

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

MARCEL BRELOT

Intégrabilité uniforme quelques applications à la théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, n° 1 (1961-1962), exp. n° 1a, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SB CD_1961-1962__6_1_A1_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTÉGRABILITÉ UNIFORME QUELQUES APPLICATIONS À LA THÉORIE DU POTENTIEL ⁽¹⁾

par Marcel BRELOT

1. - Cette notion bien connue des probabilistes a été depuis quelques années utilisée par J. L. DOOB ([6] à [9]) de façon très heureuse en théorie du potentiel. Je vais en rappeler des propriétés essentielles, puis j'en donnerai des applications sous des formes voisines de celles de DOOB ; c'est particulièrement intéressant pour les espaces de Green et la frontière de Martin, et cela me conduira à traiter une question analogue avec d'autres frontières.

2. - Considérons une famille de mesures abstraites (de Daniell) $\mu_i \geq 0$ dans des espaces abstraits respectifs X_i . Supposons les constantes mesurables- μ_i , et $\{\mu(X_i)\}$ borné. La famille de fonctions réelles f_i intégrables- μ_i dans X_i est dite uniformément intégrable si, en posant

$$A_{a,i} = \{x \in X_i, |f_i| \geq a\},$$

$$\int_{A_{a,i}} |f_i| d\mu_i \rightarrow 0 \text{ uniformément en } i \quad (a \rightarrow +\infty).$$

α . On démontre facilement que cette propriété équivaut aux conditions simultanées

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \sup_i \int_{X_i} |f_i| d\mu_i < \infty \\ \int_e |f_i| d\mu_i \text{ est arbitrairement petit avec } \mu_i(e) \\ \quad (e \text{ mesurable-}\mu_i) \end{cases}$$

c'est-à-dire est $< \varepsilon$ donné dès que $\mu_i(e) < \eta$ convenable.

Cela résulte aussitôt des inégalités immédiates :

$$(\alpha') \quad \int_e |f_i| d\mu_i \leq \int_{e \cap A_{a,i}} |f_i| d\mu_i + a \int_{A_{a,i} \cap e} d\mu_i \text{ en particulier pour } e = X_i.$$

⁽¹⁾ Cet exposé, dont on abrège ici l'introduction sur l'intégrabilité uniforme (car son étude a été par la suite très développée par COURRÈGE dans le "Séminaire d'initiation à l'Analyse" de CHOQUET, 1962), a été repris dans d'autres conférences, et est complété dans cette rédaction par des extensions mentionnées dans le texte.

On en déduit les conditions (α) lorsque $\{f_i\}$ est uniformément intégrable

$$(α'') \quad \int_{A_{a,i}} |f_i| d\mu_i \geq a \mu_i(A_{a,i}) \quad .$$

La première condition (α) entraîne que $\mu_i(A_{a,i}) \rightarrow 0$ avec $1/a$ et la seconde fournit l'intégrabilité uniforme.

β. La définition équivaut aussi à l'existence d'une fonction borélienne réelle $\varphi(x) \geq 0$ infinie pour $x = +\infty$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow +\infty & x \text{ fini} \rightarrow +\infty \\ \sup \int \varphi(|f_i|) d\mu_i < \infty \end{cases} .$$

On peut même alors trouver une φ croissante et convexe.

Nous aurons surtout besoin de la suffisance pour $\varphi = x^2$, ce qui est immédiat. Car si $\int f_i^2 d\mu_i \leq K$, on a

$$\left(\int_e |f_i| d\mu_i \right)^2 \leq \int_e f_i^2 d\mu_i \cdot \mu_i(e) \leq K \mu_i(e)$$

d'où les conditions (α).

Remarque. - Sans avoir besoin d'approfondir ici la question, signalons encore pour la situer que si μ_i , X_i sont fixes et $\{f_i\}$ une suite f_n , la L_1 -convergence de f_n pour la mesure considérée équivaut à la conjonction de la convergence en mesure et de l'intégrabilité uniforme.

3. Rappel d'axiomes. - Prenons d'abord l'axiomatique inspirée par DOOB [6] des fonctions harmoniques et surharmoniques, sous la forme développée dans [3].

Nous considérons un espace fondamental Ω , convexe, non compact, mais localement compact, et dans chaque ouvert ω un espace vectoriel de fonctions réelles finies continues, dites harmoniques, satisfaisant aux trois axiomes suivants (de caractère local) :

Axiome 1. - Toute fonction harmonique dans ω est harmonique dans ω' ouvert $c\omega$, et toute fonction localement harmonique dans ω est harmonique dans ω .

Axiome 2. - Il existe une base d'ouverts connexes réguliers.

On dit que ω est régulier, si $\bar{\omega}$ est compact, et si toute fonction finie, continue sur $\partial\omega$, se prolonge continûment dans $\bar{\omega}$ selon une fonction harmonique dans ω , de façon unique, et si ce prolongement est en chaque point x croissant avec f . On le note $H_f^\omega(x)$, et il est de la forme $\int f d\rho_x^\omega$, $d\rho_x^\omega$ étant une mesure ≥ 0 sur $\partial\omega$ dite mesure harmonique.

Axiome 3. - Un ordonné filtrant croissant de fonctions harmoniques dans un domaine ω a une limite harmonique ou partout $+\infty$ dans ω .

On appelle hyperharmonique dans ω toute fonction réelle u s. c. i. $> -\infty$ dans ω satisfaisant à

$$u(y) \geq \int u(x) d\rho_y^{\omega'}(x)$$

pour tout ouvert régulier $\omega' \subset \bar{\omega} \subset \omega$ ($-u$ est dite hypoharmonique). Dans chaque domaine composant, une telle fonction vaut $+\infty$ ou bien est finie sur un ensemble partout dense et alors est dite surharmonique dans ω .

Toute fonction v surharmonique ≥ 0 dans ω admet une plus grande mino-
rante harmonique ; si elle est nulle, v est dite un potentiel.

Dans tout ouvert ω où existe une fonction harmonique $> \varepsilon > 0$, si une fonction hyperharmonique admet en tout point-frontière dans $\bar{\Omega}$ (obtenu par adjonction du point d'Alexandroff) une $\liminf \geq 0$, elle est ≥ 0 (principe de minimum).

C'est vrai de tout ouvert relativement compact s'il existe dans Ω un potentiel > 0 .

Un problème général de Dirichlet. - Soit dans Ω un ensemble Φ de filtres $\mathfrak{F}$ sans point adhérent dans Ω tels que, pour toute fonction hyperharmonique v ,

$$\liminf_{\mathfrak{F}} v \geq 0 \text{ quel que soit } \mathfrak{F} \in \Phi \text{ implique } v \geq 0.$$

Soit une fonction réelle $f(\mathfrak{F})$ sur Φ . On considère les fonctions hyperharmoniques v satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} v \text{ est bornée inférieurement} \\ \liminf_{\mathfrak{F}} v \geq f(\mathfrak{F}) \text{ quel que soit } \mathfrak{F} \in \Phi \end{array} \right. .$$

Alors l'enveloppe inférieure $\bar{\mathcal{H}}_f$ des v est $+\infty$, $-\infty$ ou harmonique.

On introduit aussi

$$\mathcal{H}_{-f} = -\bar{\mathcal{H}}_{-f} \quad ;$$

on a

$$\mathcal{H}_{-f} \leq \bar{\mathcal{H}}_f \quad .$$

Lorsqu'il y a égalité avec une fonction finie, donc harmonique, notée $\mathcal{H}_f$, on dit que f est résolutive, et $\mathcal{H}_f$ est appelée solution.

Cas particulier. - Supposons l'existence d'un potentiel > 0 dans Ω . Considérons comme espace fondamental un domaine quelconque Ω' relativement compact, et comme filtres $\mathfrak{F}_x$ ceux des traces des voisinages des points-frontière x de Ω' . Ils satisfont à la condition précédente, et toute fonction f de $\mathfrak{F}_x$, continue de x sur $\partial\Omega'$, est résolutive. La solution $H_f(y)$ peut alors s'écrire $\int f(x) d\mu_y(x)$ où $d\mu_y$ est une mesure de Radon ≥ 0 sur $\partial\Omega'$.

On peut plus généralement considérer un ouvert Ω'' relativement compact, une fonction f finie continue sur $\partial\Omega''$ et la solution dans chaque composante connexe au sens précédent. Elle peut être définie directement dans Ω'' au moyen de fonctions hyperharmoniques dans Ω'' , de $\liminf \geq f$ à la frontière. L'enveloppe inférieure est la solution $H_f^{\Omega''}$ précédente qui s'écrit $\int f(x) d\mu_y(x)$: $d\mu_y$ est dite mesure harmonique relative au point y .

Lorsque les constantes sont harmoniques, cette mesure a une norme $\int d\mu_y = 1$. Nous appellerons (A) l'axiomatique précédente, y compris l'hypothèse du potentiel > 0 et des constantes harmoniques.

4. Extension (E) ⁽²⁾. - Nous allons même considérer des hypothèses plus générales extraites des recherches ultérieures de H. BAUER [1]. Prenons Ω seulement localement compact, et conservons l'axiome 1. Appelons régulier tout ouvert relativement compact de frontière non vide possédant la même propriété que plus haut. L'axiome 2 sera affaibli en supposant qu'il existe une base d'ouverts réguliers. On peut alors introduire les fonctions hyperharmoniques comme plus haut. L'axiome 3 sera affaibli en supposant que, sur un ouvert, un ordonné filtrant croissant de fonctions harmoniques bornées supérieurement dans leur ensemble converge vers une fonction harmonique.

⁽²⁾ Les conditions, plus larges, introduites dans cette rédaction, s'appliquent alors au théorème 1 que DOOB a donné dans des conditions également générales, mais assez différentes [6].

On suppose encore les constantes harmoniques et comme hypothèse non locale, que les fonctions hyperharmoniques séparent Ω (ce qui a lieu dans la théorie A). On peut alors introduire comme plus haut $\mathcal{H}_f$, $\overline{\mathcal{H}}_f$ qui seront d'ailleurs harmoniques lorsque f est borné. Si Ω'' est un ouvert relativement compact, il a une frontière et le principe du minimum est valable ; on peut introduire l'enveloppe inférieure $\overline{H}_f^{\Omega''}$ des fonctions hyperharmoniques de $\liminf \geq f > -\infty$ à la frontière $\partial\Omega''$. On a encore

$$\underline{H}_f^{\Omega''} = -\overline{H}_{-f}^{\Omega''} \leq \overline{H}_f^{\Omega''} ;$$

il y a égalité si f est finie continue. Cette enveloppe commune s'écrit alors $\overline{H}_f^{\Omega''}(y)$ ou $\int f d\mu_y^{\Omega''}$ ($d\mu_y^{\Omega''}$ mesure harmonique, $\int d\mu_y = 1$). On montre que si v est hyperharmonique, $v(y) \geq \int v d\mu_y^{\Omega''}$, et cette intégrale décroît quand Ω'' croît (selon l'ordre d'inclusion).

5. Applications. - On considère dans l'espace Ω avec les axiomatiques (A) ou (E), les ouverts relativement compacts $\Omega_i \ni x_0$ et la mesure harmonique $d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$ relative à x_0 fixé. On va interpréter pour u harmonique dans Ω la condition d'intégrabilité uniforme de la famille des traces de u sur $\partial\Omega_i$ pour les mesures $d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$ sur $\partial\Omega_i$ (ou de la seule fonction u pour les mesures dans Ω définies par la restriction $d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$ sur $\partial\Omega_i$ et la restriction zéro sur le complémentaire). Cette condition équivaut d'ailleurs à celle relative à une sous-famille de Ω_i formée d'ouverts emboîtés de réunion Ω (on utilise la propriété β du n° 2 et le fait que $\varphi(|u|)$ est hypoharmonique si φ est convexe croissante).

Remarque. - Avec l'axiomatique (A) la condition d'intégrabilité uniforme entraîne que u est différence de deux fonctions harmoniques ≥ 0 . Il suffit de voir que

$$u(y) = \int u(x) d\mu_y^{\Omega_i} = \int u^+ d\mu_y^{\Omega_i} - \int u^- d\mu_y^{\Omega_i} .$$

Les deux dernières intégrales sont des fonctions harmoniques croissantes selon l'ordonné filtrant des Ω_i et les limites au point x_0 sont finies.

{ THÉOREME 1 (DOOB). - La condition d'intégrabilité uniforme pour u harmonique et les mesures $d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$ équivaut à l'existence pour tout $\varepsilon > 0$ de

u_2 hyperharmonique bornée inférieurement

u_1 hypoharmonique bornée supérieurement

satisfaisant à

$$u_1 \leq u \leq u_2, \quad u_2(x_0) - u_1(x_0) < \varepsilon.$$

Supposons la condition $v_a = \sup(u, -a)$ ($a > 0$) est hypoharmonique et $\int v_a d\mu_y^{\Omega_i}$, harmonique dans Ω_i , tend en croissant (selon l'ordonné filtrant des Ω_i , a étant fixé) vers une fonction hyperharmonique V_a dans Ω , $V_a \geq -a$. Comme $\int v_a d\mu_{x_0}^{\Omega_i} - \int u d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$ est arbitrairement petit pour a assez grand indépendamment de i , $V_a(x_0)$ est arbitrairement voisin de $u(x_0)$ pour a convenable (V_a est d'ailleurs harmonique dans l'axiomatique A). On complète en considérant $-u$.

Réciproquement partons de la propriété d'encadrement par u_1, u_2 . Soit $K \geq 0$ majorant u_1 et $-u_2$. On a toujours $|u| \leq u_2 - u_1 + K$ d'où

$$\int_{|u| \geq a} |u| d\mu_{x_0}^{\Omega_i} \leq (u_2 - u_1)(x_0) + K \int_{|u| \geq a} d\mu_{x_0}^{\Omega_i}.$$

On en déduit d'abord que

$$K' = \sup_i \int |u| d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$$

est fini. Or

$$K' \geq a \int_{|u| \geq a} d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$$

d'où

$$\int_{|u| \geq a} |u| d\mu_{x_0}^{\Omega_i} \leq (u_2 - u_1)(x_0) + \frac{KK'}{a}.$$

On en tire l'intégrabilité uniforme.

Remarque. - Si dans l'axiomatique (A), on remplace l'axiome 3 par (3') (dans tout domaine ω , toute fonction harmonique ≥ 0 est partout > 0 ou partout 0 , et les fonctions > 0 égales à 1 en un point de ω y sont également continues), la condition d'intégrabilité uniforme, pour u harmonique et les

$d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$, est indépendante de x_0 .

Conséquence. - Dans Ω , avec les axiomatiques (A) ou (E), toute fonction harmonique solution d'un problème de Dirichlet de type général considéré plus haut, satisfait à la condition d'intégrabilité uniforme pour les $d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$ (x_0 quelconque).

6. - On est donc amené à étudier la réciproque, c'est-à-dire à chercher sous quelles restrictions elle a lieu. Rappelons qu'un espace de Green et les fonctions harmoniques classiques satisfont à (A).

THÉOREME 2 (DOOB). - Dans un espace de Green Ω , pourvu de sa frontière de Martin, on considère le problème de Dirichlet correspondant, c'est-à-dire relatif aux fonctions harmoniques classiques et aux filtres $\mathfrak{F}$ (voir n° 3), traces sur Ω des voisinages des points-frontière de Martin. Alors toute fonction harmonique satisfaisant à la condition d'intégrabilité uniforme pour $d\rho_{x_0}^{\Omega_i}$ (mesure harmonique classique en x_0 pour Ω_i) est solution d'un problème de Dirichlet précédent.

Extension. - Si h est harmonique > 0 dans Ω , les quotients par h des fonctions harmoniques satisfont aux conditions de (A) et sont dits fonctions h -harmoniques. Il y correspond un problème de Dirichlet avec les mêmes filtres $\mathfrak{F}$ (dit problème de Dirichlet-Martin) et aussi dans chaque Ω_i un problème de Dirichlet, comme celui relatif à Ω'' (fin du n° 3). La mesure harmonique correspondante $dv_{x_0}^{\Omega_i}$ vaut d'ailleurs

$$\frac{h(x)}{h(x_0)} d\rho_{x_0}^{\Omega_i}(x) .$$

Alors toute fonction h -harmonique u satisfaisant à la condition d'intégrabilité uniforme pour $dv_{x_0}^{\Omega_i}$ est solution de ce problème de Dirichlet (relatif à h et à la frontière de Martin).

En effet cette condition d'intégrabilité uniforme entraîne que u soit différence de deux fonctions h -harmoniques ≥ 0 ; chacune, et par suite u , ont des limites fines ⁽³⁾ "finies à la frontière Δ " "h-presque partout" ⁽⁴⁾. Soit f

⁽³⁾ C'est-à-dire selon le filtre des complémentaires des ensembles effilés en un point-frontière minimal. L'existence de ces limites fines a été établie par DOOB [7] et [8].

⁽⁴⁾ C'est-à-dire sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle pour la mesure canonique de Martin associée à h (dans la représentation intégrale de h).

la fonction définie h -presque partout sur Δ de ces limites fines. On sait ⁽⁵⁾ que l'enveloppe $\overline{\mathcal{H}}_f$ des fonctions hyper- h -harmoniques bornées inférieurement et de $\liminf \geq f$, h -p. p. à la frontière Δ , est aussi l'enveloppe inférieure des fonctions hyper- h -harmoniques bornées inférieurement avec $\liminf$ fine majorant f , h -p. p. Résultat analogue avec $\mathcal{H}_f$. Mais alors l'existence des fonctions encadrantes du théorème 1 de DOOB, arbitrairement voisines en x_0 et majorant et minorant respectivement $\overline{\mathcal{H}}_f$ et $\mathcal{H}_f$ montrent l'égalité en x_0 , donc partout, de $\overline{\mathcal{H}}_f$, $\mathcal{H}_f$ et u .

Cas particulier. - Les fonctions harmoniques dans la boule de R^n satisfaisant à la condition d'intégrabilité uniforme pour les boules concentriques et x_0 au centre sont les intégrales de Poisson-Lebesgue.

7. Applications aux fonctions harmoniques (BLD), c'est-à-dire d'intégrale de Dirichlet finie dans un espace de Green Ω (DOOB [9]).

Soit u une telle fonction. DOOB remarque que $\Delta u^2 = 2 \operatorname{grad}^2 u$ est d'intégrale de Lebesgue finie. Donc la mesure associée à u^2 sous-harmonique est de norme (totale) finie, par suite admet un potentiel de Green (non partout infini). Ainsi u^2 admet une majorante harmonique, ce qui entraîne $\int u^2 d\rho_{x_0}^{\Omega_i}$ borné, d'où l'intégrabilité uniforme de u ($n^\circ 2, \beta$). Cela prouve que u est solution d'un problème de Dirichlet-Martin, donc admet à la frontière des limites fines finies h -p. p.

Extension ⁽⁶⁾ (Mme LUMER-NAÏM). - Soit u harmonique telle que $w h \operatorname{grad}^2 \frac{u}{h}$ soit d'intégrale de Lebesgue finie sur Ω (pour h harmonique > 0 , w sur-harmonique > 0). Un cas particulier est celui où $\int h^2 \operatorname{grad}^2 \frac{u}{h} dx < \infty$ (u est dite h -BLD).

Alors comme $\Delta \frac{u^2}{h} = 2h \operatorname{grad}^2 \frac{u}{h}$, on voit que la mesure de densité $\Delta \frac{u^2}{h}$ a un potentiel (non $\equiv \infty$), donc que $\frac{u^2}{h}$ sous-harmonique a une majorante harmonique, c'est-à-dire que $\frac{u^2}{h}$ est sous- h -harmonique et admet une majorante h -harmonique. On achève de manière analogue ; $\frac{u}{h}$ est solution d'un problème de Dirichlet-Martin, pour fonctions h -harmoniques et admet donc à la frontière des limites fines h -p. p.

(5) Conséquence aisée du théorème 23 (Thèse NAÏM [11]).

(6) Ajoutée dans cette rédaction d'après une communication de Mme LUMER-NAÏM et sa note [12].

8. Étude analogue avec d'autres frontières. - Le succès du théorème précédent tient au fait que la fonction harmonique admet des limites finies à la frontière de Martin. Aussi songerons-nous à adjoindre une hypothèse analogue à cette propriété pour examiner le cas d'autres frontières et d'abord celui de la frontière euclidienne.

THÉOREME 3. - Considérons dans un espace de Green Ω un domaine ω relativement compact. Soit dans ω une fonction harmonique u satisfaisant à la condition d'intégrabilité uniforme pour $dp_{x_0}^{\Omega, i}$ ($\bar{\Omega}_1 \subset \omega$; $x_0 \in \omega$, $\bigcup \Omega_i = \omega$) et admettant une limite fine (c'est-à-dire dans la topologie fine classique de Ω) f , en tout point-frontière, sauf sur un ensemble de mesure harmonique $- dp_{x_0}^{\omega}$ nulle. Alors H_F^{ω} existe et vaut u .

Introduisons les fonctions encadrantes u_1, u_2 de u selon le théorème 1; u_2 admet à la frontière une $\liminf \text{ fine} \geq f$ p. p. (en mesure harmonique), donc majore H_F grâce au théorème suivant

(T) : les fonctions hyperharmoniques bornées inférieurement de $\liminf \geq \varphi$ p. p. à la frontière, et celles de $\liminf \text{ fine} \geq \varphi$ p. p. ont même enveloppe inférieure ⁽⁷⁾.

En considérant aussi u_1 , et le fait que u_1, u_2 sont arbitrairement voisins en x_0 , on conclut $\underline{H}_F^{\omega} = \overline{H}_F^{\omega} = u$.

Extension ⁽⁸⁾. - Considérons les hypothèses de l'axiomatique (A) augmentées d'une base dénombrable d'ouverts et de l'axiome (D) de domination ⁽⁹⁾. Soient ω un domaine relativement compact, u une fonction harmonique dans ω satisfaisant à la condition d'intégrabilité uniforme pour les mesures harmoniques $d\mu_{x_0}^{\Omega, i}$ (x_0 fixé dans ω , $\bar{\Omega}_1 \subset \omega$; $\bigcup \Omega_i = \omega$) et admettant une limite fine (dans la topologie fine de Ω) f en tout point-frontière sauf sur un ensemble de mesure harmonique $- d\mu_{x_0}^{\omega}$ nulle. Alors H_F^{ω} existe et vaut u .

La démonstration est la même à condition d'étendre le théorème (T) ⁽⁹⁾; il dérive comme dans le cas particulier antérieur du principe de minimum suivant dans les mêmes hypothèses :

si u est hyperharmonique dans ω , borné inférieurement, de $\liminf \text{ fine} \geq 0$ en tout point-frontière, du moins p. p. (au sens de $d\mu_{x_0}^{\omega}$) alors $u \geq 0$.

⁽⁷⁾ D'après les résultats de [2] donnés dans R^n pourvus d'un point à l'infini, mais valables dans un ouvert relativement compact d'un espace de Green.

⁽⁸⁾ Introduite dans cette rédaction.

⁽⁹⁾ Sans supposer nécessairement les constantes harmoniques (car on se ramène à ce cas).

Pour u surharmonique finie continue, la démonstration est aisée en considérant l'ouvert α où $u < 0$ et les points-frontière situés sur $\partial\omega$ (soit points d'effilement pour α , soit sur un ensemble de mesure harmonique nulle pour ω et formant par conséquent un ensemble sur $\partial\alpha$ de mesure harmonique nulle pour chacun des composants de α). On conclurait $u = 0$ dans α supposé non vide. Ce résultat nous suffirait pour le théorème T étendu si l'on savait établir que toute enveloppe finie $\overline{H}_f^\omega$ est aussi l'enveloppe de la sous-famille des fonctions surharmoniques finies continues.

On peut d'autre part démontrer dans le cas général notre principe de minimum. On se ramène au cas des constantes harmoniques (dans un espace $\Omega' \supset \overline{\omega}$). On introduit, s'il n'est pas vide, l'ensemble fermé E (dans ω) où $u \leq a < 0$, et le compact croissant K_n ($K_n \subset \omega$, $\bigcup K_n = \omega$). Si λ_n est la "mesure balayée" ⁽¹⁰⁾ de ε_x (masse 1 en $x \in E$) relative à $e_n = \mathcal{C}(E \cap K_n)$ dans l'espace ω selon la définition de Mme HERVÉ ([10], n° 20 et 28) et d'ailleurs portée par ∂e_n , on va voir que $\lambda_n(\partial e_n \cap \partial K_n) \rightarrow 0$, d'où $u = a$ dans E , et par suite dans ω . On va alors considérer

1. la partie e'_n de $\partial e_n \cap \partial K_n$ située dans un voisinage $\mathcal{V}$ de l'ensemble de $\partial\omega$, ensemble exceptionnel (de mesure harmonique nulle) de l'énoncé. Alors $\lambda_n(e'_n) \leq \hat{R}_1^{\mathcal{V}}(x_0)$ arbitrairement petite pour $\mathcal{V}$ convenable.

2. la partie e''_n de $\partial e_n \cap \partial K_n$ située dans un voisinage $\mathcal{W}$ de l'ensemble des points de $\partial\omega$ où E est effilé. Alors

$$\lambda_n(e''_n) \leq (\hat{R}_1^{\mathcal{W} \cap E}(x_0))_\omega \leq [\hat{R}_1^{\mathcal{W} \cap E}]_{\Omega'}(x_0)$$

⁽¹⁰⁾ Rappelons que pour v surharmonique bornée inférieurement dans ω , $v(x) \geq \int v d\lambda_n$ et que λ_n ne charge pas les ensembles polaires hors $\{x\}$.

arbitrairement petite pour $\mathbb{N}$ convenable ⁽¹¹⁾.

On conclut en remarquant que, pour γ et $\mathbb{N}$ fixés,

$$\partial e_n \cap \partial K_n = e_n' \cup e_n'' \text{ pour } n \text{ assez grand} \quad .$$

Dans un autre exposé nous reviendrons sur l'effilement avec d'autres applications de l'intégrabilité uniforme.

(¹¹) Cela résulte de la proposition suivante analogue à un théorème de Choquet [5] qui inspire aussi la démonstration que nous allons donner :

Sous les hypothèses de (A) (mais d'ailleurs sans supposer les constantes harmoniques) soit $X \subset \Omega$ et $x_0 \notin \bar{X}$. Introduisons V_γ surharmonique finie continue > 0 dans ω . Alors l'ensemble des points d'effilement de X peut être inclus dans un ouvert ω_0 tel que $R_{V_0}^{\omega_0 \cap X}(x_0)$ soit arbitrairement petit.

On introduira V_1 surharmonique finie continue > 0 dans ω telle que, pour tout ensemble e_0 , les points de ω , où e_0 est effilé, sont les points où $\hat{R}_V^{e_0} < V_1$ (existence de V_1 d'après Mme HERVÉ [10], conséquence de son théorème 9.1).

Comme $e \cap X$ est polaire, il existe ω_1 ouvert $\supset e \cap X$ tel que $R_{V_0}^{\omega_1}(x_0) < \varepsilon$; il existe aussi ω_2 ouvert tel que $R_{V_0}^{\omega_2}(x_0) < \varepsilon$ et que la restriction de $\hat{R}_{V_1}^X$ à $C\omega_2$ soit continue. Or dans $X_1 = X \setminus (\omega_1 \cup \omega_2)$ et par suite dans $\alpha = \bar{X}_1 \cap \omega$, $\hat{R}_{V_1}^X$ vaut V_1 . Donc $C_{\omega\alpha} \supset e$; comme $C_{\omega\alpha} \cap X$ est contenu dans $\omega_1 \cup \omega_2$, cet ouvert $C_{\omega\alpha}$ est ω_0 cherché.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAUER (Heinz). - Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problem für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, Math. Annalen, t. 146, 1962, p. 1-59.
 - [2] BRELOT (Marcel). - Sur l'allure des fonctions harmoniques et sous-harmoniques à la frontière, Math. Nachr., t. 4, 1950/51, p. 298-307.
 - [3] BRELOT (Marcel). - Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, Séminaire de théorie du potentiel [Séminaire Brelot-Choquet-Deny], t. 2, 1958, n° 1, 40 pages.
 - [4] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). - Espaces et lignes de Green, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 3, 1951, p. 199-263.
 - [5] CHOQUET (Gustave). - Sur les points d'effilement d'un ensemble, Application à l'étude de la capacité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 91-101.
 - [6] DOOB (J. L.). - Probability methods applied to the first boundary value problem, Proceedings of the Third Berkeley symposium on mathematical statistics and probability [1954. 1955. Berkeley], Vol. 2 ; p. 49-80. - Berkeley, University of California Press, 1956.
 - [7] DOOB (J. L.). - Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 431-458.
 - [8] DOOB (J. L.). - A non probabilistic proof of the relative Fatou theorem, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 293-300.
 - [9] DOOB (J. L.). - Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 573-621.
 - [10] HERVÉ (Mme R.-M.). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-571 (Thèse Sc. math. Paris. 1961).
 - [11] [Mme LUMER]-NAÏM (Linda). - Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 183-281 (Thèse Sc. math. Paris. 1957).
 - [12] LUMER-NAÏM (Mme Linda). - Sur une extension du principe de Dirichlet en espace de Green, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 1058-1060.
-