

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

ROSE-MARIE HERVÉ

Représentation intégrale des fonctions surharmoniques ≥ 0 dans la théorie axiomatique de M. Brelot

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 4 (1959-1960), exp. n° 6,
p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1959-1960__4__A6_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES FONCTIONS SURHARMONIQUES ≥ 0
DANS LA THÉORIE AXIOMATIQUE DE M. BRELOT

par Mme Rose-Marie HERVÉ

Je voudrais indiquer brièvement comment les théorèmes de G. CHOQUET, sur l'existence et l'unicité des représentations intégrales au moyen des éléments extrémaux dans les cônes convexes [3] et [4], permettent d'effectuer la représentation intégrale des fonctions appartenant à S^+ dans la théorie axiomatique de M. BRELOT sous l'axiome supplémentaire introduit à cet effet ([1] et [2]).

On sait que le théorème d'unicité s'applique, car le cône S^+ est réticulé pour l'ordre qu'il définit dans l'espace S des classes de différences de deux fonctions appartenant à S^+ . Afin de réaliser les conditions du théorème d'existence, on va définir, sur S , une topologie séparée d'espace localement convexe, pour laquelle S^+ possède une base métrisable et compacte.

1. Hypothèses.

- Les fonctions harmoniques satisfont **seulement** aux axiomes 1, 2, 3'.
- L'espace Ω admet une base dénombrable.
- Il existe un potentiel > 0 dans Ω .

2. Définition d'une famille de formes linéaires sur S .

Soit $V \in S^+$, dont la représentation intégrale, à l'aide d'une mesure μ sur $\bar{\Omega}$ et d'un noyau G dépendant de V , est :

$$V(x) = \int G(x, Y) d\mu(Y) \quad ([6], \text{théorèmes 17.1 et 17.2}) \quad .$$

On appelle "fonctions associées à V " les fonctions V_f définies comme suit : pour chaque $f \in C^+(\bar{\Omega})$,

$$V_f(x) = \int G(x, Y) f(Y) d\mu(Y) \quad .$$

$V_f \in S^+$; V_f est harmonique dans $\Omega \cap \mathcal{C}S_f$ (S_f support de f).

Alors, pour chaque couple (f, x) , $x \in \Omega$, $f \in \mathcal{K}^+(\bar{\Omega} - \{x\})$:

$$(V, V') \rightarrow (V, V')_f(x) = V_f(x) - V'_f(x)$$

est une forme linéaire sur S . Cette famille de formes linéaires sépare les éléments de S .

3. Définition de la topologie T sur S ⁽¹⁾.

C'est la topologie définie sur S par la famille des semi-normes

$$(V, V') \longrightarrow |(V, V')_f(x)|, \quad x \in \Omega, \quad f \in \mathcal{K}^+(\bar{\Omega} - \{x\}) \quad .$$

4. Remarque.

Pour chaque $x \in \Omega$, l'application $f \rightarrow (V, V')_f(x)$, restreinte à $\mathcal{K}^+(\bar{\Omega} - \{x\})$, définit une mesure de Radon, de signe quelconque, sur $\bar{\Omega} - \{x\}$, notée $\mu_{(V, V')}^x$.

5. Propriétés de la topologie T sur l'espace S^+ .

1° La topologie T est métrisable sur S^+ . - On montre qu'elle peut être définie, sur S^+ , par une famille dénombrable de semi-normes ([6], lemme 21.1 et théorème 21.1). L'axiome 3' est utilisé ici de façon essentielle, et c'est pourquoi la métrisabilité vaut seulement sur S^+ .

2° Le cône S^+ , muni de la topologie T , est localement compact; ou, ce qui est équivalent, S^+ possède une base compacte pour la topologie T .

Etant donné un ouvert $\omega_0 \subset \bar{\omega}_0 \subset \Omega$, $x_0 \in \omega_0$ et $\alpha > 0$, soit :

$$S_\alpha^+ = \{V \in S^+ \mid \int V \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leq \alpha\} \quad .$$

Pour démontrer la compacité de S_α^+ , on se donne une suite $V_n \in S_\alpha^+$, et les étapes de la démonstration sont les suivantes :

a. Détermination d'une suite partielle n' , telle que, pour chaque couple (f, x) , $x \in \Omega$, $f \in \mathcal{K}^+(\bar{\Omega} - \{x\})$, $\lim_{n'} (V_{n'})_f(x)$ existe; ou ce qui est équivalent, pour chaque $x \in \Omega$, les mesures $\mu_{V_{n'}}^x$ sur $\bar{\Omega} - \{x\}$ convergent vaguement vers une mesure sur $\bar{\Omega} - \{x\}$: c'est l'objet du lemme 21.2.

b. Détermination d'une fonction $V \in S_\alpha^+$, telle que, pour chaque couple (f, x) , $x \in \Omega$, $f \in \mathcal{K}^+(\bar{\Omega} - \{x\})$: $V_f(x) = \lim_{n'} (V_{n'})_f(x)$.

⁽¹⁾ On trouvera une autre introduction, plus intuitive, de cette topologie dans la thèse à paraître [5], chapitre IV.

On considère l'application $f \rightarrow U_f = \widehat{\lim \inf (V_{n^i})_f}$ de $C^+(\bar{\Omega})$ dans S^+ ; pour qu'il existe une fonction $V \in S^+$ dont les n^i fonctions associées soient les U_f , il suffit (théorème 19.2) que les conditions suivantes soient remplies :

- pour a et $b \geq 0$, f et $g \in C^+(\bar{\Omega})$: $U_{af+bg} = aU_f + bU_g$; cette condition est établie par la proposition 21.1 ;

- U_f est harmonique dans $\Omega \cap \mathcal{C}S_f$, et $S_f \subset \Omega$ entraîne $U_f \in P^+$; cette condition résulte de la démonstration de la proposition 21.2.

Alors $V = U_1 = \widehat{\lim \inf V_{n^i}}$ répond à la question (théorème 21.2).

6. Théorème de représentation intégrale.

Etant donnée une base compacte A du cône S^+ , toute fonction $V \in S^+$ admet une représentation intégrale unique :

$$V(x) = \int p(x) \, d\nu(p) \quad ,$$

à l'aide d'une mesure de Radon $\nu \geq 0$, définie sur A , et portée par l'ensemble des éléments extrémaux de A .

La démonstration est donnée dans [6], théorème 22.1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRELOT (Marcel). - Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 2, 1958, n° 1, 40 p.
- [2] BRELOT (Marcel). - Lectures on potential theory. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 19).
- [3] CHOQUET (Gustave). - Unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes réticulés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 555.
- [4] CHOQUET (Gustave). - Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 699.
- [5] HERVÉ (Rose-Marie). - Topologie sur l'ensemble des fonctions surharmoniques ≥ 0 et représentation intégrale, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 2834.
- [6] HERVÉ (Rose-Marie). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962 (à paraître) (Thèse Sc. math. Paris. 1961).