

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

JACQUES DENY

Sur l'équation de convolution $\mu = \mu \star \sigma$

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 4 (1959-1960), exp. n° 5, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SB CD_1959-1960__4__A5_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

7 mars 1960

SUR L'ÉQUATION DE CONVOLUTION $\mu = \mu \star \sigma$

par Jacques DENY ⁽¹⁾

1. Introduction.

Soit G un groupe abélien localement compact ; soit σ une mesure de Radon ≥ 0 donnée sur G . On se propose de déterminer toutes les mesures $\mu \geq 0$ sur G vérifiant

$$(1) \quad \mu = \mu \star \sigma \quad .$$

Ce problème est important pour la théorie du potentiel par rapport à un noyau de convolution ; on va déterminer des solutions ayant un certain caractère extrémal, à l'aide desquelles on pourra donner une représentation "intégrale" de la solution générale, représentation analogue à celle donnée par MARTIN pour les fonctions harmoniques positives dans un domaine euclidien ; cela sera possible grâce aux récents résultats de G. CHOQUET sur les représentations intégrales dans certains cônes convexes sans base compacte [1].

Il est facile de déterminer toutes les solutions bornées de (1) (rappelons qu'une mesure de Radon sur G est dite bornée si toutes ses régularisées sont des fonctions bornées) ; le problème ne se pose d'ailleurs que si la masse totale de σ est 1, sinon la seule solution bornée est la mesure nulle.

THÉORÈME 1. - Lorsque la masse totale de σ est 1, les solutions bornées de (1) sont les mesures bornées admettant pour période tout point du support $S(\sigma)$ de σ .

Pour être complet, on va reproduire la démonstration élémentaire de cet énoncé donnée dans la note [2].

Comme la masse totale de la mesure σ est finie, cette mesure est portée par un sous-groupe dénombrable à l'infini ; on peut donc supposer que G est dénombrable à l'infini. Si μ est une solution bornée de (1), non nécessairement ≥ 0 , sa régularisée par n'importe quelle fonction continue positive à support compact a , par rapport à la mesure de Haar de G , une densité f bornée et uniformément continue sur G , satisfaisant à

⁽¹⁾ Cet exposé est le développement des résultats énoncés, le plus souvent sans démonstration, dans la note [2] de CHOQUET et DENY.

$$(1') \quad \int f(x-t) d\sigma(t) = f(x) \quad \forall x \in G.$$

Soit alors a un point du support $S(\sigma)$; la fonction g définie par $g(x) = f(x) - f(x-a)$ est aussi une solution bornée uniformément continue de (1'). Posons

$$2\alpha = \sup_{x \in G} g(x)$$

et considérons une suite de points $x_n \in G$ telle que $g(x_n)$ tende vers 2α . Les translatées g_n définies par $g_n(x) = g(x + x_n)$ étant également continues, on peut en extraire une suite partielle convergeant uniformément sur tout compact vers une solution g_0 continue, bornée (majorée par 2α), telle que

$$2\alpha = g_0(0) = \int g_0(-t) d\sigma(t),$$

donc telle que $g_0(x) = 2\alpha$ en tout point x du symétrique de $S(\sigma)$ par rapport à l'origine 0 , donc du semi-groupe engendré par ce symétrique.

Comme on a choisi $a \in S(\sigma)$, on voit que, pour tout entier naturel p , il existe une translatée g_n telle que $g_n(-ka) > \alpha$ pour $k = 1, 2, \dots, p$, donc un point $x \in G$ tel que

$$f(x-ka) - f(x-(k+1)a) = g(x-ka) > \alpha$$

pour ces valeurs de k ; on en déduit

$$f(x-a) - f(x-(p+1)a) > p\alpha,$$

ce qui d'après l'hypothèse que f est bornée, entraîne $\alpha \leq 0$, d'où $g \leq 0$; pour une raison analogue, on a $g \geq 0$, d'où $f(x-a) = f(x)$ pour tout $x \in G$; toute régularisée de μ admet a pour période, donc μ admet a pour période, d'où le résultat.

On va s'occuper maintenant des solutions ≥ 0 de (1), bornées ou non, la mesure $\sigma \geq 0$ donnée étant quelconque.

2. Les cônes $\mathcal{K}$ et $\mathcal{S}$.

Le groupe G et la mesure $\sigma \geq 0$ sur G sont donnés une fois pour toutes. Les solutions $\mu \geq 0$ de (1) sont appelées mesures σ -harmoniques ; leur ensemble constitue un cône convexe, noté $\mathcal{K}$. Les mesures $\mu \geq 0$ satisfaisant à l'inégalité associée

$$\mu * \sigma \leq \mu$$

sont appelées mesures σ -surharmoniques ; leur ensemble constitue également un cône convexe, noté $\mathcal{S}$.

Si la mesure μ appartient à $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{S}$), et si ν est une mesure ≥ 0 telle que le produit de convolution $\mu \star \nu$ ait un sens, cette mesure $\mu \star \nu$ appartient aussi à $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{S}$) ; c'est évident.

Si les mesures μ et ν appartiennent à $\mathcal{S}$, il en est de même de la mesure $\inf(\mu, \nu)$.

Le cône $\mathcal{S}$ est fermé pour la topologie vague ; si la mesure σ est à support compact, $\mathcal{K}$ est aussi fermé ; mais il n'en n'est pas toujours ainsi dans le cas général ⁽²⁾.

Introduisons une notation utile pour l'étude des éléments du cône $\mathcal{S}$: si τ est une mesure ≥ 0 telle que la convolution τ^n de n mesures identiques à τ ait un sens quel que soit n , et si la série $\sum \tau^n$ converge (en un sens évident), on appelle noyau élémentaire associé à τ , et on note K_τ la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \tau^n$ où on a posé $\tau^0 = \delta$.

LEMME 1. - Si le cône $\mathcal{S}$ n'est pas réduit à la mesure nulle, le noyau élémentaire $K_{t\sigma}$ existe quel que soit t , $0 \leq t < 1$; si en outre $\mathcal{S} - \mathcal{K} \neq \{0\}$, autrement dit, s'il existe une mesure surharmonique non harmonique, K_σ existe.

En effet si $\mathcal{S}$ contient une mesure $\mu \neq 0$, σ^2 a un sens, car $(\mu \star \sigma) \star \sigma \leq \mu$ a un sens ; de même σ^n a un sens pour tout entier $n > 0$, et $\mu \star \sigma^n \leq \mu$. Pour tout t réel, $0 \leq t < 1$, on a donc

$$(\delta + t\sigma + \dots + t^n \sigma^n) \leq \frac{\mu}{1-t}$$

d'où l'existence de $K_{t\sigma}$.

Si de plus μ n'est pas harmonique, la mesure $\xi = (\delta - \sigma) \star \mu \geq 0$ (appelée racine de μ) n'est pas nulle, et comme on a, pour tout entier $n > 0$:

$$(\delta + \sigma + \dots + \sigma^{n-1}) \star \xi = \mu - \mu \star \sigma^n \leq \mu$$

la série $\sum \sigma^n$ est bien convergente.

COROLLAIRE 1. - Si K_σ n'existe pas, le cône $\mathcal{K} = \mathcal{S}$ est fermé.

C'est évident.

⁽²⁾ Contrairement à une affirmation malencontreuse de [2] ; cela résulte de ce que l'ensemble des exponentielles σ -harmoniques n'est pas nécessairement fermé (voir n° 6).

COROLLAIRE 2. - Si K_G existe, toute mesure surharmonique $\mu \in \mathcal{S}$ admet une décomposition de Riesz unique

$$\mu = K_G \star \xi + \eta$$

en somme d'un K_G -potentiel et d'une mesure harmonique.

Dans cette formule $\xi = (\delta - \sigma) \star \mu$ est la racine de μ , et la partie harmonique η est égale à $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \star \sigma^n$.

Renvoyant à l'exposé précédent ([3]) pour la démonstration, d'ailleurs très simple, de ce théorème (dans un cadre plus général que celui de la convolution), nous dégagerons, pour les applications en vue, le résultat suivant :

COROLLAIRE 3. - Soient μ' et μ'' deux éléments de $\mathcal{S}$, ξ' et ξ'' leurs racines, η' et η'' leurs parties harmoniques ; si $\mu' - \mu'' \in \mathcal{S}$, alors $\xi'' \leq \xi'$ et $\eta'' \leq \eta'$.

C'est une conséquence immédiate des définitions de la racine et de la partie harmonique d'un élément de $\mathcal{S}$.

COROLLAIRE 4. - Les cônes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{H}$ sont réticulés.

Rappelons qu'un cône convexe $\mathcal{C}$ est dit réticulé si deux éléments quelconques x' et x'' de $\mathcal{C}$ ont une borne inférieure (pour l'ordre défini par $\mathcal{C}$), autrement dit s'il existe $x_0 \in \mathcal{C}$ tel que $x' - x_0 \in \mathcal{C}$, $x'' - x_0 \in \mathcal{C}$, et tel que les relations $x \in \mathcal{C}$, $x' - x \in \mathcal{C}$ et $x'' - x \in \mathcal{C}$ entraînent $x_0 - x \in \mathcal{C}$. On déduit immédiatement du corollaire 3 les conséquences suivantes :

Si $\mathcal{C} = \mathcal{S} \neq \mathcal{H}$, la borne inférieure (pour l'ordre défini par $\mathcal{C}$) des mesures surharmoniques μ' et μ'' est la mesure surharmonique $K_G \star \xi + \eta$, où ξ est l'enveloppe inférieure (au sens usuel) des racines de μ' et μ'' , et η la partie harmonique de l'enveloppe inférieure des parties harmoniques de μ' et μ'' .

Si $\mathcal{C} = \mathcal{H}$, la borne inférieure des deux mesures harmoniques μ' et μ'' est, dans tous les cas, la partie harmonique de la mesure surharmonique $\inf(\mu', \mu'')$.

3. Exponentielles harmoniques.

On appelle exponentielle sur un groupe abélien localement compact G toute fonction f continue réelle sur G , ne s'annulant pas, et telle que

$$f(x + y) = f(x) f(y), \quad \forall x \text{ et } y \in G.$$

On a évidemment $f(0) = 1$, $f(-x) = 1/f(x)$, $\forall x \in G$.

Le produit et le quotient de deux exponentielles sont des exponentielles.

La constante 1 est une exponentielle ; c'est la seule exponentielle si le groupe G est compact.

Nous aurons souvent l'occasion d'utiliser ce résultat très simple : soient μ et ν deux mesures ≥ 0 telles que $\mu \star \nu$ ait un sens ; pour toute exponentielle f le produit de convolution $(f\mu) \star (f\nu)$ a un sens et on a :

$$(2) \quad (f\mu) \star (f\nu) = f \mu \star \nu \quad .$$

Les mesures dont la densité est une exponentielle s'introduisent naturellement grâce à la propriété suivante :

LEMME 2. - Pour qu'une mesure positive soit proportionnelle à ses translatées, il faut et il suffit qu'elle soit le produit d'une mesure invariante sur G par une exponentielle.

La démonstration est très facile ; on utilisera la continuité de l'application $x \rightarrow \mu \star \delta_x$ de G dans l'ensemble des mesures de Radon sur G muni de la topologie vague (μ étant une mesure ≥ 0 donnée).

On peut définir une topologie vague sur un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions continues f sur G , comme la topologie induite par la topologie vague sur l'ensemble des mesures de densité f : ce sera, d'une façon précise, la topologie la moins fine qui rende continues les applications $f \rightarrow \int f(x) \varphi(x) dx$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$, φ décrivant l'ensemble des fonctions continues à support compact sur G , et dx désignant une mesure invariante non nulle sur G . On peut alors énoncer le résultat suivant, dont la démonstration ne présente pas de difficultés sérieuses :

LEMME 3. - Sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des exponentielles sur G , la topologie vague et la topologie de la convergence uniforme sur tout compact sont équivalentes ; muni de cette topologie, $\mathcal{E}$ est localement compact.

On dira que l'exponentielle f est harmonique (relativement à la mesure $\sigma \geq 0$ donnée) si la mesure de densité f est harmonique ; cette notion est indépendante du choix de la mesure invariante sur G ; pour que l'exponentielle f soit harmonique, il faut et il suffit qu'on ait :

$$(3) \quad \int f(-t) d\sigma(t) = 1 \quad .$$

On dira qu'une exponentielle f , définie seulement sur un sous-groupe fermé G' contenant le support $S(\sigma)$ est harmonique si elle vérifie cette relation (3). Alors tout prolongement de f en une exponentielle est évidemment harmonique. Rappelons à ce sujet que toute exponentielle sur G' peut être prolongée en une exponentielle sur G , mais un tel prolongement n'est pas nécessairement unique, et on n'aura pas à utiliser ce résultat connu. On vérifiera aisément le résultat suivant :

LEMME 4. - Soit $G(\sigma)$ le sous-groupe fermé engendré par le support de la mesure σ ; pour que le produit d'une mesure invariante sur $G(\sigma)$ par une exponentielle f définie sur $G(\sigma)$ soit une mesure harmonique, il faut et il suffit que f soit harmonique.

4. Généatrices extrémales du cône S . - Dans toute la suite on désignera par $G(\sigma)$ le sous-groupe fermé engendré par le support $S(\sigma)$ de la mesure $\sigma \geq 0$ donné, et par ω une mesure ≥ 0 non nulle portée par $G(\sigma)$ et invariante par les translations de $G(\sigma)$.

THÉOREME 2. - Les éléments extrémaux du cône S sont :

1° Les mesures proportionnelles aux translatées des mesures de la forme $f\omega$, où f est une exponentielle harmonique définie sur $G(\sigma)$.

2° Les mesures proportionnelles aux translatées du noyau élémentaire
 $K = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n$ associé à la mesure donnée σ .

Bien entendu cette seconde classe d'éléments extrémaux est vide si le noyau élémentaire K associé à σ n'existe pas.

On va diviser la démonstration en deux parties :

1° Toute mesure μ appartenant à l'une des classes de l'énoncé est un élément extrémal de S ; autrement dit toute mesure surharmonique ν telle que $\mu - \nu$ soit surharmonique est proportionnelle à μ .

D'après le corollaire 3 (n° 2), c'est évident si μ est proportionnelle à une translatée de K , c'est-à-dire si μ est le K -potentiel engendré par une masse ponctuelle.

Supposons que μ appartienne à la première classe ; on peut se borner au cas où $\mu = f\omega$, où f est une exponentielle harmonique définie sur $G(\sigma)$, car toute mesure proportionnelle à une mesure extrémale ou déduite par une translation

d'une telle mesure est évidemment extrême.

D'après le lemme 4, μ est harmonique ; donc, d'après le corollaire 3 (n° 2), la mesure ν est harmonique. Si on pose $\sigma' = f^{-1} \sigma$ on a, d'après (2) :

$$(f^{-1} \nu) \star \sigma' = f^{-1} \nu$$

(car f^{-1} est une exponentielle définie sur $G(\sigma)$) ; comme mesure $f^{-1} \nu$ est bornée (puisque $f^{-1} \nu \leq f^{-1} \mu = \sigma$) elle admet pour période tout point de $S(\sigma)$, donc tout point de $G(\sigma)$ (d'après le théorème 1) ; elle est donc proportionnelle à la mesure invariante σ (puisque'elle est portée par $G(\sigma)$) et par conséquent ν est bien proportionnelle à $f\sigma = \mu$.

2° Tout élément extrême de $\mathcal{S}$ appartient à l'une des classes de l'énoncé. Pour le voir observons d'abord que, d'après l'unicité de la décomposition de Riesz et le corollaire 3 (n° 2), tout élément extrême de $\mathcal{S}$ est, soit un potentiel (nécessairement engendré par une mesure ponctuelle, donc un élément de la seconde classe), soit une mesure harmonique.

Soit donc μ une mesure harmonique extrême ; soit x un point du support $S(\sigma)$, soit v un voisinage compact de x , et soit σ_v la restriction (non nulle) de σ à v . Comme $\mu \star \sigma_v$ est harmonique, de même que $\mu - \mu \star \sigma_v = \mu \star (\sigma - \sigma_v)$, il existe, en vertu du caractère extrême de μ , un nombre réel $\alpha_v > 0$ tel que

$$\mu \star \sigma_v = \alpha_v \mu.$$

Appelons alors m_v la masse totale de σ_v , et posons $\tau_v = \sigma_v / m_v$, $\beta_v = \alpha_v / m_v$; on a

$$\mu \star \tau_v = \beta_v \mu.$$

Lorsque v tend vers x , τ_v converge vaguement vers δ_x , masse + 1 en x ; donc β_v tend vers un nombre réel $g(x)$ tel que

$$(4) \quad \mu \star \delta_x = g(x) \mu.$$

Soit maintenant x un point de $G(\sigma)$ tel que $-x \in S(\sigma)$; on a, d'après (4) :

$$\mu = (\mu \star \delta_{-x}) \star \delta_x = g(-x) \mu \star \delta_x.$$

Si x appartient à $S(\sigma)$, il en résulte que $g(x) = 1/g(-x)$; sinon on pourra

encore écrire $\mu \star \delta_x = g(x) \mu$, à condition de poser $g(x) = 1/g(-x)$.

Soit ensuite $x = x_1 + x_2$, chacun des x_i appartenant soit à $S(\sigma)$, soit à l'ensemble symétrique $-S(\sigma)$; en écrivant $\mu \star \delta_x = (\mu \star \delta_{x_1}) \star \delta_{x_2}$ on vérifie que, si $g(x)$ a déjà été défini, ce nombre est égal à $g(x_1) g(x_2)$; sinon la relation (4) aura encore lieu à condition de poser $g(x) = g(x_1) g(x_2)$.

De ces remarques, et de la continuité de l'application $x \rightarrow \mu \star \delta_x$, on déduit que μ est proportionnelle à chacune de ses translatées par un élément de $G(\sigma)$.

Observons maintenant que si μ est harmonique extrémale, son support est un translaté de $G(\sigma)$; en effet s'il existe deux points du support qui ne sont pas congrus modulo $G(\sigma)$, on peut trouver un ouvert u contenant l'un de ces points, qui soit invariant par les translations de $G(\sigma)$, et dont le complémentaire soit de mesure > 0 pour μ ; évidemment les restrictions de μ à u et à son complémentaire vérifient toutes deux la relation (1), donc elles sont harmoniques et elles ne sont pas proportionnelles, contrairement à l'hypothèse que μ est extrémale.

La mesure μ est donc portée par un ensemble déduit de $G(\sigma)$ par translation; toute mesure déduite par translation d'une mesure harmonique extrémale étant évidemment harmonique extrémale, on peut supposer que μ est portée par $G(\sigma)$; comme on a vu que μ est proportionnelle à ses translatées par les éléments de $G(\sigma)$, il résulte du lemme 2 qu'elle est proportionnelle à une mesure de la forme $f\omega$, où f est une exponentielle définie sur $G(\sigma)$; d'après le lemme 4, cette exponentielle est harmonique, ce qui achève la démonstration du théorème.

5. Représentation des mesures harmoniques.

Afin de pouvoir appliquer le théorème de représentation de [1], on supposera maintenant que le groupe G est à base dénombrable. On désignera par $\mathcal{E}$ l'ensemble des exponentielles sur $G(\sigma)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (d'après le lemme 3, $\mathcal{E}$ est localement compact); on désignera par $\mathcal{E}(\sigma)$ l'ensemble des exponentielles f sur $G(\sigma)$ qui sont harmoniques, c'est-à-dire telles que $\int f(-t) d\sigma(t) = 1$ (c'est un sous-ensemble borélien de $\mathcal{E}$).

Comme G est à base dénombrable, il existe un ensemble borélien Γ de G contenant un représentant et un seul de chaque classe de $G/G(\sigma)$. Appelons $\mathcal{A}$ l'ensemble des mesures de la forme $(f\omega) \star \delta_x$ ($f \in \mathcal{E}(\sigma)$, $x \in \Gamma$), $\mathcal{B}$ l'ensemble

des mesures $K \star \delta_x$ ($x \in G$). Les mesures de $\mathcal{A}$ étant harmoniques et celles de $\mathcal{B}$ étant des potentiels, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont disjoints ; deux éléments distincts de $\mathcal{A}$ ne sont pas proportionnels (en effet, d'après la définition des exponentielles, les mesures $(f\omega) \star \delta_x$ et $(f\omega) \star \delta_y$, $f \in \mathcal{E}$, x et $y \in G$, sont proportionnelles si et seulement si x et y sont congrus modulo $G(\sigma)$) ; enfin deux éléments distincts de $\mathcal{B}$ ne sont pas proportionnels (d'après le principe d'unicité des masses dans la théorie du potentiel par rapport au noyau élémentaire K ; voir [3]) ; par conséquent, d'après le théorème 2, la réunion de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ constitue une section (borélienne) du cône des génératrices extrémales du cône S des mesures surharmoniques.

Comme ce cône S est constitué par des mesures positives sur un espace localement compact à base dénombrable, qu'il est vaguement fermé, convexe et réticulé, il résulte de [1] que tout élément μ de S admet une représentation et une seule de la forme

$$(5) \quad \mu = \int y \, d\lambda(y)$$

où λ est une mesure positive portée par la réunion $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Appelons λ_1 et λ_2 les restrictions de λ aux ensembles disjoints $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, ν l'image de λ_1 par l'application biunivoque de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{E}(\sigma) \times \Gamma$ définie par $(f\omega) \star \delta_x \rightarrow (f, x)$, ξ l'image de λ_2 par l'homéomorphisme $K \star \delta_x \rightarrow x$ de $\mathcal{B}$ sur G ; la relation (5) donne :

$$(6) \quad \mu = \int (f\omega) \star \delta_x \, d\nu(f, x) + K \star \xi$$

car

$$\int (K \star \delta_x) \, d\xi(x) = K \star \xi \quad .$$

Inversement toute mesure μ de la forme (6), où ξ est une mesure positive sur G (telle que $K \star \xi$ ait un sens), et ν une mesure positive sur l'espace localement compact $\mathcal{E} \times G$ (telle que la première intégrale du second membre ait un sens) est évidemment surharmonique ; d'après l'unicité de la décomposition de Riesz (n° 2), le premier terme du second membre représente la partie harmonique de μ et le second terme sa partie "potentiel" ; ce second terme est nul si μ est harmonique, et on a obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME 3. - Les mesures σ -harmoniques sont les mesures de la forme

$$\mu = \int (f\omega) \star \delta_x \, d\nu(f, x)$$

où ν est une mesure de Radon positive sur l'espace localement compact $\mathcal{E} \times G$, portée par l'ensemble borélien $\mathcal{E}(\sigma) \times \Gamma$, et telle que l'intégrale ait un sens ; une telle représentation est unique.

L'ensemble Γ a été introduit pour permettre d'énoncer un théorème d'unicité ; malheureusement il n'offre aucun caractère canonique ; la situation est beaucoup plus agréable lorsque $G(\sigma) = G$ (on peut alors prendre pour Γ l'ensemble réduit à l'origine de G) ; il suffit d'énoncer le résultat obtenu dans ce cas particulier

THÉORÈME 3'. - Lorsque le support de la mesure σ engendre tout le groupe G , les mesures harmoniques sont les mesures dont la densité h par rapport à la mesure de Haar est donnée par

$$h(x) = \int f(x) d\nu(f)$$

où ν est une mesure positive sur l'espace localement compact $\mathcal{E}$, portée par l'ensemble borélien $\mathcal{E}(\sigma)$ des exponentielles harmoniques ; cette représentation est unique.

Evidemment ν doit être choisie de façon que h soit localement intégrable par rapport à la mesure de Haar de G ; on peut dire que, dans ce cas, les mesures harmoniques sont des "fonctions" (qui sont d'ailleurs continues) qui se présentent comme transformées de Laplace de certaines mesures positives.

REMARQUE. - Il résulte du théorème 3 que s'il existe une mesure harmonique non nulle, il existe au moins une exponentielle harmonique ; ce résultat ne pouvait être déduit du théorème de KREIN et MILMAN appliqué au cône $\mathcal{K}$ (voir [1]), car ce cône n'est pas toujours fermé.

6. Cas du groupe $\mathbb{R}^n$.

On supposera que le support de σ engendre tout le groupe $G = \mathbb{R}^n$; comme l'ensemble $\mathcal{E}$ des exponentielles sur $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, on peut écrire la formule de représentation du théorème 3' sous la forme

$$(7) \quad h(x) = \int \exp(-tx) d\nu(t)$$

où ν est une mesure ≥ 0 portée par l'ensemble E des points t de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la relation

$$(8) \quad \int \exp(tx) d\sigma(x) = 1 \quad .$$

Evidemment cet ensemble E est porté par la frontière d'un ensemble convexe de

$\mathbb{R}^n$ (l'ensemble des points t tels que $\int \exp(tx) d\sigma(x) \leq 1$) ; mais E n'est pas nécessairement identique à cette frontière si σ n'est pas à support compact, et on peut d'ailleurs construire des exemples où E n'est pas fermé (pour $n \geq 2$).

Terminons par quelques exemples ; les résultats énoncés seront des conséquences immédiates des formules (7) et (8) :

Lorsque $n = 1$, il y a au plus deux exponentielles harmoniques.

Supposons $n > 1$ et σ symétrique par rapport à l'origine 0 :

si la masse totale m de σ est > 1 , il n'y a pas d'exponentielle harmonique.

si $m = 1$, la constante 1 est la seule exponentielle harmonique.

si $m < 1$, il y a une infinité d'exponentielles harmoniques ; l'ensemble E est compact car il est rencontré en deux points distincts, symétriques par rapport à 0 , par toute droite issue de 0 . Le cône $\mathcal{K}$ est alors à base compacte, et par conséquent il est fermé.

On retrouvera ainsi l'expression générale des fonctions continues positives qui sont proportionnelles à leurs valeurs moyennes sur les sphères ayant un rayon donné ; en cas d'égalité, seules les constantes positives conviennent, comme il est bien connu.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHOQUET (Gustave). - Représentation intégrale dans les cônes à base non compacte, Séminaire Brelot : Théorie du potentiel, t. 4, 1959/60, exposé n° 2, 1 p.
- [2] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Sur l'équation de convolution $\mu = \mu \star \sigma$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 799-801.
- [3] DENY (Jacques). - Les noyaux élémentaires, Séminaire Brelot : Théorie du potentiel, t. 4, 1959/60, exposé n° 4, 12 p.