma] \times [0, +\infty),$$

d'où

$$(\omega, \lambda) \in \hat{\theta}_t^{-1}(\tilde{\gamma}^{-1}(A) \cap [R > u]) \iff \begin{cases} \lambda > A_t(\omega), \quad \theta_t(\omega) \in [X_s \in \Gamma] \\ \text{et } \lambda - A_t(\omega) > A_u(\theta_t(\omega)) \end{cases};$$

mais, d'après  $(FA_4')$ ,

$$A_{t+u}(\omega) = A_t(\omega) + A_u(\theta_t(\omega))$$

si  $\lambda > A_t(\omega)$  (d'où il résulte, d'après  $(FA_1)$ , que  $\zeta(\omega) > t$ ), donc

$$(\omega, \lambda) \in \hat{\theta}_t^{-1}(\tilde{\gamma}^{-1}(A) \cap [R > u]) \iff \begin{cases} \lambda > A_t(\omega), & \theta_t(\omega) \in A \\ \text{et } \lambda - A_t(\omega) > A_{t+u}(\omega) - A_t(\omega) \end{cases}$$

$$\iff \lambda > A_t(\omega), \theta_t(\omega) \in A \text{ et } \lambda > A_{t+u}(\omega)$$

$$\iff (\omega, \lambda) \in \tilde{\gamma}^{-1}(\theta_t^{-1}(A)) \cap [R > t + u],$$

d'où  $(SM_3)$ .

$\beta$ . Soit  $\alpha$  la mesure sur  $(0, +\infty)$  définie par

$$\alpha(D) = \int_0^{+\infty} 1_D(t) e^{-t} dt \text{ pour tout } D \in \mathcal{B}_{(0,+\infty)};$$

$\alpha$  est une probabilité sur  $\mathcal{B}_{(0,+\infty)}$ .

Pour tout  $x \in E$ , soit  $\hat{P}_x = P_x \otimes \alpha$ ;  $\hat{P}_x$  est une probabilité sur l'espace mesurable  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{M}})$ .

- a. On a d'abord, pour tout  $A \in \mathcal{M}$ ,

$$\hat{P}_x[R > t] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(A) = \int_A M_t dP_x = \int_{\tilde{\gamma}^{-1}(A)} M_t \circ \tilde{\gamma} d\hat{P}_x$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_x[R > t] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(A) &= \iint_{\Omega \times (0,+\infty)} 1_A(\omega) 1_{[R>t]}(\omega, \lambda) P_x(d\omega) \alpha(d\lambda) \\ &= \int_A P_x(d\omega) \int_{(0,+\infty)} 1_{A_t(\omega), +\infty}(\lambda) \alpha(d\lambda) \end{aligned}$$

d'après la relation  $R(\omega, \lambda) > t \iff \lambda > A_t(\omega)$

$$= \int_A P_x(d\omega) \int_{A_t(\omega)}^{+\infty} e^{-t} dt = \int_A e^{-A_t(\omega)} P_x(d\omega)$$

$$= \int_A M_t dP_x = \int_{\tilde{\gamma}^{-1}(A)} M_t \circ \tilde{\gamma} d\hat{P}_x \quad .$$

- b. On a ensuite,

$$\hat{P}_x[\hat{X}_{s+u} \in \Gamma \mid \hat{F}_s^*] = \hat{P}_{\hat{X}_s}[\hat{X}_u \in \Gamma] \quad P_x \text{ presque sûrement} \quad .$$

En effet, remarquons d'abord que tout  $\hat{A} \in \hat{F}_s$  est de la forme  $[R > s] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(A)$ , où  $A \in F_s$ .

(Il suffit de le vérifier, pour les  $\hat{A}$  de la forme  $\bigcap_{i=1}^n [\hat{X}_{s_i} \in \Gamma_i]$ , où  $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n = s$ ,  $\Gamma_i \in \mathcal{B}$ ,  $\forall i$ .)

Il suffit donc de montrer que :

$$\hat{P}_s([\hat{X}_{s+u} \in \Gamma] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(A)) = \int_{\tilde{\gamma}^{-1}(A)} \hat{P}_{\hat{X}_s}[\hat{X}_u \in \Gamma] d\hat{P}_x \quad \text{pour tout } A \in F_s \quad .$$

Or, d'après (a), on a d'une part :

$$\begin{aligned} \hat{P}_x([\hat{X}_{s+u} \in \Gamma] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(A)) &= \hat{P}_x[R > s+u] \cap \tilde{\gamma}^{-1}([X_{s+u} \in \Gamma] \cap A) \\ &= \int_A 1_\Gamma \circ X_{s+u} \times M_{s+u} dP_x \\ &= \int_A 1_\Gamma \circ X_u \circ \theta_s \times M_s \times M_u \circ \theta_s dP_x \end{aligned}$$

et, d'après la propriété de Markov (chapitre 1, n° 4, proposition 1.3),

$$= \int_A M_s \times E_{X_s}[1_\Gamma \circ X_u \times M_u] dP_x$$

d'autre part :

$$\hat{P}_y[\hat{X}_u \in \Gamma] = E_y[1_\Gamma \circ X_u \times M_u]$$

d'où,

$$\int_{\tilde{\gamma}^{-1}(A)} \hat{P}_{\hat{X}_s}[\hat{X}_u \in \Gamma] d\hat{P}_x = \int_A M_s \times E_{X_s}[1_\Gamma \circ X_u \times M_u] dP_x$$

(toujours d'après (a)), d'où (b).

- c. Il résulte alors de (a) et (b), que, si on pose  $\hat{X} = \{\hat{\Omega}, R, (\hat{X}_+), \hat{\mathcal{M}}, (\hat{P}_-), (\hat{\theta}_+)\}$ ,  $(\hat{X}, \tilde{\gamma})$  est un sous-processus de  $X$

satisfaisant la relation (1). On en déduit le théorème 3.2, compte tenu de la proposition 2.1 (chapitre 2, n° 2).

Appendice 2. - Construction d'un processus non interrompu  
à partir d'un processus interrompu,  
par "adjonction d'un point à l'infini".

a. Soit  $(E, \mathcal{B})$  un espace mesurable ; soit  $\delta$  un objet tel que  $\delta \notin E$ , et  $\hat{E} = E \cup \{\delta\}$ , et soit  $\hat{\mathcal{B}}$  la tribu sur  $\hat{E}$  engendrée par  $\mathcal{B}$

$$[\text{c'est-à-dire } \hat{\mathcal{B}} = \{A \cup \{\delta\} \mid A \in \mathcal{B}\} \cup \mathcal{B}] ;$$

$(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$  est appelé l'espace mesurable obtenu à partir de  $(E, \mathcal{B})$  par adjonction du point à l'infini  $\delta$ .

Toute mesure  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{B})$ , telle que  $\mu(E) \leq 1$ , se prolonge en une probabilité  $\hat{\mu}$  sur  $(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$  en posant

$$\hat{\mu}(A \cup \{\delta\}) = \mu(A) + 1 - \mu(E) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B} .$$

L'application qui à tout  $f \in G(E, \mathcal{B})$  associe le prolongement  $\hat{f}$  de  $f$  à  $\hat{E}$ , tel que  $\hat{f}(\delta) = 0$ , est un isomorphisme de l'espace de Banach  $G(E, \mathcal{B})$  dans l'espace de Banach  $G(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$ .

Toute transformation linéaire contractante  $P$  de  $G(E, \mathcal{B})$  se prolonge en une transformation linéaire contractante  $\hat{P}$  de  $G(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$  telle que  $\hat{P}1_{\hat{E}} = 1_{\hat{E}}$ , en posant, pour tout  $f \in G(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$ ,

$$\hat{P}f = \overbrace{P[(f - f(\delta))|E]} + f(\delta) \quad (24) .$$

Si, pour tout  $x \in E$ ,  $\Gamma \rightarrow P1_{\Gamma}(x)$  est une mesure sur  $(E, \mathcal{B})$  ; alors, pour tout  $x \in E$ ,  $\Gamma \rightarrow \hat{P}1_{\Gamma}(x)$  est le prolongement à  $(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$  de la mesure  $\Gamma \rightarrow P1_{\Gamma}(x)$ , et  $\hat{P}1_{\Gamma}(\delta) = 1_{\Gamma}(\delta)$  pour tout  $\Gamma \in \hat{\mathcal{B}}$ .

En particulier, tout semi-groupe  $\{P_t\}$  sous-markovien sur  $G(E, \mathcal{B})$ , se prolonge en un semi-groupe  $\{\hat{P}_t\}$  markovien sur  $G(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$ . De même pour les fonctions de transition correspondantes.

---

(24) Où  $g|E$  désigne la restriction à  $E$  de la fonction  $g$  sur  $\hat{E}$ .

b. Soient  $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathbb{M}, (P_x), (\theta_t)\}$  un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ ,  $\{P_t(x, \Gamma)\}$  sa fonction de transition, et  $\{P_t\}$  le semi-groupe associé.

Introduisons les termes suivants :

- Pour tout  $t \in R_+$ , soient  $\hat{X}_t$  l'application de  $\Omega$  dans  $(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$  définie par

$$\hat{X}_t(\omega) = X_t(\omega) \text{ si } \zeta(\omega) > t, \text{ et } \hat{X}_t(\omega) = \delta \text{ si } t \geq \zeta(\omega),$$

et  $\hat{\theta}_t$  l'application de  $\Omega$  dans  $\Omega$  définie par :

$$\hat{\theta}_t(\omega) = \theta_t(\omega) \text{ si } \zeta(\omega) > t, \text{ et } \hat{\theta}_t(\omega) = \omega_0 \text{ pour } t \geq \zeta(\omega)$$

où  $\omega_0$  est un élément fixé de  $[\zeta = 0]$ .

(Si  $[\zeta = 0] = \emptyset$ , il suffit de considérer  $\hat{\Omega} = \Omega \cup \{\omega_0\}$  et de prolonger de  $\zeta$  à  $\hat{\Omega}$ , par  $\zeta(\omega_0) = 0$ .)

- Soit  $\hat{\mathbb{M}}$  la tribu sur  $\Omega$  engendrée par les ensembles  $[\zeta > 0] \cap A$  où  $A \in \mathbb{M}$ ;

- Pour tout  $x \in E$ , soient  $\hat{P}_x$  la restriction de  $P_x$  à  $\hat{\mathbb{M}}$ , et  $\hat{P}_\delta$  la probabilité sur  $\hat{\mathbb{M}}$  définie par

$$\hat{P}_\delta[\zeta > 0] = 0 \text{ et } \hat{P}_\delta[\zeta = 0] = 1$$

(  $[\zeta = 0] \neq \emptyset$ , puisque  $\omega_0 \in [\zeta = 0]$  ).

Alors,  $\hat{X} = \{\Omega, (\hat{X}_t), \hat{\mathbb{M}}, (\hat{P}_z)_{z \in \hat{E}}, (\hat{\theta}_t)\}$  <sup>(25)</sup> est un processus de Markov stationnaire non interrompu à valeurs dans l'espace mesurable  $(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$ , vérifiant les relations suivantes :

$$(M)_1 \quad [\hat{X}_t \in E] = [\zeta > t] \text{ pour tout } t \in R_+$$

$$(M)_4 \quad \hat{P}_\delta[\hat{X}_0 \in E] = 0 \quad ;$$

et, si  $\{\hat{P}_t\}$  est le semi-groupe associé à la fonction de transition de  $\hat{X}$ ,  $\{\hat{P}_t\}$  est le prolongement à  $(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$  du semi-groupe  $\{P_t\}$  (cf. (a)).

<sup>(25)</sup> Ou  $\hat{X} = \{\hat{\Omega}, (\hat{X}_t), \hat{\mathbb{M}}, (\hat{P}_z)_{z \in \hat{E}}, (\hat{\theta}_t)\}$ , si  $\omega_0$  a dû être ajouté.

Inversement, soit  $Y = \{\Omega, (Y_t), \pi, (Q_z), (\sigma_t)\}$  un processus de Markov stationnaire non interrompu à valeurs dans l'espace mesurable  $(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$ , tel qu'il existe une application  $\zeta$  de  $\Omega$  dans  $R_+ = [0, +\infty)$  vérifiant  $(M_1)$ ,  $(M_1')$  et  $(M_4')$ . Alors si, pour tout  $t$ ,  $X_t$  désigne la restriction de  $Y_t$  à  $[\zeta > t]$ , et  $\theta_t$  la restriction de  $\sigma_t$  à  $[\zeta > t]$ ,

$$X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \pi, (Q_x)_{x \in E}, (\theta_t)\}$$

est un processus de Markov stationnaire à valeurs dans  $(E, \mathcal{B})$ , et  $Y$  est équivalent à  $\hat{X}$  (vérifications sans difficultés).

On voit ainsi que la donnée d'un processus de Markov stationnaire non interrompu à valeurs dans  $(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$  pour lequel il existe une fonction  $\zeta$  vérifiant  $(M_1)$ ,  $(M_1')$  et  $(M_4')$  est équivalente à la donnée d'un processus à valeurs dans  $(E, \mathcal{B})$ , admettant  $\zeta$  comme durée de vie. (Cf. à ce sujet, [1], pages 49 et 68.)

#### Remarques.

1. La relation  $\hat{P}_\delta[\hat{X}_0 \in E] = 0$  s'écrit encore  $\hat{P}_0(\delta, E) = 0$  (où  $\hat{P}_t(z, \Gamma)$  est la fonction de transition de  $\hat{X}$ ).

2. Si  $E$  est un espace topologique,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E$ , et si  $Y$  a ses trajectoires continues à droite, la condition "il existe une fonction  $\zeta$  telle que  $(M_1)$  et  $(M_1')$  soient vérifiées" équivaut à :

$$(M_1'') \quad \text{Pour tout } t \in R_+, [X_t = \delta] \subset \bigcap_{u \geq t} [X_u = \delta] \quad (*)$$

En effet, supposons ces conditions satisfaites, et posons

$$\zeta(\omega) = \inf\{t \mid t \in R_+ \text{ et } Y_t(\omega) = \delta\}, \text{ si cet ensemble est } \neq \emptyset$$

et

$$\zeta(\omega) = +\infty \text{ s'il est vide.}$$

La fonction  $\zeta$  ainsi définie vérifie  $(M_1)$  et  $(M_1')$ .

---

(\*) Autrement dit : toute trajectoire qui atteint le point  $\delta$  y reste.

Appendice 3. - Remarques sur la démonstration du théorème 4.2.

En vertu de l'appendice 2, on peut se ramener au cas où  $\{P_t\}$  et  $\{Q_t\}$  sont des semi-groupes markoviens sur  $(E, \mathcal{B}_E)$  <sup>(26)</sup>.

Soient donc  $X = \{\Omega, (X_t), (P_x), (\theta_t)\}$  un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{B})$ ,  $\{P_t\}$  le semi-groupe markovien associé à la fonction de transition de  $X$ , et  $\{Q_t\}$  un semi-groupe markovien subordonné à  $\{P_t\}$  <sup>(27)</sup>.

Pour toute partie finie  $U$  de  $R_+$ , soit  $\Phi_U$  l'application  $\omega \rightarrow (X_u(\omega))_{u \in U}$  de  $\Omega$  dans  $E^U$ , et soit  $F^U$  la tribu sur  $\Omega$  engendrée par les  $[X_u \in \Gamma]$ ,  $u \in U$ ,  $\Gamma \in \mathcal{B}$ ; on a

$$F^U = \Phi_U^{-1}(\mathcal{B}^U),$$

où  $(E^U, \mathcal{B}^U)$  désigne l'espace mesurable produit  $(E, \mathcal{B})^U$ .

Pour toute répartition initiale  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{B})$ , les relations suivantes définissent des probabilités sur  $(E^U, \mathcal{B}^U)$ :

$$p_\mu^U(\Delta) = \int \mu(dx) \int P_{t_0}(x, dx_0) \int \dots \int P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) 1_\Delta(x_1, \dots, x_n)$$

$$q_\mu^U(\Delta) = \int \mu(dx) \int Q_{t_0}(x, dx_0) \int \dots \int Q_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) 1_\Delta(x_1, \dots, x_n)$$

où  $U = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ ,  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  et  $\Delta \in \mathcal{B}^U$ .

Et, en posant :

$$P_\mu^U(\Phi_U^{-1}(\Delta)) = p_\mu^U(\Delta), \quad Q_\mu^U(\Phi_U^{-1}(\Delta)) = q_\mu^U(\Delta)$$

pour tout  $\Delta \in \mathcal{B}^U$ , on définit des probabilités  $P_\mu^U$  et  $Q_\mu^U$  sur  $F^U = \Phi_U^{-1}(\mathcal{B}^U)$ ; et on a

$$Q_\mu^U(A) \leq P_\mu^U(A) \quad \text{pour tout } A \in F^U.$$

D'après la proposition 1.2 (chapitre 1, n° 4),  $P_\mu^U$  coïncide avec  $P_\mu$  sur  $F^U$ , pour tout  $U$ .

<sup>(26)</sup> Avec les notations du théorème 4.2.

<sup>(27)</sup> Supposons, pour simplifier les notations, que  $(E, \mathcal{B}) = (E, \mathcal{B}^*)$ .

$\mu$  étant fixé, la famille  $(\Omega, F^U, Q_\mu^U)_U$ , où  $U$  décrit l'ensemble des parties finies de  $R_+$ , est une famille projective de probabilités. Il résulte alors de la relation  $Q_\mu^U(A) \leq P_\mu^U(A)$  que, si, pour tout  $A \in \bigcup_U F^U$ , on pose

$$Q_\mu(A) = Q_\mu^U(A),$$

où  $U$  est tel que  $A \in F^U$ ,  $Q_\mu$  est une probabilité sur le clan  $\bigcup_U F^U$ .

Cette probabilité se prolonge en une probabilité sur  $F$  (tribu engendrée par  $\bigcup_U F^U$ ), que nous désignerons encore par  $Q_\mu$ . On a alors

$$Q_\mu(A) \leq P_\mu(A), \text{ pour tout } A \in F \text{ et tout } \mu$$

et

$$Y = \{\Omega, (X_t), (Q_x), (\theta_t)\}$$

est un processus de Markov stationnaire à valeurs dans  $(E, \mathcal{B})$  et admettant  $\{Q_t(x, \Gamma)\}$  comme fonction de transition. De la relation  $Q_\mu(A) \leq P_\mu(A)$  pour tout  $A \in F_t$ , on déduit, d'après le théorème de Radon-Nikodym, l'existence d'une fonction  $M_{\mu,t} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ ,  $F_t$ -mesurable et telle que

$$Q_\mu(A) = \int_A M_{\mu,t} dP_\mu \text{ pour tout } A \in F_t$$

(on notera  $M_{x,t}$  la fonction  $M_{\varepsilon_x,t}$ ).

Pour montrer l'existence d'une fonctionnelle multiplicative du processus  $X$  associée à  $\{Q_t\}$ , il suffit de montrer que pour tout  $t \in R_+$ , il existe une fonction  $M_t^0 : \Omega \rightarrow [0, 1]$ ,  $F_t^*$ -mesurable et telle que

$$P_x[M_{x,t} \neq M_t^0] = 0 \text{ pour tout } x \in E.$$

En effet, pour une telle famille  $(M_t^0)_{t \geq 0}$  nous allons montrer que, pour tout  $x \in E$ ,  $M_{t+s}^0 = M_s^0 \times M_t^0 \circ \theta_s$   $P_x$  presque sûrement, d'où on déduira l'existence d'une fonctionnelle multiplicative  $(M_t)_{t \geq 0}$  telle que

$$P_x[M_t \neq M_t^0] = 0 \text{ pour tout } x \in E,$$

par le procédé déjà employé dans la démonstration du théorème 3.1 (chapitre 3, n° 3).

Pour montrer que  $M_{t+s}^0 = M_s^0 \times M_t^0 \circ \theta_s$ , il suffit de montrer que

$$\int_{A \cap \theta_s^{-1}(B)} M_s^0 \times M_t^0 \circ \theta_s \, dP_x = \int_{A \cap \theta_s^{-1}(B)} M_{t+s}^0 \, dP_x \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{F}_s, \text{ et } B \in \mathcal{F}_t ;$$

or

$$\begin{aligned} \int_{A \cap \theta_s^{-1}(B)} M_s^0 \times M_t^0 \circ \theta_s \, dP_x &= \int 1_A \times M_s^0 \times (M_t^0 \cdot 1_B) \circ \theta_s \, dP_x \\ &= \int 1_A M_s^0 \times E_{X_s} [1_B \cdot M_t^0] \, dP_x \end{aligned}$$

d'après la propriété de Markov appliquée au processus  $X$  ;

$$= \int 1_A M_s^0 \times Q_{X_s}(B) \, dP_x = \int_A Q_{X_s}(B) \, dQ_x ,$$

d'où, d'après la propriété de Markov appliquée au processus  $Y$  ,

$$= Q_x(A \cap \theta_s^{-1}(B)) = \int_{A \cap \theta_s^{-1}(B)} M_{t+s}^0 \, dP_x .$$

C. Q. F. D.

Pour construire une telle famille  $(M_t^0)_{t \geq 0}$ , on peut essayer de considérer les fonctions  $(M_t^1)_{t \geq 0}$  définies par

$$M_t^1(\omega) = M_{X_0}(\omega), t \quad \text{pour tout } t \text{ et } \omega ,$$

qui sont telles que, pour tout  $x$  ,

$$P_x[M_t^1 \neq M_{x,t}] = 0 ;$$

$M_t^1$  sera  $\mathcal{F}_t^*$ -mesurable, en particulier, si  $x, \omega \rightarrow M_{x,t}(\omega)$  est une fonction  $(\mathcal{B} \times \mathcal{F}_t^*)$ -mesurable.

On est donc ramené à la recherche de telles densités, fonctions mesurables du couple  $(x, \omega)$  .

Le procédé utilisé dans la démonstration du théorème 4.2, en  $(\beta)$ , permet d'obtenir une telle densité.

On remarquera que la fonction  $M_t^U$  (cf.  $\beta$ , démonstration du théorème 4.2), est une version de la densité de  $Q_x$  par rapport à  $P_x$ , ces probabilités étant restreintes à la tribu  $F_t^{U*}$ . On a, en conséquence,  $P_x$  presque sûrement

$$E_x[M_{x,t} | F_t^{U*}] = M_t^U, \quad ,$$

ce qui rend clair le fait que, si  $(U_n)$  est une suite croissante,  $(M_t^{U_n})$  est une martingale.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] DYNKIN (E. B.). - Theory of Markov processes. Translated from the Russian. - Oxford, London, New York, Paris, Pergamon Press, 1960.
  - [2] MEYER (Paul-André). - Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 125-230 (Thèse Sc. math. Paris. 1961).
  - [3] Séminaire Brelot : Théorie du Potentiel, t. 3, 1958/59. - Paris, Secrétariat mathématique, 1960.
-