

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

GEORGES LION

Construction du semi-groupe associé a un noyau de Hunt

Séminaire BreLOT-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 5 (1960-1961), exp. n° 7, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1960-1961__5__A8_0

© Séminaire BreLOT-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire BreLOT-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION DU SEMI-GROUPE ASSOCIÉ A UN NOYAU DE HUNT

par Georges LION

I. Introduction

Soit E un espace localement compact dénombrable à l'infini. On note C_K l'espace vectoriel des fonctions numériques continues à support compact sur E , C_0 l'espace vectoriel des fonctions numériques continues tendant vers 0 à l'infini. Muni de la norme uniforme, C_0 est un espace de Banach réel.

On se propose d'étudier un moyen continu V tendant vers 0 à l'infini, c'est-à-dire une application linéaire positive de C_K dans C_0 , possédant en outre les deux propriétés suivantes :

(α) L'image $V(C_K)$ est partout dense dans C_0 .

(β) V satisfait au principe complet du maximum, autrement dit si f et g sont deux fonctions positives de C_K et a un nombre réel positif, la relation $Vf(x) + a \geq Vg(x)$ a lieu en tout point x de E si elle a lieu en tout point du support de g .

On va établir une partie du théorème fondamental de Hunt, énoncé dans l'exposé 6 : il existe un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens P_t sur C_0 tel que

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x) dt \quad \forall f \in C_K \quad \forall x \in E .$$

On donnera d'abord la démonstration de Hunt dans le cas où V est borné (c'est-à-dire prolongeable en un opérateur borné sur C_0) ; on passera ensuite au cas général par une méthode différente de celle de Hunt et indépendante de toute considération probabiliste.

On rappelle cette conséquence des axiomes (α) et (β) : si $f \in C_K$, on a $f(x) \geq 0$ en tout point x où Vf atteint un maximum ≥ 0 (principe du maximum positif). Il en résulte que V est injectif ; on appellera A l'opérateur linéaire défini sur $\mathcal{Q} = V(C_K)$ par $AVf = -f$.

II. Étude des noyaux bornés.

V est dit borné s'il existe une constante $\|V\|$ telle que pour toute f de C_K on ait $\|Vf\| \leq \|V\| \|f\|$.

On peut alors prolonger V à C_0 tout entier dans lequel C_K est partout dense. Posons $\mathcal{O} = V(C_0)$; \mathcal{O} est partout dense dans C_0 (d'après (α)). V ainsi prolongée est une application positive.

Montrons que le prolongement de V à C_0 satisfait encore à la condition (β) . Soient $a \geq 0$, f et g deux fonctions positives de C_0 . Par hypothèse, $a + Vf \geq Vg$ sur le support de g , donc pour toute ψ de C_K , $0 \leq \psi \leq g$, $a + Vf \geq V\psi$ sur le support de ψ ; pour tout $b > a$, $b + Vf + a - b \geq V\psi$ sur le support de ψ . Il existe donc dans C_K une fonction φ , $0 \leq \varphi \leq f$, telle que $b + V\varphi \geq V\psi$ sur le support de ψ . Ceci entraîne, d'après (β) que

$$b + V\varphi \geq V\psi \quad \text{partout}$$

a fortiori

$$b + Vf \geq V\psi \quad \text{partout .}$$

Cette inégalité a lieu quels que soient $b > a$ et $\psi \leq g$ donc

$$a + Vf \geq Vg \quad \text{partout .}$$

Nous en déduisons comme plus haut que V établit une correspondance biunivoque entre C_0 et \mathcal{O} . On appellera A l'opérateur linéaire défini sur $V(C_0)$ par $AVf = -f$, $\forall f \in C_0$. Évidemment, A est fermé. On va montrer que c'est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe qui convient.

Sur C_0 , définissons l'application V_λ par la formule

$$V_\lambda = \sum_{k \geq 0} (-\lambda)^k V^{k+1} \quad 0 \leq \lambda < \frac{1}{\|V\|} \quad ;$$

V étant linéaire et continue, $V_\lambda f = V(\sum_{k \geq 0} (-\lambda)^k V^k f)$ $\forall f \in C_0$, donc V_λ envoie C_0 dans \mathcal{O} . De plus

$$-\lambda V_\lambda Vf = \sum_{k \geq 0} (-\lambda)^{k+1} V^{k+2} f = V_\lambda f - Vf$$

donc

$$(1) \quad V_\lambda (\lambda - A) Vf = Vf \quad f \in C_0$$

et

$$-\lambda V_\lambda f = \sum_{k \geq 0} (-\lambda)^{k+1} V^{k+1} f = -AV_\lambda f - f$$

donc

$$(2) \quad (\lambda - A) V_\lambda f = f \quad f \in \mathcal{C}_0 \quad .$$

De la première identité, nous déduisons que V_λ envoie \mathcal{C}_0 sur \mathcal{O} . De la seconde que V_λ établit une correspondance biunivoque entre \mathcal{C}_0 et \mathcal{O} .

Montrons maintenant que V_λ est positive. Soit h une fonction positive de \mathcal{C}_0 ; $g = V_\lambda h \in \mathcal{O}$, donc $g = Vf$. Supposons que g prenne des valeurs négatives. Alors elle atteint son minimum < 0 en un point x et, en x , f est ≤ 0

$$h(x) = (\lambda - A) g(x) = \lambda g(x) + f(x) < 0$$

ce qui est absurde.

De la même manière, on montre que $\inf h \leq \lambda g \leq \sup h$. La norme de V_λ ne dépasse donc pas $\frac{1}{\lambda}$. Soit α un nombre de l'intervalle $]0, \frac{1}{\|V\|}[$. Par définition

$$W_\lambda = \sum_{k \geq 0} (\alpha - \lambda)^k V_\alpha^{k+1} \quad 0 < \lambda < 2\alpha \quad .$$

Soit $g \in \mathcal{O}$;

$$\begin{aligned} W_\lambda (\lambda - A) g &= W_\lambda (\lambda - \alpha) g + W_\lambda (\alpha - A) g \\ &= - \sum_{k \geq 0} (\alpha - \lambda)^{k+1} V_\alpha^{k+1} g + \sum_{k \geq 0} (\alpha - \lambda)^k V_\alpha^k g = g ; \end{aligned}$$

alors, si $f \in \mathcal{C}_0$ et $\lambda < \frac{1}{\|V\|}$

$$V_\lambda f = W_\lambda (\lambda - A) V_\lambda f = W_\lambda f \quad \text{d'après (2)} .$$

Les applications W_λ réalisent donc un prolongement des applications V_λ à l'intervalle $]0, 2\alpha[$.

D'autre part, pour tout x de X , $V_\lambda f(x)$ est une fonction analytique réelle d'une variable réelle λ ($0 < \lambda < \frac{1}{\|V\|}$). Son prolongement analytique est donc unique.

Donc, en choisissant α convenablement, nous pouvons connaître V_λ pour $\lambda < \frac{2}{\|V\|}$. Prenons les applications V_λ ainsi prolongées.

$$V_\lambda f = V_\alpha \left(\sum_{k \geq 0} (\alpha - \lambda)^k V_\alpha^k f \right)$$

donc $V_\lambda f \in \mathcal{O}$.

$$\begin{aligned}
 (\lambda - A) V_\lambda f &= (\lambda - \alpha) V_\lambda f + (\alpha - A) V_\lambda f \\
 &= - \sum_{k \geq 0} (\alpha - \lambda)^{k+1} V_\alpha^{k+1} f + \sum_{k \geq 0} (\alpha - \lambda)^k V_\alpha^k f = f .
 \end{aligned}$$

On en déduit comme plus haut que V_λ est positive et que $\|V_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$. Le raisonnement précédent nous permet de calculer V_λ , pour tout $\lambda \geq 0$, par récurrence sur les intervalles $]0, \frac{2^n}{\lambda}]$. On démontrera aussi de proche en proche les résultats suivants

$$V_\lambda (\lambda - A) V f = V f$$

$$(\lambda - A) V_\lambda f = f$$

V_λ est positive

$$\text{et } \|V_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0 .$$

On est donc dans les conditions d'application du théorème de Hille-Yosida. Les V_λ sont les résolvantes d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs positifs P_t de norme ≤ 1 , dont A est le générateur infinitésimal, et on a

$$V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f dt \quad \forall f \in C_0 .$$

Ces hypothèses entraînent que cette relation est encore valable pour $\lambda = 0$, d'où le résultat.

III. Étude des noyaux non bornés.

Nous étudions maintenant un noyau V non borné, mais satisfaisant toujours aux conditions (α) et (β) .

Soit a une fonction positive de C_K . Pour toute fonction f de C_K $\|V(af)\|$ est inférieure à $\|f\|$ maximum de Va . L'application $f \rightarrow V(af)$ est donc un noyau borné satisfaisant à la condition (β) . Mais son image n'est pas égale à celle de V et n'est donc pas forcément partout dense dans C_0 .

Nous prendrons donc pour a une fonction > 0 de C_0 . L'application $f \rightarrow V(af)$ est un noyau satisfaisant aux conditions (α) et (β) . Il reste à montrer que l'on peut choisir a telle que ce noyau soit lui aussi borné.

L'espace X est la réunion d'une suite de compacts K_n ($n \geq 0$) tels que K_n soit contenu dans l'intérieur de K_{n+1} . Il existe alors une application continue φ_n de X dans $[0, 1]$ égale à 1 sur K_n et nulle hors de K_{n+1} . Soit

$\alpha_n = \max V\varphi_n$ et $\beta_n = \sup(\alpha_n, 1)$. Posons

$$\psi_N = \sum_0^N \frac{\varphi_n}{\beta_n 2^n} \qquad V\psi_N = \sum_0^N \frac{V\varphi_n}{\beta_n 2^n}$$

$0 \leq \psi_N \leq 2$, $0 \leq V\psi_N \leq 2$. Nous choisirons a égale à $\frac{1}{3} \sum_0^\infty \frac{\varphi_n}{\beta_n 2^n}$. a est bien une fonction strictement positive de C_0 , et pour toute fonction f de C_K , $\|Vaf\| \leq \|f\|$.

Nous cherchons maintenant à approcher le noyau V non borné par des noyaux bornés. Pour cela, considérons la fonction $b_n = a + (1-a)\varphi_n$ égale à 2 sur K_n et à a hors de K_{n+1} et posons $V_n(f) = V(b_n f)$. b_n étant une fonction strictement positive, V_n satisfait aux conditions (α) et (β) . De plus

$$\|V_n(f)\| \leq \|V(af)\| + \|V(\varphi_n f)\|$$

donc V_n est un noyau borné prolongeable à C_0 . Enfin, dès que n est assez grand pour que K_n contienne le support de f , $b_n f = f$, donc $V_n f = Vf$.

Remarquons de plus, pour la technique de la démonstration, que les fonctions b_n tendent en croissant vers 1 .

A chaque noyau V_n nous pouvons appliquer la théorie du paragraphe précédent. Nous construisons l'application A_n définie sur $V_n(C_0)$ par l'égalité $A_n V_n f = -f$ ou $A_n Vf = -\frac{f}{b_n}$ sur $V(C_K)$ et les applications V_n^λ qui sont telles que $V_n^\lambda(\lambda - A_n)g = g$, $g \in V(C_K)$. Nous allons examiner le comportement des applications V_n^λ lorsque n augmente indéfiniment. Soit f une fonction positive de C_K et $g = Vf$. D'après le paragraphe précédent

$$g = (\lambda - A_n) V_n^\lambda g = \lambda V_n^\lambda g - A_n V_n^\lambda V_n \left(\frac{f}{b_n}\right) = \lambda V_n^\lambda g - A_n V_n V_n^\lambda \left(\frac{f}{b_n}\right)$$

car V_n et V_n^λ sont permutables, donc

$$g = \lambda V_n^\lambda g + V_n^\lambda \left(\frac{f}{b_n}\right) = \lambda V_m^\lambda g + V_m^\lambda \left(\frac{f}{b_m}\right)$$

Posons

$$h_n = V_n^\lambda \left(\frac{f}{b_n}\right) \qquad h_m = V_m^\lambda \left(\frac{f}{b_m}\right)$$

$$g = \lambda V_n^\lambda g + h_n = \lambda V_m^\lambda g + h_m$$

$$h_n - h_m = \lambda(V_m^\lambda g - V_n^\lambda g) = \lambda(V_m^\lambda V_m(\frac{f}{b_m}) - V_n^\lambda V_n(\frac{f}{b_n})) = \lambda(V_m h_m - V_n h_n)$$

ou

$$h_n - h_m = \lambda V(b_m h_m - b_n h_n) \quad .$$

Prenons $n \geq m$ et montrons que $V_n^\lambda g \geq V_m^\lambda g$. Sinon $h_n - h_m$ prendrait des valeurs strictement positives et atteindrait son maximum > 0 . Soit r un point où ceci arrive ; $h_n(r) - h_m(r) > 0$, et d'après le principe du maximum

$$b_m h_m(r) - b_n h_n(r) \geq 0 \quad ;$$

or $b_m(r) \leq b_n(r)$ donc $h_m(r) - h_n(r) \geq 0$. Il y a donc contradiction.

On a donc les résultats :

$$\begin{cases} \text{si } g \in V(C_K^+) & V_n^\lambda g \geq V_m^\lambda g & n \geq m \\ \text{si } f \in C_K^+ & V_n^\lambda(\frac{f}{b_n}) \leq V_m^\lambda(\frac{f}{b_m}) & n \geq m \end{cases} .$$

Ceci va nous permettre de démontrer la convergence des V_n^λ . Prenons encore $g = Vf$ avec $f \geq 0$ dans C_K . g tend vers zéro à l'infini. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc un compact K hors duquel g est majorée par $\varepsilon\lambda$. Si φ est une application continue de X dans $[0, 1]$ à support compact égale à 1 sur K , $g - g\varphi \leq \varepsilon\lambda$, donc

$$V_n^\lambda(g\varphi) \leq V_n^\lambda g \leq V_n^\lambda(g\varphi) + \varepsilon \quad , \quad \text{car } \|V_n^\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

et mieux

$$V_m^\lambda(g\varphi) \leq V_m^\lambda g \leq V_n^\lambda g \leq V_n^\lambda(g\varphi) + \varepsilon \quad n \geq m .$$

Si m est assez grand pour que K_m contienne le support de φ on a

$$g\varphi = \frac{g\varphi}{b_m} = \frac{g\varphi}{b_n}$$

d'où

$$V_m^\lambda(g\varphi) = V_m^\lambda(\frac{g\varphi}{b_m}) \geq V_n^\lambda(\frac{g\varphi}{b_n}) = V_n^\lambda(g\varphi) \quad ;$$

donc

$$V_n^\lambda(g\varphi) \leq V_m^\lambda g \leq V_n^\lambda g \leq V_n^\lambda(g\varphi) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \|V_n^\lambda g - V_m^\lambda g\| \leq \varepsilon \quad .$$

Si maintenant g est une fonction quelconque de $V(C_K)$, $g = Vf = Vf^+ - Vf^- = g_1 - g_2$,

$V_n^\lambda g_1$ et $V_n^\lambda g_2$ convergent, donc $V_n^\lambda g$ converge.

Enfin, les applications V_n^λ étant de norme inférieure à $\frac{1}{\lambda}$ et $V(C_K)$ partout dense dans C_0 , nous voyons que, pour toute fonction f de C_0 , $V_n^\lambda f$ tend vers une fonction $V^\lambda f$ lorsque n augmente indéfiniment. Il est facile de montrer que les applications V^λ (limites des V_n^λ) :

1° Sont de normes inférieures à $\frac{1}{\lambda}$;

2° Sont positives ;

3° Sont permutables ;

enfin, si l'on pose $AVf = -f$ avec f dans C_K , $A_n Vf = AVf$ dès que n est assez grand, $Vf = V_n^\lambda(\lambda - A_n)Vf = V_n^\lambda(\lambda - A)Vf$ dès que n est assez grand, donc $V^\lambda(\lambda - A)Vf = Vf$.

Nous pouvons alors appliquer une nouvelle fois le théorème de Hille-Yosida car $V(C_K)$ est partout dense dans C_0 (voir appendice). Soit $\{K_t\}$ le semi-groupe construit grâce à ce théorème. Posons

$$W_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f dt, \quad f \in C_0.$$

Le fait que $\|K_t\|$ est inférieure à 1 entraîne $\|W_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$; pour $f \in C_K$:

$$\lambda W_\lambda Vf = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t Vf dt = Vf + \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t AVf dt = Vf - \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f dt$$

$$\lambda W_\lambda Vf + \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f dt = Vf ;$$

prenons maintenant $f \geq 0$ dans C_K ; $\int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f(x) dt \leq Vf(x)$, donc l'intégrale $\int_0^\infty K_t f(x) dt$ existe ; c'est la limite croissante de $\int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f(x) dt$ et $\int_0^\infty K_t f(x) dt \leq Vf(x)$.

$$\lambda W_\lambda f(x) \leq \lambda \int_0^\infty K_t f(x) dt \leq \lambda Vf(x)$$

donc pour toute fonction de C_K^+ , λW_λ tend vers 0 lorsque λ tend vers 0. Il en est de même pour C_K tout entier et pour C_0 car C_K y est partout dense et $\|\lambda W_\lambda\| \leq 1$.

$\lambda W_\lambda Vf$ tend vers 0 donc $\int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f dt$ tend vers Vf ($f \in C_K$).

En prenant encore $f \geq 0$, puis quelconque dans C_K , on voit que

$$Vf(x) = \int_0^\infty K_t f(x) dt$$

qui est la formule souhaitée.

IV. Appendice : Une forme utile du théorème de Hille-Yosida.

Soit \mathfrak{X} un espace de Banach réel. Un semi-groupe d'opérateurs continus P_t sur \mathfrak{X} est dit fortement continu si $\lim_{t \rightarrow 0} \|P_t x - x\| = 0, \forall x \in \mathfrak{X}$. On se limitera aux semi-groupes "à contraction", c'est-à-dire tels que $\|P_t\| \leq 1, \forall t \geq 0$.

L'ensemble \mathcal{D} des éléments $x \in X$ tels que $(P_t x - x)/t$ converge lorsque t tend vers 0 est partout dense dans \mathfrak{X} . L'opérateur linéaire A défini sur \mathcal{D} par

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t x - x}{t}$$

est fermé ; on l'appelle générateur infinitésimal du semi-groupe P_t . Pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda - A$ admet pour inverse l'opérateur résolvante

$$R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t dt, \quad ,$$

dont la norme est $\leq 1/\lambda$.

Dans la troisième partie de cet exposé, on a utilisé le théorème de Hille-Yosida sous la forme suivante :

THÉORÈME. - Soit A un opérateur linéaire défini sur un ensemble \mathcal{D} partout dense dans l'espace de Banach \mathfrak{X} . On suppose qu'à tout $\lambda > 0$, on puisse associer un opérateur continu R_λ de telle sorte que :

- 1° $\|R_\lambda\| \leq 1/\lambda \quad \forall \lambda > 0$;
- 2° $R_\lambda(\lambda - A)x = x \quad \forall x \in \mathcal{D}$;
- 3° $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda \quad \forall \lambda \text{ et } \mu > 0$.

Alors les R_λ sont les résolvantes d'un semi-groupe à contraction dont le générateur infinitésimal est un prolongement fermé de A .

Principe de la démonstration.

a. Lorsque λ tend vers l'infini, λR_λ tend fortement vers l'identité (car, d'après 2°, $\lambda R_\lambda x = x + R_\lambda Ax$ tend vers $x \quad \forall x \in \mathcal{D}$).

b. Poser $B_\lambda x = \lambda(\lambda R_\lambda - I)x$ ($= \lambda R_\lambda Ax$ si $x \in \mathcal{D}$). Comme les B_λ sont permutables et que $\|e^{tB_\lambda}\| \leq 1, \forall t \geq 0$, on a facilement

$$\|e^{tB_\lambda} - e^{tB_\mu}\| \leq t \|B_\lambda - B_\mu\|$$

(pour cela, écrire $e^{tB} - e^{tB'} = (e^{tB/n} - e^{tB'/n})(e^{(n-1)tB/n} + \dots + e^{(n-1)tB'/n})$ et faire $n \rightarrow +\infty$) ; on a donc :

$$\|e^{tB_\lambda} x - e^{tB_\mu} x\| \leq t \|\lambda R_\lambda Ax - \mu R_\mu Ax\| \quad \forall x \in \mathcal{O}$$

donc, lorsque λ tend vers $+\infty$, e^{tB_λ} tend fortement vers un opérateur continu P_t de norme ≤ 1 ; et la convergence de $e^{tB_\lambda} x$ vers $P_t x$ est uniforme par rapport aux t d'un intervalle borné quelconque. Les P_t constituent donc un semi-groupe fortement continu à contraction.

c. De la relation $e^{tB_\lambda} x - x = \int_0^t e^{uB_\lambda} B_\lambda x \, du$, on déduit, par passage à la limite uniforme ($\lambda \rightarrow +\infty$)

$$P_t x - x = \int_0^t P_u Ax \, du \quad \forall x \in \mathcal{O} .$$

Il en résulte immédiatement que le générateur infinitésimal du semi-groupe P_t est un prolongement (fermé) de A .

d. On vérifie que les opérateurs R_λ sont les résolvantes du semi-groupe construit.

REMARQUE 1. - Le générateur infinitésimal du semi-groupe P_t n'est autre que l'opérateur fermé \hat{A} défini de la façon suivante : appelons $\hat{\mathcal{O}}$ l'image commune de \mathcal{X} par les différents R_λ (on prouve $R_\lambda \mathcal{X} = R_\mu \mathcal{X}$ en observant que les hypothèses entraînent que les R_λ vérifient l'équation résolvente

$$(\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu = R_\mu - R_\lambda$$

$\forall \lambda, \mu > 0$).

On montre facilement que les R_λ sont injectifs (utiliser l'équation résolvente et la propriété (a)). On définit alors \hat{A} sur $\hat{\mathcal{O}}$ par la relation

$$\hat{A} R_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x \quad \forall x \in \mathcal{X} .$$

REMARQUE 2. - Si l'espace \mathcal{X} est ordonné par un cône d'éléments positifs, et si les R_λ sont des opérateurs positifs, il en est de même des P_t (d'après leur définition comme limites des opérateurs positifs $e^{tB_\lambda} = e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 R_\lambda}$).