

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

ROSE-MARIE HERVÉ

Recherches sur la théorie axiomatique des fonctions surharmoniques

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. n° 11,
p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SB CD_1958-1959__3__A9_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RECHERCHES SUR LA THÉORIE AXIOMATIQUE DES FONCTIONS SURHARMONIQUES

par Mme Rose-Marie HERVÉ

Ces recherches reposent sur la théorie axiomatique de M. BRELOT ([1]) ; elles sont centrées sur un théorème de partition de toute fonction surharmonique ≥ 0 en deux fonctions surharmoniques ≥ 0 , théorème dont je donne une démonstration utilisant le moins d'axiomes possible. Puis j'indique quelques conséquences de ce théorème.

Pour les notations, je renvoie à l'article [1], spécialement pages 1-28 ; je rappelle simplement que S^+ est l'ensemble des fonctions surharmoniques ≥ 0 dans Ω .

1. Le théorème de partition avec les axiomes 1, 2, 3.

THÉOREME 1. - Etant donnée une fonction $V \in S^+$ et un ouvert $\omega_1 \subset \Omega$, on désigne par $E(V, \omega_1)$ l'ensemble des fonctions $w \in S^+$, telles qu'à chaque w on puisse associer \tilde{w} , surharmonique dans ω_1 , satisfaisant à $w = V + \tilde{w}$ dans ω_1 ; soit $v = \inf_{w \in E(V, \omega_1)} w$; alors :

1° $v \in E(V, \omega_1)$;

2° Pour toute $w \in E(V, \omega_1)$, dans Ω : $w = v + w'$, où $w' \in S^+$;

3° En particulier $V = v + v'$ dans Ω , avec v et $v' \in S^+$; et v est harmonique dans $\bar{\omega}_1$, v' harmonique dans ω_1 (1).

1° L'ensemble $E(V, \omega_1)$ n'est pas vide, car il contient V ; donc $0 \leq v \leq V$. Quand w décrit $E(V, \omega_1)$, \tilde{w} décrit un ensemble de fonctions surharmoniques dans ω_1 , qui contient 0 et qui est saturé dans ω_1 . Soit $v = \inf_{w \in E(V, \omega_1)} \tilde{w}$:

la relation $v = V + \tilde{v}$, dans ω_1 , montre que \tilde{v} ne peut être $\equiv -\infty$ dans aucune composante connexe de ω_1 ; \tilde{v} est donc harmonique dans ω_1 et, si \hat{v} est la régularisée semi continue inférieurement (s. c. i.) de la ψ_{ω_1} -fonction v

(1) v' est aussi la plus grande fonction de S^+ qui soit "minorante générique" de V et harmonique dans ω_1 .

(\mathcal{B} base quelconque de domaines réguliers) : $\hat{v} = v + \tilde{v}$ dans ω_1 . Donc $\hat{v} \in E(V, \omega_1)$ et $v = \hat{v}$ dans Ω .

2° Première partie. - Montrons que :

$$w'' = \begin{cases} w - v & \text{en tout point où cette différence est définie,} \\ +\infty & \text{en tout point où } w = v = +\infty, \end{cases}$$

est une \mathcal{C} -fonction dans Ω , et, pour cela, qu'en tout point x où $w - v$ est défini, et pour tout domaine régulier $\omega \in \mathcal{B}$, $\omega \ni x$:
 $w(x) - v(x) \geq H_W^{\omega}(x) - H_V^{\omega}(x)$, c'est-à-dire $w - H_W^{\omega} + H_V^{\omega} \geq v$ dans ω .

Soient S une fonction surharmonique dans ω , dont la limite inférieure, en tout point de ω^* , est $> -\infty$ et $\geq v$, et s une fonction sous-harmonique dans ω , dont la limite supérieure, en tout point de ω^* , est $< +\infty$ et $\leq w$: il suffit de prouver que, dans ω , $w - s + S \geq v$. Posons :

$$w_1 = \begin{cases} \inf(w - s + S, v) & \text{dans } \omega, \\ v & \text{dans } \bar{\omega}, \end{cases}$$

$w_1 \leq v$, et $w_1 \in S^+$, car $w - s + S$ est une fonction surharmonique dans ω , dont la limite inférieure, en tout point de ω^* , est $> -\infty$ et $\geq v$.

Pour que $w_1 \in E(V, \omega_1)$, il suffit alors de montrer que

$$\tilde{w}_1 = \begin{cases} \inf(\tilde{w} - s + S, \tilde{v}) & \text{dans } \omega \cap \omega_1 \\ \tilde{v} & \text{dans } [\omega \cap \omega_1^c], \end{cases}$$

est surharmonique dans ω_1 , ce qui, grâce au critère local de surharmonicité ([1], théorème 1, page 1-04), se ramène à la s. c. i. de \tilde{w}_1 en tout point $y \in \omega \cap \omega_1$. Or, si $\tilde{w}(y) = +\infty$ ou si $v(y) = +\infty$, on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \omega \cap \omega_1}} (\tilde{w} - s + S) = +\infty \geq \tilde{v}(y)$$

et dans les autres cas,

$$\liminf_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \omega \cap \omega_1}} (\tilde{w} - s + S) \geq \tilde{w}(y) - w(y) + v(y) = \tilde{v}(y).$$

CONCLUSION. - $v_1 \in E(V, \omega_1)$ entraîne $w_1 \geq v$ dans Ω , donc $w_1 = v$ dans Ω et $w - s + S \geq v$ dans ω .

Deuxième partie. - Soit w' la régularisée s. c. i. de w'' : pour tout point x , on a

$$w'(x) = \sup_{\substack{\omega \ni x \\ \omega \in \mathcal{B}}} [H_W^\omega(x) - H_V^\omega(x)] \quad ;$$

$H_V^\omega(x) - H_W^\omega(x) \geq H_W^\omega(x) - v(x)$ entraîne $w'(x) \geq w(x) - v(x)$ en tout point x où $w - v$ est défini. On en déduit $w = v + w'$ quasi partout dans Ω , donc partout.

3° Des paragraphes 1 et 2 résulte $V = v + v'$, ou v et $v' \in S^+$; $v' = -\check{v}$ dans ω_1 , donc v' est harmonique dans ω_1 . D'autre part, $E(V, \omega_1)$ est un ensemble saturé de fonctions surharmoniques dans $\bar{\omega}_1$, donc v est harmonique dans $\bar{\omega}_1$.

DÉFINITION. - Dans la suite, la fonction v du théorème 1 s'appellera "restriction spécifique de V à ω_1 ", et sera notée v_{ω_1} .

2. Conséquences du théorème de partition.

On suppose les axiomes 1, 2, 3, et l'existence d'un potentiel > 0 dans Ω .

Première conséquence. - Etudions les éléments extrémaux de l'ensemble convexe P_{x_0, ω_0}^+ des potentiels V dans Ω , normalisés, à l'aide du couple (x_0, ω_0) ouvert régulier $\ni x_0$, par

$$\int V d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1 \quad .$$

THÉORÈME 2. - Tout potentiel extrémal a un support ponctuel.

En effet, si le support d'un potentiel extrémal V contenait 2 points distincts y_1 et y_2 , le théorème 1, appliqué à V et à un ouvert $\omega \ni y_1$, et tel que $\bar{\omega} \not\ni y_2$, donnerait $V = v + v'$, où v et v' seraient deux potentiels > 0 , non proportionnels; d'où la contradiction.

REMARQUE. - Ce résultat conduit à se demander s'il existe des potentiels de support y donné. Désignons par V_0 un potentiel > 0 , fini continu dans Ω , et supposons Ω à base dénombrable. Deux cas sont à distinguer :

- Si y est un point non polaire,

$$\frac{\widehat{R}_{V_0}^{\{y\}}(x)}{\widehat{R}_{V_0}^{\{y\}}(x_0)}$$

est un potentiel de support y , indépendant de V_0 ;

- Si y est un point polaire, on suppose en outre l'axiome de Harnack ([1], pages 1-17 et 1-21) vérifié par les fonctions harmoniques > 0 dans chaque domaine $\mathcal{J} \subset \Omega$; alors, de la suite des potentiels

$$\frac{\hat{R}_{V_0}^{K_n}(x)}{\hat{R}_{V_0}^{K_n}(x_0)},$$

où K_n désigne une suite de suite de compacts décroissants, formant système fondamental de voisinages de y , on peut extraire une suite partielle convergent vers un potentiel de support y .

Deuxième conséquence. - On suppose en outre Ω à base dénombrable.

THÉOREME 3. - Un couple normalisateur (x_0, ω_0) étant choisi une fois pour toutes, à tout potentiel V on peut associer une mesure de Radon ≥ 0 dans Ω , unique, soit μ , telle que, pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$: $\mu(\omega) = \int_{\omega} v_{x_0} d\rho_{x_0}$, où v_{ω} est la restriction de V à ω .

L'existence de cette mesure permet, par exemple, de comparer les deux axiomes suivants :

Axiome 4' : Pour tout potentiel V , localement borné, dans Ω , harmonique dans un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$: $\hat{R}_V^{\omega} \equiv V$.

Axiome 4'' : Tout potentiel localement borné, continu sur son support, est continu dans Ω .

THÉOREME 4. - En supposant les axiomes 1, 2, 3, et Ω à base dénombrable, l'axiome 4'' entraîne l'axiome 4'.

M. BRELOT avant démontré ([1], théorème 19, page 1-37) que l'axiome 4' entraîne l'axiome 4'', on en conclut l'équivalence de ces deux axiomes.

Troisième conséquence. -

THÉOREME 5. - Étant donnés v surharmonique > 0 dans un ouvert $\omega \subset \Omega$, et un ouvert $\omega' \subset \bar{\omega}' \subset \omega$, il existe un potentiel V dans Ω , et une fonction harmonique $h \geq 0$ dans ω' , tels que $V = v + h$ dans ω' .

Si v a un support compact $K \subset \omega$, il existe un potentiel V dans Ω , unique, de support K , et une fonction h harmonique dans ω , tels que $V = v + h$ dans ω' .

Application à la comparaison des potentiels extrémaux dans Ω et dans un ouvert partiel ω . Soit $x \in \omega$. A tout potentiel P dans Ω , de support x , correspond un potentiel unique p dans ω , de support x , tel que $P - p$ soit harmonique dans ω : $p = P - h$, où h est la plus grande minorante harmonique de P dans ω . Réciproquement, d'après le théorème 5, à tout potentiel p dans ω , de support x , correspond un potentiel unique P dans Ω , de support x , tel que $P - p$ soit harmonique dans ω . Par suite, si l'un des potentiels est extrémal, l'autre l'est aussi.

L'unicité, ou la multiplicité, des potentiels normalisés de support donné, a donc un caractère local.

Quatrième conséquence. - Un critère d'effilement d'un ensemble.

THÉOREME 6. - Ω étant à base dénombrable, si un ensemble E est effilé au point y polaire, adhérent à E et $\not\subseteq E$, il existe une fonction $V \in S^+$, finie au point y , et telle que $\lim_{\substack{x \in E \\ x \rightarrow y}} V(x) = +\infty$.

Le théorème subsiste dans le cas où y est un point non polaire, à condition de supposer en outre l'axiome 4'.

3. Quelques résultats, en supposant les axiomes 1, 2, 3, et l'existence d'un potentiel > 0 dans Ω , Ω à base dénombrable, et l'axiome 4' ou 4''.

1° Fixons un point x_0 de Ω et un potentiel V_0 fini continu > 0 dans Ω ; rappelons ([1]; théorème 16, page 1-32) que $R_{V_0}^E(x_0)$ est pour E compact variable une capacité de Choquet et pour E quelconque la capacité extérieure correspondante.

THÉOREME 7. - Etant donné un voisinage fermé σ_0 de x_0 , une fonction $V \in S^+$ et un nombre $a > 0$, il existe un ouvert $\omega \subset \Omega$, tel que la capacité précédente de $\omega \cap \sigma_0$ soit $< a$, et que la restriction de V à ω soit finie continue.

On reconnaît un théorème démontré par G. CHOQUET dans sa théorie du potentiel à noyau ([2], théorème 1, page 1-05); la démonstration est d'ailleurs très voisine de celle de G. CHOQUET, dans le cas où V est localement borné.

2° Indiquons brièvement, pour terminer, une série de résultats ([3]), concernant la balayée d'une fonction $\in S^+$.

THÉOREME 8. - Étant donné un ensemble $E \subset \Omega$ et un point $x \in \Omega$, il existe une mesure de Radon $\mu_x^E \gg 0$ telle que, pour toute fonction $V \in S^+$:

$$\hat{R}_V^E(x) = \int V d\mu_x^E .$$

La mesure μ_x^E jouit de propriétés analogues à celles du cas classique.

THÉOREME 9. - L'ensemble des points de Ω où E est effilé est de μ_x^E -mesure nulle, quel que soit $x \in \Omega$.

THÉOREME 10. - L'ensemble des points de Ω , autres que x , où E est effilé, est de μ_x^E -mesure nulle, quel que soit $x \in \Omega$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRELOT (Marcel). - Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, Séminaire Brelot, t. 2, 1958 : Théorie du potentiel, n° 1.
- [2] CHOQUET (Gustave). - Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, Séminaire Brelot, t. 1, 1957 : Théorie du potentiel, n° 1.
- [3] HERVÉ (Rose-Marie). - Développement sur une théorie axiomatique des fonctions surharmoniques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 179-181.