Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Rose-Marie Hervé

Recherches sur la théorie axiomatique des fonctions surharmoniques

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. nº 11, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958-1959__3__A9_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL
Année 1958/59
-:-:-:-

RECHERCHES SUR LA THÉORIE AXIOMATIQUE DES FONCTIONS SURHARMONIQUES

par Mme Rose-Marie HERVÉ

Ces recherches reposent sur la théorie axiomatique de M. BRELOT ([1]) ; elles sont centrées sur un théorème de partition de toute fonction surharmonique $\geqslant 0$ en deux fonctions surharmoniques $\geqslant 0$, théorème dont je donne une démonstration utilisant le moins d'axiomes possible. Puis j'indique quelques conséquences de ce théorème.

Pour les notations, je renvoie à l'article [1], spécialement pages 1-28 ; je rappelle simplement que S^+ est l'ensemble des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω.

1. Le théorème de partition avec les axiomes 1, 2, 3.

THÉORÈME 1. - Etant donnés une fonction $V \in S^+$ et un ouvert $\omega_1 \subset \Omega$, on désigne par $E(V, \omega_1)$ l'ensemble des fonctions $w \in S^+$, telles qu'à chaque w on puisse associer $\tilde{w}$, surharmonique dans ω_1, satisfaisant à $w = V + \tilde{w}$ dans ω_1 ; soit $v = \inf\limits_{w \in E(V, \omega_1)} w$; alors :

1° $v \in E(V, \omega_1)$;

2° Pour toute $w \in E(V, \omega_1)$, dans Ω : $w = v + w'$, où $w' \in S^+$;

3° En particulier $V = v + v'$ dans Ω, avec v et $v' \in S^+$; et v est harmonique dans $\complement\bar{\omega}_1$, v' harmonique dans ω_1 (1).

1° L'ensemble $E(V, \omega_1)$ n'est pas vide, car il contient V ; donc $0 \leqslant v \leqslant V$. Quand w décrit $E(V, \omega_1)$, $\tilde{w}$ décrit un ensemble de fonctions surharmoniques dans ω_1, qui contient 0 et qui est saturé dans ω_1. Soit $v = \inf\limits_{w \in E(V, \omega_1)} \tilde{w}$: la relation $v = V + \tilde{v}$, dans ω_1, montre que $\tilde{v}$ ne peut être $\equiv -\infty$ dans aucune composante connexe de ω_1 ; $\tilde{v}$ est donc harmonique dans ω_1 et, si $\hat{v}$ est la régularisée semi continue inférieurement (s. c. i.) de la $\mathcal{G}_{\delta}$-fonction v

(1) v' est aussi la plus grande fonction de S^+ qui soit "minorante générique" de V et harmonique dans ω_1.

($\mathcal{B}$ base quelconque de domaines réguliers) : $\hat{v} = V + \vec{v}$ dans ω_1. Donc $\hat{v} \in E(V, \omega_1)$ et $v = \hat{v}$ dans Ω.

2° Première partie. - Montrons que :

$$w'' = \begin{cases} w - v & \text{en tout point où cette différence est définie,} \\ +\infty & \text{en tout point où } w = v = +\infty \end{cases},$$

est une $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$-fonction dans Ω, et, pour cela, qu'en tout point x où $w - v$ est défini, et pour tout domaine régulier $\omega \in \mathcal{B}$, $\omega \ni x$: $w(x) - v(x) \geqslant H_w^{\omega}(x) - H_v^{\omega}(x)$, c'est-à-dire $w - H_w^{\omega} + H_v^{\omega} \geqslant v$ dans ω.

Soient S une fonction surharmonique dans ω, dont la limite inférieure, en tout point de $\overset{*}{\omega}$, est $> -\infty$ et $\geqslant v$, et s une fonction sous-harmonique dans ω, dont la limite supérieure, en tout point de $\overset{*}{\omega}$, est $< +\infty$ et $\leqslant w$: il suffit de prouver que, dans ω, $w - s + S \geqslant v$. Posons :

$$w_1 = \begin{cases} \inf(w - s + S, v) & \text{dans } \omega, \\ v & \text{dans } \complement\omega, \end{cases}$$

$w_1 \leqslant v$, et $w_1 \in S^+$, car $w - s + S$ est une fonction surharmonique dans ω, dont la limite inférieure, en tout point de $\overset{*}{\omega}$, est $> -\infty$ et $\geqslant v$.

Pour que $w_1 \in E(V, \omega_1)$, il suffit alors de montrer que

$$\vec{w}_1 = \begin{cases} \inf(\vec{w} - s + S, \vec{v}) & \text{dans } \omega \cap \omega_1 \\ \vec{v} & \text{dans } \complement\omega \cap \omega_1 \end{cases},$$

est surharmonique dans ω_1, ce qui, grâce au critère local de surharmonicité ([1], théorème 1, page 1-04), se ramène à la s. c. i. de $\vec{w}_1$ en tout point $y \in \overset{*}{\omega} \cap \omega_1$. Or, si $\vec{w}(y) = +\infty$ ou si $v(y) = +\infty$, on a

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in \omega \cap \omega_1}} (\vec{w} - s + S) = +\infty \geqslant \vec{v}(y)$$

et dans les autres cas,

$$\liminf_{\substack{x \to y \\ x \in \omega \cap \omega_1}} (\vec{w} - s + S) \geqslant \vec{w}(y) - w(y) + v(y) = \vec{v}(y) .$$

CONCLUSION. - $w_1 \in E(V, \omega_1)$ entraîne $w_1 \geqslant v$ dans Ω, donc $w_1 = v$ dans Ω et $w - s + S \geqslant v$ dans ω.

Deuxième partie. - Soit w' la régularisée s. c. i. de w'' : pour tout point x ; on a

$$w'(x) = \sup_{\substack{\omega \ni x \\ \omega \in \mathcal{B}}} [H_w^{\omega}(x) - H_v^{\omega}(x)] \quad ;$$

$H_v^{\omega}(x) - H_v^{\omega}(x) \geqslant H_w^{\omega}(x) - v(x)$ entraîne $w'(x) \geqslant w(x) - v(x)$ en tout point x où $w - v$ est défini. On en déduit $w = v + w'$ quasi partout dans Ω, donc partout.

3° Des paragraphes 1 et 2 résulte $V = v + v'$, ou v et $v' \in S^+$; $v' = -\overset{\omega}{v}$ dans ω_1, donc v' est harmonique dans ω_1. D'autre part, $E(V, \omega_1)$ est un ensemble saturé de fonctions surharmoniques dans $\complement\bar{\omega}_1$, donc v est harmonique dans $\complement\bar{\omega}_1$.

DÉFINITION. - Dans la suite, la fonction v du théorème 1 s'appellera "restriction spécifique de V à ω_1", et sera notée v_{ω_1}.

2. Conséquences du théorème de partition.

On suppose lès axiomes 1, 2, 3, et l'existence d'un potentiel > 0 dans Ω.

Première conséquence. - Etudions les éléments extrémaux de l'ensemble convexe $P^+_{x_0, \omega_0}$ des potentiels V dans Ω, normalisés, à l'aide du couple (x_0 , ω_0 ouvert régulier $\ni x_0$), par

$$\int V d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1 \quad .$$

THÉORÈME 2. - Tout potentiel extrémal a un support ponctuel.

En effet, si le support d'un potentiel extrémal V contenait 2 points distincts y_1 et y_2, le théorème 1, appliqué à V et à un ouvert $\omega \ni y_1$, et tel que $\bar{\omega} \not\ni y_2$, donnerait $V = v + v'$, où v et v' seraient deux potentiels > 0, non proportionnels ; d'où la contradiction.

REMARQUE. - Ce résultat conduit à se demander s'il existe des potentiels de support y donné. Désignons par V_0 un potentiel > 0, fini continu dans Ω, et supposons Ω à base dénombrable. Deux cas sont à distinguer :

- Si y est un point non polaire,

$$\frac{\hat{R}_{V_0}^{\{y\}}(x)}{\hat{R}_{V_0}^{\{y\}}(x_0)}$$

est un potentiel de support y, indépendant de V_0 ;

- Si y est un point polaire, on suppose en outre l'axiome de Harnack ([1], pages 1-17 et 1-21) vérifié par les fonctions harmoniques > 0 dans chaque domaine $\delta \subset \Omega$; alors, de la suite des potentiels

$$\frac{\hat{R}_{V_0}^{K_n}(x)}{\hat{R}_{V_0}^{K_n}(x_0)} ,$$

où K_n désigne une suite de suite de compacts décroissants, formant système fondamental de voisinages de y , on peut extraire une suite partielle convergeant vers un potentiel de support y .

Deuxième conséquence. - On suppose en outre Ω à base dénombrable.

THÉORÈME 3. - Un couple normalisateur (x_0 , ω_0) étant choisi une fois pour toutes, à tout potentiel V on peut associer une mesure de Radon ≥ 0 dans Ω , unique, soit μ, telle que, pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$: $\mu(\omega) = \int v_\omega \, d\rho_{x_0}^{\omega_0}$, où v_ω est la restriction de V à ω.

L'existence de cette mesure permet, par exemple, de comparer les deux axiomes suivants :

Axiome 4' : Pour tout potentiel V , localement borné, dans Ω , harmonique dans un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$: $\hat{R}_V^{\complement\omega} \equiv V$.

Axiome 4" : Tout potentiel localement borné, continu sur son support, est continu dans Ω .

THÉORÈME 4. - En supposant les axiomes 1, 2, 3, et Ω à base dénombrable, l'axiome 4" entraîne l'axiome 4'.

M. BRELOT ayant démontré ([1], théorème 19, page 1-37) que l'axiome 4' entraîne l'axiome 4", on en conclut l'équivalence de ces deux axiomes.

Troisième conséquence. -

THÉORÈME 5. - Étant donnés v surharmonique ≥ 0 dans un ouvert $\omega \subset \Omega$, et un ouvert $\omega' \subset \bar{\omega}' \subset \omega$, il existe un potentiel V dans Ω, et une fonction harmonique $h \geq 0$ dans ω' , tels que $V = v + h$ dans ω' .

Si v a un support compact $K \subset \omega$, il existe un potentiel V dans Ω , unique, de support K , et une fonction h harmonique dans ω , tels que $V = v + h$ dans ω .

<u>Application</u> à la comparaison des potentiels extrémaux dans Ω et dans un ouvert partiel ω. Soit $x \in \omega$. A tout potentiel P dans Ω, de support x, correspond un potentiel unique p dans ω, de support x, tel que $P - p$ soit harmonique dans ω : $p = P - h$, où h est la plus grande minorante harmonique de P dans ω. Réciproquement, d'après le théorème 5, à tout potentiel p dans ω, de support x, correspond un potentiel unique P dans Ω, de support x, tel que $P - p$ soit harmonique dans ω. Par suite, si l'un des potentiels est extrémal, l'autre l'est aussi.

L'unicité, ou la multiplicité, des potentiels normalisés de support donné, a donc un caractère local.

<u>Quatrième conséquence</u>. - Un critère d'effilement d'un ensemble.

THÉORÈME 6. - <u>Ω étant à base dénombrable, si un ensemble</u> E <u>est effilé au point</u> y <u>polaire, adhérent à</u> E <u>et</u> $\notin E$, <u>il existe une fonction</u> $V \in S^+$, <u>finie au point</u> y, <u>et telle que</u> $\lim\limits_{\substack{x \in E \\ x \to y}} V(x) = +\infty$.

Le théorème subsiste dans le cas où y est un point <u>non polaire</u>, à condition de supposer en outre l'axiome 4'.

3. <u>Quelques résultats</u>, en supposant les axiomes 1, 2, 3, et l'existence d'un potentiel > 0 dans Ω, Ω à base dénombrable, et l'axiome 4' ou 4".

1° Fixons un point x_0 de Ω et un potentiel V_0 fini continu > 0 dans Ω ; rappelons ([1]; théorème 16, page 1-32) que $R_{V_0}^E(x_0)$ est pour E compact variable une capacité de Choquet et pour E quelconque la capacité extérieure correspondante.

THÉORÈME 7. - <u>Etant donnés un voisinage fermé</u> δ_0 <u>de</u> x_0, <u>une fonction</u> $V \in S^+$ <u>et un nombre</u> $a > 0$, <u>il existe un ouvert</u> $\omega \subset \Omega$, <u>tel que la capacité précédente de</u> $\omega \cap \complement \delta_0$ <u>soit</u> $< a$, <u>et que la restriction de</u> V <u>à</u> $\complement \omega$ <u>soit finie continue</u>.

On reconnaît un théorème démontré par G. CHOQUET dans sa théorie du potentiel à noyau ([2], théorème 1, page 1-05) ; la démonstration est d'ailleurs très voisine de celle de G. CHOQUET, dans le cas où V est localement borné.

2° Indiquons brièvement, pour terminer, une série de résultats ([3]), concernant la balayée d'une fonction $\in S^+$.

THÉORÈME 8. - Étant donnés un ensemble $E \subset \Omega$ et un point $x \in \Omega$, il existe une mesure de Radon $\mu_x^E \geqslant 0$ telle que, pour toute fonction $V \in S^+$:

$$\hat{R}_V^E(x) = \int V d\mu_x^E \quad .$$

La mesure μ_x^E jouit de propriétés analogues à celles du cas classique.

THÉORÈME 9. - L'ensemble des points de Ω où E est effilé est de μ_x^E-mesure nulle, quel que soit $x \in \Omega$.

THÉORÈME 10. - L'ensemble des points de Ω, autres que x, où $\complement E$ est effilé, est de μ_x^E-mesure nulle, quel que soit $x \in \Omega$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRELOT (Marcel). - Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, Séminaire Brelot, t. 2, 1958 : Théorie du potentiel, n° 1.

[2] CHOQUET (Gustave). - Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, Séminaire Brelot, t. 1, 1957 : Théorie du potentiel, n° 1.

[3] HERVÉ (Rose-Marie). - Développement sur une théorie axiomatique des fonctions surharmoniques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 179-181.