Georges Lion

Construction du semi-groupe associé a un noyau de Hunt

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 5 (1960-1961), exp. nº 7, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1960-1961__5__A8_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
5e année, 1960/61, n° 7

CONSTRUCTION DU SEMI-GROUPE ASSOCIÉ A UN NOYAU DE HUNT

par Georges LION

I. Introduction

Soit E un espace localement compact dénombrable à l'infini. On note $\mathcal{C}_K$ l'espace vectoriel des fonctions numériques continues à support compact sur E, $\mathcal{C}_0$ l'espace vectoriel des fonctions numériques continues tendant vers 0 à l'infini. Muni de la norme uniforme, $\mathcal{C}_0$ est un espace de Banach réel.

On se propose d'étudier un moyen continu V tendant vers 0 à l'infini, c'est-à-dire une application linéaire positive de $\mathcal{C}_K$ dans $\mathcal{C}_0$, possédant en outre les deux propriétés suivantes :

(α) L'image $V(\mathcal{C}_K)$ est partout dense dans $\mathcal{C}_0$.

(β) V satisfait au principe complet du maximum, autrement dit si f et g sont deux fonctions positives de $\mathcal{C}_K$ et a un nombre réel positif, la relation $Vf(x) + a \geqslant Vg(x)$ a lieu en tout point x de E si elle a lieu en tout point du support de g.

On va établir une partie du théorème fondamental de Hunt, énoncé dans l'exposé 6 : il existe un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens P_t sur $\mathcal{C}_0$ tel que

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\, dt \qquad \forall \quad f \in \mathcal{C}_K \qquad \forall \quad x \in E \quad .$$

On donnera d'abord la démonstration de Hunt dans le cas où V est borné (c'est-à-dire prolongeable en un opérateur borné sur $\mathcal{C}_0$) ; on passera ensuite au cas général par une méthode différente de celle de Hunt et indépendante de toute considération probabiliste.

On rappelle cette conséquence des axiomes (α) et (β) : si $f \in \mathcal{C}_K$, on a $f(x) \geqslant 0$ en tout point x où Vf atteint un maximum $\geqslant 0$ (principe du maximum positif). Il en résulte que V est injectif ; on appellera A l'opérateur linéaire défini sur $\mathcal{Q} = V(\mathcal{C}_K)$ par $AVf = -f$.

II. Étude des noyaux bornés.

V est dit borné s'il existe une constante $\|V\|$ telle que pour toute f de $\mathcal{C}_K$ on ait $\|Vf\| \leqslant \|V\| \, \|f\|$.

On peut alors prolonger V à $\mathcal{C}_0$ tout entier dans lequel $\mathcal{C}_K$ est partout dense. Posons $\mathcal{D} = V(\mathcal{C}_0)$; $\mathcal{D}$ est partout dense dans $\mathcal{C}_0$ (d'après (α)). V ainsi prolongée est une application positive.

Montrons que le prolongement de V à $\mathcal{C}_0$ satisfait encore à la condition (β). Soient $a \geqslant 0$, f et g deux fonctions positives de $\mathcal{C}_0$. Par hypothèse, $a + Vf \geqslant Vg$ sur le support de g , donc pour toute ψ de $\mathcal{C}_K$, $0 \leqslant \psi \leqslant g$, $a + Vf \geqslant V\psi$ sur le support de ψ ; pour tout $b > a$, $b + Vf + a - b \geqslant V\psi$ sur le support de ψ . Il existe donc dans $\mathcal{C}_K$ une fonction φ , $0 \leqslant \varphi \leqslant f$, telle que $b + V\varphi \geqslant V\psi$ sur le support de ψ . Ceci entraîne, d'après (β) que

$$b + V\varphi \geqslant V\psi \qquad \text{partout}$$

a fortiori

$$b + Vf \geqslant V\psi \qquad \text{partout} .$$

Cette inégalité a lieu quels que soient $b > a$ et $\psi \leqslant g$ donc

$$a + Vf \geqslant Vg \qquad \text{partout} .$$

Nous en déduisons comme plus haut que V établit une correspondance biunivoque entre $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{D}$. On appellera A l'opérateur linéaire défini sur $V(\mathcal{C}_0)$ par $AVf = -f$, $\forall \ f \in \mathcal{C}_0$. Évidemment, A est fermé. On va montrer que c'est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe qui convient.

Sur $\mathcal{C}_0$, définissons l'application V_λ par la formule

$$V_\lambda = \sum_{k \geqslant 0} (-\lambda)^k \, V^{k+1} \qquad 0 \leqslant \lambda < \frac{1}{\|V\|} \quad ;$$

V étant linéaire et continue, $V_\lambda f = V(\sum_{k \geqslant 0} (-\lambda)^k \, V^k f) \ \ \forall \ f \in \mathcal{C}_0$, donc V_λ envoie $\mathcal{C}_0$ dans $\mathcal{D}$. De plus

$$-\lambda V_\lambda \, Vf = \sum_{k \geqslant 0} (-\lambda)^{k+1} \, V^{k+2} f = V_\lambda f - Vf$$

donc

(1) $$V_\lambda (\lambda - A) \, Vf = Vf \qquad f \in \mathcal{C}_0$$

et

$$-\lambda V_\lambda f = \sum_{k \geqslant 0} (-\lambda)^{k+1} \, V^{k+1} f = -AV_\lambda f - f$$

donc

(2) $$(\lambda - A)\, V_\lambda\, f = f \qquad f \in \mathcal{C}_0 \quad .$$

De la première identité, nous déduisons que V_λ envoie $\mathcal{C}_0$ sur $\mathcal{D}$. De la seconde que V_λ établit une correspondance biunivoque entre $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{D}$.

Montrons maintenant que V_λ est <u>positive</u>. Soit h une fonction positive de $\mathcal{C}_0$; $g = V_\lambda\, h \in \mathcal{D}$, donc $g = Vf$. Supposons que g prenne des valeurs négatives Alors elle atteint son minimum < 0 en un point x et,en x , f est $\leqslant 0$

$$h(x) = (\lambda - A)\, g(x) = \lambda g(x) + f(x) < 0$$

ce qui est absurde.

De la même manière, on montre que $\inf h \leqslant \lambda g \leqslant \sup h$. La norme de V_λ ne dépasse donc pas $\frac{1}{\lambda}$. Soit α un nombre de l'intervalle $]0\, , \frac{1}{\|V\|}[$. Par définition

$$W_\lambda = \sum_{k \geqslant 0} (\alpha - \lambda)^k\, V_\alpha^{k+1} \qquad 0 < \lambda < 2\alpha \quad .$$

Soit $g \in \mathcal{D}$;

$$W_\lambda(\lambda - A)\, g = W_\lambda(\lambda - \alpha)\, g + W_\lambda(\alpha - A)\, g$$

$$= - \sum_{k \geqslant 0} (\alpha - \lambda)^{k+1}\, V_\alpha^{k+1}\, g + \sum_{k \geqslant 0} (\alpha - \lambda)^k\, V_\alpha^k\, g = g \quad ;$$

alors, si $f \in \mathcal{C}_0$ et $\lambda < \frac{1}{\|V\|}$

$$V_\lambda\, f = W_\lambda(\lambda - A)\, V_\lambda\, f = W_\lambda\, f \qquad \text{d'après (2)} .$$

Les applications W_λ réalisent donc un prolongement des applications V_λ à l'intervalle $]0\, , 2\alpha[$.

D'autre part, pour tout x de X , $V_\lambda\, f(x)$ est une fonction analytique réelle d'une variable réelle λ ($0 < \lambda < \frac{1}{\|V\|}$). Son prolongement analytique est donc unique.

Donc, en choisissant α convenablement, nous pouvons connaître V_λ pour $\lambda < \frac{2}{\|V\|}$. Prenons les applications V_λ ainsi prolongées.

$$V_\lambda\, f = V_\alpha\Big(\sum_{k \geqslant 0} (\alpha - \lambda)^k\, V_\alpha^k\, f\Big)$$

donc $V_\lambda\, f \in \mathcal{D}$.

$$(\lambda - A)\, V_\lambda\, f = (\lambda - \alpha)\, V_\lambda\, f + (\alpha - A)\, V_\lambda\, f$$

$$= - \sum_{k \geqslant 0} (\alpha - \lambda)^{k+1}\, V_\alpha^{k+1}\, f + \sum_{k \geqslant 0} (\alpha - \lambda)^k\, V_\alpha^k\, f = f\ .$$

On en déduit comme plus haut que V_λ est positive et que $\|V_\lambda\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$. Le raisonnement précédent nous permet de calculer V_λ , pour tout $\lambda \geqslant 0$, par récurrence sur les intervalles $]0\,, \frac{2^n}{\|V\|}[$. On démontrera aussi de proche en proche les résultats suivants

$V_\lambda(\lambda - A)\, Vf = Vf$

$(\lambda - A)\, V_\lambda\, f = f$

V_λ est positive

et $\|V_\lambda\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$.

On est donc dans les conditions d'application du théorème de Hille-Yosida. Les V_λ sont les résolvantes d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs positifs P_t de norme $\leqslant 1$, dont A est le générateur infinitésimal, et on a

$$V_\lambda\, f = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, P_t\, f\, dt \qquad \forall\ f \in \mathcal{C}_0 \quad .$$

Ces hypothèses entraînent que cette relation est encore valable pour $\lambda = 0$, d'où le résultat.

III. Étude des noyaux non bornés.

Nous étudions maintenant un noyau V non borné, mais satisfaisant toujours aux conditions (α) et (β).

Soit a une fonction positive de $\mathcal{C}_K$. Pour toute fonction f de $\mathcal{C}_K$ $\|V(af)\|$ est inférieure à $\|f\|$ maximum de Va . L'application $f \to V(af)$ est donc un noyau borné satisfaisant à la condition (β). Mais son image n'est pas égale à celle de V et n'est donc pas forcément partout dense dans $\mathcal{C}_0$.

Nous prendrons donc pour a une fonction > 0 de $\mathcal{C}_0$. L'application $f \to V(af)$ est un noyau satisfaisant aux conditions (α) et (β). Il reste à montrer que l'on peut choisir a telle que ce noyau soit lui aussi borné.

L'espace X est la réunion d'une suite de compacts K_n ($n \geqslant 0$) tels que K_n soit contenu dans l'intérieur de K_{n+1} . Il existe alors une application continue φ_n de X dans $[0\,, 1]$ égale à 1 sur K_n et nulle hors de K_{n+1} . Soit

$\alpha_n = \max V\varphi_n$ et $\beta_n = \sup(\alpha_n\ ,\ 1)$. Posons

$$\psi_N = \sum_0^N \frac{\varphi_n}{\beta_n\ 2^n} \qquad\qquad V\psi_N = \sum_0^N \frac{V\varphi_n}{\beta_n\ 2^n}$$

$0 \leqslant \psi_N \leqslant 2$, $0 \leqslant V\psi_N \leqslant 2$. Nous choisirons a égale à $\frac{1}{3} \sum_0^\infty \frac{\varphi_n}{\beta_n\ 2^n}$. a est bien une fonction strictement positive de $\mathcal{C}_0$, et pour toute fonction f de $\mathcal{C}_K$, $\|V af\| \leqslant \|f\|$.

Nous cherchons maintenant à approcher le noyau V non borné par des noyaux bornés. Pour cela, considérons la fonction $b_n = a + (1 - a)\ \varphi_n$ égale à 1 sur K_n et à a hors de K_{n+1} et posons $V_n(f) = V(b_n\ f)$. b_n étant une fonction strictement positive, V_n satisfait aux conditions (α) et (β). De plus

$$\|V_n(f)\| \leqslant \|V(af)\| + \|V(\varphi_n f)\|$$

donc V_n est un noyau borné prolongeable à $\mathcal{C}_0$. Enfin, dès que n est assez grand pour que K_n contienne le support de f , $b_n\ f = f$, donc $V_n\ f = Vf$.

Remarquons de plus, pour la technique de la démonstration, que les fonctions b_n tendent en croissant vers 1 .

A chaque noyau V_n nous pouvons appliquer la théorie du paragraphe précédent. Nous construisons l'application A_n définie sur $V_n(\mathcal{C}_0)$ par l'égalité $A_n\ V_n\ f = -f$ ou $A_n\ Vf = -\frac{f}{b_n}$ sur $V(\mathcal{C}_K)$ et les applications V_n^λ qui sont telles que $V_n^\lambda(\lambda - A_n)\ g = g$, $g \in V(\mathcal{C}_K)$. Nous allons examiner le comportement des applications V_n^λ lorsque n augmente indéfiniment. Soit f une fonction positive de $\mathcal{C}_K$ et $g = Vf$. D'après le paragraphe précédent

$$g = (\lambda - A_n)\ V_n^\lambda\ g = \lambda V_n^\lambda\ g - A_n\ V_n^\lambda\ V_n(\frac{f}{b_n}) = \lambda V_n^\lambda\ g - A_n\ V_n\ V_n^\lambda(\frac{f}{b_n})$$

car V_n et V_n^λ sont permutables, donc

$$g = \lambda V_n^\lambda\ g + V_n^\lambda(\frac{f}{b_n}) = \lambda V_m^\lambda\ g + V_m^\lambda(\frac{f}{b_m}) \quad .$$

Posons

$$h_n = V_n^\lambda(\frac{f}{b_n}) \qquad\qquad h_m = V_m^\lambda(\frac{f}{b_m})$$

$$g = \lambda V_n^\lambda\ g + h_n = \lambda V_m^\lambda\ g + h_m$$

$$h_n - h_m = \lambda(V_m^\lambda g - V_n^\lambda g) = \lambda(V_m^\lambda V_m(\frac{f}{b_m}) - V_n^\lambda V_n(\frac{f}{b_n})) = \lambda(V_m h_m - V_n h_n)$$

ou

$$h_n - h_m = \lambda V(b_m h_m - b_n h_n) \quad .$$

Prenons $n \geqslant m$ et montrons que $V_n^\lambda g \geqslant V_m^\lambda g$. Sinon $h_n - h_m$ prendrait des valeurs strictement positives et atteindrait son maximum > 0 . Soit r un point où ceci arrive ; $h_n(r) - h_m(r) > 0$, et d'après le principe du maximum

$$b_m h_m(r) - b_n h_n(r) \geqslant 0 \quad ;$$

or $b_m(r) \leqslant b_n(r)$ donc $h_m(r) - h_n(r) \geqslant 0$. Il y a donc contradiction.

On a donc les résultats :

$$\begin{cases} \text{si} \quad g \in V(\mathcal{C}_K^+) & V_n^\lambda g \geqslant V_m^\lambda g \qquad n \geqslant m \\ \text{si} \quad f \in \mathcal{C}_K^+ & V_n^\lambda(\frac{f}{b_n}) \leqslant V_m^\lambda(\frac{f}{b_m}) \qquad n \geqslant m \end{cases} \quad .$$

Ceci va nous permettre de démontrer la convergence des V_n^λ . Prenons encore $g = Vf$ avec $f \geqslant 0$ dans $\mathcal{C}_K$. g tend vers zéro à l'infini. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc un compact K hors duquel g est majorée par $\varepsilon\lambda$. Si φ est une application continue de X dans $[0 , 1]$ à support compact égale à 1 sur K , $g - g\varphi \leqslant \varepsilon\lambda$, donc

$$V_n^\lambda(g\varphi) \leqslant V_n^\lambda g \leqslant V_n^\lambda(g\varphi) + \varepsilon \quad , \qquad \text{car} \quad \|V_n^\lambda\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

et mieux

$$V_m^\lambda(g\varphi) \leqslant V_m^\lambda g \leqslant V_n^\lambda g \leqslant V_n^\lambda(g\varphi) + \varepsilon \qquad n \geqslant m \quad .$$

Si m est assez grand pour que K_m contienne le support de φ on a

$$g\varphi = \frac{g\varphi}{b_m} = \frac{g\varphi}{b_n}$$

d'où

$$V_m^\lambda(g\varphi) = V_m^\lambda(\frac{g\varphi}{b_m}) \geqslant V_n^\lambda(\frac{g\varphi}{b_n}) = V_n^\lambda(g\varphi) \quad ;$$

donc

$$V_n^\lambda(g\varphi) \leqslant V_m^\lambda g \leqslant V_n^\lambda g \leqslant V_n^\lambda(g\varphi) + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \|V_n^\lambda g - V_m^\lambda g\| \leqslant \varepsilon \quad .$$

Si maintenant g est une fonction quelconque de $V(\mathcal{C}_K)$, $g = Vf = Vf^+ - Vf^- = g_1 - g_2$,

$V_n^\lambda g_1$ et $V_n^\lambda g_2$ convergent, donc $V_n^\lambda g$ converge.

Enfin, les applications V_n^λ étant de norme inférieure à $\frac{1}{\lambda}$ et $V(\mathcal{C}_K)$ partout dense dans $\mathcal{C}_0$, nous voyons que, pour toute fonction f de $\mathcal{C}_0$, $V_n^\lambda f$ tend vers une fonction $V^\lambda f$ lorsque n augmente indéfiniment. Il est facile de montrer que les applications V^λ (limites des V_n^λ) :

1° Sont de normes inférieures à $\frac{1}{\lambda}$;

2° Sont positives ;

3° Sont permutables ;

enfin, si l'on pose $AVf = -f$ avec f dans $\mathcal{C}_K$, $A_n Vf = AVf$ dès que n est assez grand, $Vf = V_n^\lambda(\lambda - A_n)\, Vf = V_n^\lambda(\lambda - A)\, Vf$ dès que n est assez grand, donc $V^\lambda(\lambda - A)\, Vf = Vf$.

Nous pouvons alors appliquer une nouvelle fois le théorème de Hille-Yosida car $V(\mathcal{C}_K)$ est partout dense dans $\mathcal{C}_0$ (voir appendice). Soit $\{K_t\}$ le semi-groupe construit grâce à ce théorème. Posons

$$W_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f\, dt , \qquad f \in \mathcal{C}_0 .$$

Le fait que $\|K_t\|$ est inférieure à 1 entraîne $\|W_\lambda\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$; pour $f \in \mathcal{C}_K$:

$$\lambda W_\lambda Vf = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t Vf\, dt = Vf + \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t AVf\, dt = Vf - \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f\, dt$$

$$\lambda W_\lambda Vf + \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f\, dt = Vf ;$$

prenons maintenant $f \geqslant 0$ dans $\mathcal{C}_K$; $\int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f(x)\, dt \leqslant Vf(x)$, donc l'intégrale $\int_0^\infty K_t f(x)\, dt$ existe ; c'est la limite croissante de $\int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f(x)\, dt$ et $\int_0^\infty K_t f(x)\, dt \leqslant Vf(x)$.

$$\lambda W_\lambda f(x) \leqslant \lambda \int_0^\infty K_t f(x)\, dt \leqslant \lambda Vf(x)$$

donc pour toute fonction de $\mathcal{C}_K^+$, λW_λ tend vers 0 lorsque λ tend vers 0. Il en est de même pour $\mathcal{C}_K$ tout entier et pour $\mathcal{C}_0$ car $\mathcal{C}_K$ y est partout dense et $\|\lambda W_\lambda\| \leqslant 1$.

$\lambda W_\lambda Vf$ tend vers 0 donc $\int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f\, dt$ tend vers Vf ($f \in \mathcal{C}_K$).

En prenant encore $f \geqslant 0$, puis quelconque dans $\mathcal{C}_K$, on voit que

$$Vf(x) = \int_0^\infty K_t f(x)\, dt$$

qui est la formule souhaitée.

IV. Appendice : Une forme utile du théorème de Hille-Yosida.

Soit $\mathfrak{X}$ un espace de Banach réel. Un semi-groupe d'opérateurs continus P_t sur $\mathfrak{X}$ est dit fortement continu si $\lim_{t \to 0} \|P_t x - x\| = 0$, $\forall\ x \in \mathfrak{X}$. On se limitera aux semi-groupes "à contraction", c'est-à-dire tels que $\|P_t\| \leq 1$, $\forall\ t \geq 0$.

L'ensemble $\mathfrak{D}$ des éléments $x \in X$ tels que $(P_t x - x)/t$ converge lorsque t tend vers 0 est partout dense dans $\mathfrak{X}$. L'opérateur linéaire A défini sur $\mathfrak{D}$ par

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{P_t x - x}{t}$$

est fermé ; on l'appelle générateur infinitésimal du semi-groupe P_t. Pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda - A$ admet pour inverse l'opérateur résolvante

$$R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t \, dt \qquad ,$$

dont la norme est $\leq 1/\lambda$.

Dans la troisième partie de cet exposé, on a utilisé le théorème de Hille-Yosida sous la forme suivante :

THÉORÈME. - Soit A un opérateur linéaire défini sur un ensemble $\mathfrak{D}$ partout dense dans l'espace de Banach $\mathfrak{X}$. On suppose qu'à tout $\lambda > 0$, on puisse associer un opérateur continu R_λ de telle sorte que :

1° $\|R_\lambda\| \leq 1/\lambda \quad \forall\ \lambda > 0$;

2° $R_\lambda(\lambda - A)\, x = x \quad \forall\ x \in \mathfrak{D}$;

3° $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda \quad \forall\ \lambda$ et $\mu > 0$.

Alors les R_λ sont les résolvantes d'un semi-groupe à contraction dont le générateur infinitésimal est un prolongement fermé de A.

Principe de la démonstration.

a. Lorsque λ tend vers l'infini, λR_λ tend fortement vers l'identité (car, d'après 2°, $\lambda R_\lambda x = x + R_\lambda Ax$ tend vers $x \ \forall\ x \in \mathfrak{D}$).

b. Poser $B_\lambda x = \lambda(\lambda R_\lambda - I)\, x$ ($= \lambda R_\lambda Ax$ si $x \in \mathfrak{D}$). Comme les B_λ sont permutables et que $\|e^{tB_\lambda}\| \leq 1$, $\forall\ t \geq 0$, on a facilement

$$\|e^{tB_\lambda} - e^{tB_\mu}\| \leq t\|B_\lambda - B_\mu\| \ .$$

(pour cela, écrire $e^{tB} - e^{tB'} = (e^{tB/n} - e^{tB'/n})(e^{(n-1)tB/n} + \dots + e^{(n-1)tB'/n})$ et faire $n \to +\infty$) ; on a donc :

$$\| e^{tB_\lambda} x - e^{tB_\mu} x \| \leqslant t \| \lambda R_\lambda Ax - \mu R_\mu Ax \| \quad \forall \ x \in \mathcal{D}$$

donc, lorsque λ tend vers $+\infty$, e^{tB_λ} tend fortement vers un opérateur continu P_t de norme $\leqslant 1$; et la convergence de $e^{tB_\lambda} x$ vers $P_t x$ est uniforme par rapport aux t d'un intervalle borné quelconque. Les P_t constituent donc un semi-groupe fortement continu à contraction.

c. De la relation $e^{tB_\lambda} x - x = \int_0^t e^{uB_\lambda} B_\lambda x \, du$, on déduit, par passage à la limite uniforme $(\lambda \to +\infty)$

$$P_t x - x = \int_0^t P_u Ax \, du \qquad \forall \ x \in \mathcal{D} .$$

Il en résulte immédiatement que le générateur infinitésimal du semi-groupe P_t est un prolongement (fermé) de A.

d. On vérifie que les opérateurs R_λ sont les résolvantes du semi-groupe construit.

REMARQUE 1. – Le générateur infinitésimal du semi-groupe P_t n'est autre que l'opérateur fermé $\hat{A}$ défini de la façon suivante : appelons $\hat{\mathcal{D}}$ l'image commune de $\mathfrak{X}$ par les différents R_λ (on prouve $R_\lambda \mathfrak{X} = R_\mu \mathfrak{X}$ en observant que les hypothèses entraînent que les R_λ vérifient l'équation résolvante

$$(\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu = R_\mu - R_\lambda$$

$\forall \ \lambda, \ \mu > 0$).

On montre facilement que les R_λ sont injectifs (utiliser l'équation résolvante et la propriété (a)). On définit alors $\hat{A}$ sur $\hat{\mathcal{D}}$ par la relation

$$\hat{A} R_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x \qquad \forall \ x \in \mathfrak{X} .$$

REMARQUE 2. – Si l'espace $\mathfrak{X}$ est ordonné par un cône d'éléments positifs, et si les R_λ sont des opérateurs positifs, il en est de même des P_t (d'après leur définition comme limites des opérateurs positifs $e^{tB_\lambda} = e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 R_\lambda}$).