Jacques Deny

Éléments de théorie du potentiel par rapport à un noyau de Hunt

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 5 (1960-1961), exp. n° 8, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1960-1961__5__A9_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
5e année, 1960/61, n° 8

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DU POTENTIEL PAR RAPPORT À UN NOYAU DE HUNT

par Jacques DENY

Cet exposé comprend deux parties ; dans la première on esquisse la théorie non fine du potentiel par rapport à un noyau de Hunt continu (voir définition ci-dessous) ; on utilise une méthode non probabiliste, reposant sur la notion très simple de noyau élémentaire, qui a l'avantage de permettre d'atteindre le cas non sous-markovien. Dans la seconde partie on donne quelques indications sur la méthode utilisée par HUNT dans le cas sous-markovien, méthode qui permet d'obtenir des résultats beaucoup plus fins, qui seront développés dans l'exposé suivant.

I. Principe de domination pour un noyau de Hunt continu.

Noyau de Hunt continu. - Soit E un espace localement compact dénombrable à l'infini. On se donne une famille d'applications linéaires positives P_t de $C_K(E)$ dans $C(E)$ ($t \geqslant 0$) telles que

(i) $\forall\ f \in C_K^+$, la fonction $(x, t) \to P_t f(x)$ est continue sur $E \times R^+$.

(ii) $\forall\ f \in C_K^+$, $\forall\ x \in E$, $\forall\ s \geqslant 0$, $\forall\ t \geqslant 0$, on a $P_s P_t f(x) = P_{s+t} f(x)$.

(iii) P_0 est l'opérateur identique.

(iv) $\forall\ f \in C_K^+$, la fonction $x \to Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)$ est continue sur E.

Un noyau V défini de cette façon sera appelé noyau de Hunt continu ; on ne fait aucune hypothèse sur le comportement de V à l'infini, et on ne suppose pas que les opérateurs P_t soient sous-markoviens. On se donne une fois pour toutes un tel noyau.

LEMME 1. - _Quel que soit le compact_ K _de_ E, _il existe_ $f \in C_K^+$ _telle que_ $Vf(x) \geqslant 1$ _en tout point_ x _de_ K.

Soit en effet $g \in C_K^+$ avec $g(x) > 1$ en tout point x de K ; d'après (i) et (iii), il existe $t_0 > 0$ tel que $t \leqslant t_0$ entraîne $P_t g(x) > 1$, $\forall\ x \in K$; la fonction $f = g/t_0$ convient, d'où le lemme, qui exprime que V est strictement positif.

Résolvantes. - On appelle ainsi les opérateurs R_λ ($\lambda \geq 0$) définis par

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x)\, dt \quad (f \in C_K) \quad .$$

A priori, si $f \in C_K^+$, $R_\lambda f$ est semi-continue inférieurement ; en fait, $R_\lambda f$ est même continue, d'après la relation immédiate

$$\text{(1)} \qquad Vf = \lambda R_\lambda Vf + R_\lambda f$$

(la fonction continue Vf étant somme des deux fonctions semi-continues inférieurement $R_\lambda f$ et $\lambda R_\lambda Vf$, chacune de celles-ci est continue). Les R_λ sont donc eux-mêmes des noyaux de Hunt continus.

LEMME 2. - Pour toute $f \in C$, on a

$$Vf + \frac{f}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda R_\lambda)^n f \quad .$$

C'est une conséquence immédiate de la relation

$$R_\lambda^n f(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R_\lambda f(x) = \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} P_t f(x)\, dt$$

qui se déduit elle-même de l'équation résolvante

$$(\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu f = R_\mu f - R_\lambda f \quad (\lambda \text{ et } \mu \geq 0) \quad .$$

Fonctions surmédianes. - Une fonction universellement mesurable $u \geq 0$, à valeurs finies ou infinies, est dite surmédiane, si $P_t u \leq u$, $\forall\ t > 0$.

Si u est surmédiane, $\lambda R_\lambda u \leq u$. C'est évident d'après la définition de R_λ sous forme d'une intégrale.

Si u est surmédiane, $P_t u(x)$ croit lorsque t décroit ; si la limite est égale à $u(x)$, $\forall\ x \in E$, u est dite excessive.

Le V-potentiel de toute fonction universellement mesurable ≥ 0 est évidemment une fonction surmédiane et même excessive.

LEMME 3. - Soit $\lambda > 0$; posons $V_\lambda = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda R_\lambda)^n$ [1]. Soit u surmédiane, et soit $f \in C_K^+$. Si on a $V_\lambda f(x) \leq u(x)$ en tout point x du support S_f de f, alors $V_\lambda f \leq u$ partout.

En effet si on pose $v = \inf(V_\lambda f, u)$, on a $\lambda R_\lambda v \leq v$, car on a $\lambda R_\lambda u \leq u$ et $\lambda R_\lambda V_\lambda f \leq V_\lambda f$. De la relation

$$v = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda R_\lambda)^k \lambda(I - \lambda R_\lambda) v + (\lambda R_\lambda)^n v$$

on déduit $v = V_\lambda g$ avec $g = \lambda(I - \lambda R_\lambda) v \geq 0$ (car $(\lambda R_\lambda)^n v \leq (\lambda R_\lambda)^n Vf$ $= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=n}^{\infty} (\lambda R_\lambda)^k f$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, puisque $V_\lambda f$ est partout finie). On a

$$\lambda R_\lambda V_\lambda g = \lambda R_\lambda v \leq R_\lambda V_\lambda f$$

d'où immédiatement

$$V_\lambda g - \frac{g}{\lambda} \leq V_\lambda f - \frac{f}{\lambda} \quad .$$

Comme, par hypothèse, $V_\lambda g(x) = V_\lambda f(x)$ en tout point $x \in S_f$, on a donc $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in S_f$, donc partout. On a donc $V_\lambda f \leq V_\lambda g$ partout, d'où finalement $V_\lambda f = V_\lambda g = v \leq u$ partout.

THÉORÈME. - Soit u surmédiane, et soit $f \in C_K^+$; si on a $Vf(x) \leq u(x)$, $\forall x \in S_f$, alors $Vf \leq u$ partout.

En effet d'après le lemme 2 et la définition de V_λ, les hypothèses entraînent

$$V_\lambda f(x) \leq u(x) + \frac{1}{\lambda} f(x), \quad \forall x \in S_f \quad .$$

Soit alors $g \in C_K^+$ telle que $Vg(x) \geq 1$, $\forall x \in S_f$ (lemme 1), et soit $\varepsilon > 0$. Pour λ assez grand, on a $f(x)/\lambda \leq \varepsilon Vg(x)$ pour tout x, d'où

---

[1] V_λ est un "noyau élémentaire" continu (d'après le lemme 2) ; le lemme 3 exprime que ce noyau satisfait au principe de domination ; pour l'étude systématique des noyaux élémentaires, voir : DENY (Jacques). - Les noyaux élémentaires, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 1959/60, exposé n° 3, 12 p. (à paraître).

$$V_\lambda f(x) \leqslant u(x) + \varepsilon Vg(x) \ , \quad \forall \quad x \in S_f$$

donc (lemme 3) : $Vf \leqslant V_\lambda f \leqslant u + \varepsilon\, Vg$ partout, car Vg est surmédiane ; d'où le résultat, en faisant $\varepsilon \to 0$.

REMARQUE 1. - Ce théorème entraîne évidemment que le noyau V satisfait au principe de domination (cas où u est un potentiel Vg , avec $g \in C_K^+$). Comme V_λ est strictement positif (lemme 1), il satisfait au principe du balayage (voir exposé 6).

REMARQUE 2. - Si les opérateurs P_t sont sous-markoviens, les constantes positives sont excessives. Le théorème entraîne alors que V satisfait au principe complet du maximum.

La démonstration du théorème fondamental de Hunt, énoncé dans l'exposé 6, et dont une partie a été établie dans l'exposé 7, sera donc entièrement achevée si on prouve le résultat suivant : si le noyau V tend vers 0 à l'infini, l'image $V(C_K)$ est partout dense dans C_0 .

A cet effet il suffit de montrer qu'on peut approcher uniformément toute fonction $f \in C_K^+$ par le potentiel d'une fonction de C_K^+ . Or on a

$$\frac{1}{t}\int_0^t P_s f\, ds = \frac{Vf - VP_t f}{t} \qquad ;$$

lorsque t tend vers 0 le premier membre tend vers f uniformément ; pour achever, il suffit de montrer que $VP_t f$, qui est dans C_0 , peut être approchée autant qu'on veut dans C_0 par le potentiel d'une fonction de C_K^+ , ce qui résulte immédiatement du lemme de Dini.

REMARQUE 3. - La théorie non fine du potentiel par rapport à un noyau de Hunt continu comprend l'étude des mesures excessives, c'est-à-dire des mesures de Radon $\xi \geqslant 0$ telles que $\xi P_t \leqslant \xi$, $\forall \quad t > 0$ (et alors, d'après le lemme de Fatou, $\xi = \lim\limits_{t\to 0} \xi P_t$). Une mesure excessive η est dite harmonique si $\eta P_t = \eta$, $\forall \quad t > 0$. Le problème fondamental est celui de l'existence d'une décomposition de toute mesure excessive comme somme d'un potentiel μV de mesure $\geqslant 0$ et d'une mesure harmonique ; on ne traitera pas ici cette question.

II. La méthode de Hunt dans le cas stochastique (2).

On suppose que l'espace localement compact E est à base dénombrable. On se donne un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens P_t sur l'espace $C_0 = C_0(E)$. Si f est universellement mesurable $\geqslant 0$ sur E, à valeurs finies ou infinies, on appelle potentiel de f la fonction

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\, dt$$

qui est partout définie, à valeurs finies ou non ; on ne suppose pas que Vf soit localement bornée si f est bornée à support compact, autrement dit V n'est pas nécessairement un noyau au sens donné dans l'exposé 6 (le semi-groupe n'est pas nécessairement intégrable, dans la terminologie de Meyer ; cf. exposé 9). Pour $\lambda > 0$ on appellera λ-potentiel de f le potentiel par rapport au noyau-résolvante $V^\lambda = R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t\, dt$, qui est un opérateur continu sur C_0.

On renvoie aux exposés 3 et 5 pour la construction des processus de Markov canoniques admettant P_t pour fonction de transition, et pour les notations. On rappelle la formule fondamentale

$$P_t f(x) = E^x(f \circ X_t)$$

d'où, en multipliant par $e^{-\lambda t}$ et intégrant

$$V^\lambda f(x) = E^x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f \circ X_t\, dt\right] \tag{1}$$

d'où encore, en intégrant par rapport à une mesure $\mu \geqslant 0$ sur E :

$$\langle \mu\, ,\, V^\lambda f \rangle = E^\mu\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f \circ X_t\, dt\right] .$$

L'opérateur P_T^λ. - Soit T un temps d'arrêt du processus ; soit $\lambda \geqslant 0$; on appelle P_T^λ l'opérateur sous-markovien défini sur toute fonction universellement mesurable $f \geqslant 0$ par

$$P_T^\lambda f(x) = E^x[e^{-\lambda T} f \circ X_T]$$

où $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$. Évidemment si $T = t \equiv$ constante, $P_t^\lambda = e^{-\lambda t} P_t$.

(2) HUNT (G. A.). - Markov processes and potentials I, Illinois J. of Math., t. 1, 1957, p. 44-93 ; la présentation est quelque peu modifiée, suivant des idées de P. A. MEYER.

Le rôle essentiel joué par la propriété de Markov forte (voir exposé 5) est mis en évidence par le lemme suivant :

LEMME 1. - <u>Soit</u> f <u>universellement mesurable</u> ≥ 0 ; <u>soit</u> $\lambda \geq 0$; <u>on a</u>

$$P_T^\lambda V^\lambda f(x) = E^x[\int_{T(\omega)}^\infty e^{-\lambda t} f \circ X_t(\omega)\, dt] \quad .$$

Posons en effet $\varphi(\omega) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f \circ X_t(\omega)\, dt$, $\Phi(x) = E^x(\varphi)$; d'après (1), on a $\Phi(x) = V^\lambda f(x)$.

D'après la propriété de Markov forte, sous la forme donnée dans l'addendum à l'exposé 5 (théorème 2) on a

$$E[\varphi \circ \theta_T | F_T] = \Phi \circ X_T \quad \text{p. s. pour toute loi initiale}$$

où θ_T est l'opérateur de translation défini par $X_t(\theta_T\, \omega) = X_{T(\omega)+t}\,(\omega)$, $\forall\ t \geq 0$, et F_T est la tribu des évènements antérieurs à T .

Par définition de P_T^λ on a donc :

$$\begin{aligned} P_T^\lambda V^\lambda f(x) &= E^x[e^{-\lambda T}\ \Phi \circ X_T] \\ &= E^x[e^{-\lambda T}\ E[\varphi \circ \theta_T | F_T]] \quad \text{(propriété de Markov forte)} \\ &= E^x[e^{-\lambda T}\ \varphi \circ \theta_T] \quad (\text{car } e^{-\lambda T} \text{ est } F_T\text{-mesurable}) \\ &= E^x[e^{-\lambda T} \int_0^\infty e^{-\lambda t} f \circ X_{T+t}\, dt] \end{aligned}$$

d'où, par changement de variable, la formule à démontrer.

<u>L'opérateur</u> P_e^λ . - Soit T_e le temps d'entrée dans l'ensemble presque analytique e (cf. exposé 5) ; on notera P_e^λ l'opérateur $P_{T_e}^\lambda$

LEMME 2. - <u>Si</u> K <u>est un compact,</u> $P_K^\lambda f$ <u>ne dépend que des valeurs prises par</u> f <u>sur</u> K .

En effet, d'après la continuité à droite des trajectoires, $X_{T_K}(\omega) \in K$ presque sûrement pour toute loi initiale ; si donc f et g universellement mesurables sont égales en tout point de K , on a $f \circ X_{T_K}(\omega) = g \circ X_{T_K}(\omega)$ presque sûrement, d'où $P^\lambda_K f = P^x_K g$ par définition de P^λ_K .

Il en résulte que les mesures $P^\lambda_e(x , dy)$ sont toutes portées par l'adhérence de l'ensemble presque analytique e (on pourrait améliorer ce résultat en utilisant la topologie fine).

LEMME 3. - <u>Si</u> f <u>universellement mesurable</u> ≥ 0 <u>est nulle hors de l'ensemble presque analytique</u> e , <u>on a</u> $P^\lambda_e V^\lambda f = V^\lambda f$.

En effet l'hypothèse entraîne $f \circ X_t(\omega) = 0$ si $t < T_e(\omega)$, d'où, d'après la relation fondamentale du lemme 1 :

$$P^\lambda_e V^\lambda f(x) = E^x[\int_T^\infty e^{-\lambda t} f \circ X_t \, dt] = E^x[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f \circ X_t] = V^\lambda f(x)$$

<u>Fonctions λ-excessives.</u> - Soit $\lambda \geq 0$; une fonction universellement mesurable $u \geq 0$, à valeurs finies ou non, est dite λ-excessive si $e^{-\lambda t} P_t u \leq u$, $\forall$ $t > 0$ et si $\lim_{t \to 0} P_t u = u$.

Tout λ-potentiel de fonction ≥ 0 est λ-excessive ; toute constante ≥ 0 est λ-excessive ($\lambda \geq 0$) . Toute fonction 0-excessive est λ-excessive pour tout $\lambda > 0$.

LEMME 4. - <u>Toute fonction λ-excessive est limite croissante de fonctions λ-excessives bornées</u> ($\lambda \geq 0$).

Soit en effet u une telle fonction, et soit n un entier > 0 ; la fonction $v_n = \inf(u , n)$ est λ-surmédiane [3] ; soit $\overline{v}_n = \lim_{t \to 0} P_t v_n$ sa régularisée λ-excessive ; il est facile de voir que $\overline{v}_n$ croit vers u lorsque n augmente indéfiniment.

LEMME 5. - <u>Toute fonction λ-excessive</u> ($\lambda > 0$) <u>est limite d'une suite croissante de λ-potentiels bornés engendrés par des fonctions</u> ≥ 0 .

Soit en effet u une fonction λ-excessive <u>bornée</u> ($\lambda > 0$) ; soit $t > 0$; posons $f_t = (u - e^{-\lambda t} P_t u)/t$. On vérifie très facilement que $V^\lambda f_t$ croit vers u lorsque t décroit vers 0 (les hypothèses sur u et λ sont essentielles) ; on conclut grâce au lemme 4.

---

[3] C'est-à-dire qu'elle satisfait à la première partie de la définition des fonctions λ-excessives; on fait on peut montrer que la seconde condition est également satisfaite.

COROLLAIRE. - Si u est λ-excessive ($\lambda > 0$) et si T est un temps d'arrêt du processus on a $P_T^\lambda u \leq u$.

En effet, d'après le lemme 1, cette relation est vraie si u est un λ-potentiel ($\lambda \geq 0$) ; elle est donc vraie pour toute fonction λ-excessive ($\lambda > 0$), d'après le lemme 5.

THÉORÈME (Principe de domination). - Soit u une fonction λ-excessive ($\lambda \geq 0$) soit e un ensemble presque analytique, et soit $f \geq 0$ universellement mesurable nulle hors de e. Si on a $V^\lambda f(x) \leq u(x)$ en tout point $x \in e$, on a $V^\lambda f \leq u$ partout.

Supposons d'abord $\lambda > 0$ et e compact ($e = K$). D'après le lemme 2, on a $P_K^\lambda V^\lambda f \leq P_K^\lambda u$, et on conclut $V^\lambda f \leq u$ grâce au lemme 3 et au corollaire du lemme 5.

Supposons encore $\lambda > 0$, mais e presque analytique quelconque. Soit K un compact de e, et soit f_K la fonction $f \chi_K$. On a $V^\lambda f_K \leq u$ sur K, donc partout d'après la première partie de la démonstration, d'où le résultat en observant que $V^\lambda f(x) = \sup_{K \subset e} V^\lambda f_K(x)$ pour tout x.

Soit enfin u une fonction 0-excessive ; pour tout $\lambda > 0$, on $V^\lambda f(x) \leq Vf(x) \leq u(x)$ sur e, donc partout $V^\lambda f \leq u$ car u est λ-excessive ; d'où le résultat, en faisant tendre λ vers 0.

Le balayage. - Les considérations précédentds permettent d'établir très simplement un théorème du balayage plus précis que celui de l'exposé 6 (on pourrait encore préciser par des considérations de topologie fine).

Soit en effet μ une mesure de Radon ≥ 0 de masse totale finie (on pourrait généraliser). Soit e un ensemble presque analytique quelconque ; soit $\lambda \geq 0$. La mesure de Radon μP_e^λ satisfait aux hypothèses du balayage relatif au noyau V^λ (rappelons que, pour $\lambda = 0$, V^λ n'est un "noyau" que si le semi-groupe est intégrable). En effet :

1° μP_e^λ est portée par l'adhérence de e (d'après le lemme 2).

2° $(\mu P_e^\lambda) V^\lambda \leq \mu V^\lambda$ car, pour toute f universellement mesurable ≥ 0, on a (lemme 1) :

$$\langle \mu P_e^\lambda V^\lambda , f \rangle = E^\mu[\int_{T_e}^\infty e^{-\lambda t} f \circ X_t \, dt] \leq E^\mu[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f \circ X_t \, dt] = \langle \mu V^\lambda , f \rangle$$

3° les restrictions à e de $(\mu P_e^\lambda) V^\lambda$ et de μV^λ sont identiques, car si f est nulle hors de e, on a l'égalité dans les relations précédentes.