Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Nobuyuki Ninomiya

Méthode de variation du minimum dans la théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. nº 5, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958-1959__3__A5_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL

Année 1958/59

-:-:-:-

4 mars 1959

MÉTHODE DE VARIATION DU MINIMUM DANS LA THÉORIE DU POTENTIEL

par Nobuyuki NINOMIYA

La méthode de variation du minimum est l'étude du caractère d'une mesure qui rend minimum la quantité définie par une certaine intégrale. Cette méthode est un outil important dans la théorie du potentiel dont le noyau est une fonction continue et symétrique. GAUSS ([2], p. 232) a donné l'intégrale

$$G(\mu) = \int_{\Sigma} (U^{\mu} - 2f)\,d\mu \quad ,$$

où Σ est une surface suffisamment régulière dans l'espace ordinaire, μ est une mesure positive avec densité continue de masse totale m (>0), U^{μ} est le potentiel newtonien de μ et f est une fonction continue donnée sur Σ. GAUSS a étudié le potentiel d'une mesure μ^* qui rend minimum $G(\mu)$ parmi des mesures positives μ, avec densité continue, de masse totale m et portées par Σ. Il a démontré qu'il y a une constante γ telles que

$$(1) \qquad U^{\mu^*}(P) \geq f(P) + \gamma \qquad \text{sur } \Sigma$$

$$(2) \qquad U^{\mu^*}(P) = f(P) + \gamma \qquad \text{sur une partie de } \Sigma .$$

A partir de ce fait, GAUSS a souligné qu'au cas où $f(P)$ est égale à une constante (resp. au potentiel d'une mesure donnée ν), on peut construire le potentiel d'équilibre sur Σ (resp. de balayée ν' de ν sur Σ). Mais, il y a un point obscur dans le raisonnement de GAUSS. Une mesure μ^* qui rend minimum $G(\mu)$, parmi des mesures positives μ, avec densité continue, de masse totale m (>0) et portées par Σ, existe-elle vraiment ? C'est un problème important. Il semble que GAUSS n'ait pas eu de doute sur l'existence d'une telle μ^*.

La théorie moderne de l'intégrale de Lebesgue a réussi à se débarasser de l'ambiguité dans les mathématiques classiques. C'est FROSTMAN qui a démontré bien justement l'existence de cette mesure μ^* qui rend minimum l'intégrale de Gauss. FROSTMAN a étudié [1] l'intégrale

$$G(\mu) = \int_F [U^\mu(P) - \frac{2}{\gamma_{MP}^\alpha}]\, d\mu(P) \quad ,$$

pour toute mesure positive μ de masse totale m (> 0) portées par un compact F dans l'espace ordinaire, où M est un point quelconque n'appartenant pas à F et U^μ le potentiel d'ordre α ($1 \leq \alpha < 3$) de μ. Le théorème du choix de RIESZ assure l'existence d'une mesure positive qui rend minimum $G(\mu)$ parmi toutes les mesures positives de masse totale m portées par F.

Rappel du théorème du choix : de toute suite $\{\mu_n\}$ de mesures positives de masses totales uniformément bornées portées par un compact fixé, on peut extraire une suite partielle convergente.

Alors, μ désignant des mesures positives de masse totale m portées par F, si on pose

$$G^* = \inf_\mu G(\mu) \quad ,$$

on peut trouver une suite $\{\mu_n\}$ de mesures positives de masse totale m portées par F telle que

$$G^* = \lim_{n \to \infty} G(\mu_n) \quad .$$

En prenant une suite convergente à l'avance, on peut supposer que $\{\mu_n\}$ converge vers une mesure positive μ^* de masse totale m portée par F. En vertu de l'inégalité élémentaire

$$G^* \leq G(\mu^*) \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} G(\mu_n) = G^* \quad ,$$

on sait que μ^* minimise $G(\mu)$ parmi toutes les mesures positives μ de masse totale m portées par F. Par suite, on a la relation

$$G(\mu^* + \varepsilon\sigma) \geqslant G(\mu^*)$$

pour tout nombre positif ε (< 1) et pour toute mesure σ de masse totale nulle telle que $\mu + \sigma$ soit une mesure positive portée par F. Alors, on sait facilement qu'il y a une constante γ telle que

(1) $\qquad U^{\mu^*}(P) \geqslant \dfrac{1}{\gamma_{MP}^\alpha} + \gamma \qquad$ à peu près partout sur F,

(2) $\qquad U^{\mu^*}(P) \leqslant \dfrac{1}{\gamma_{MP}^\alpha} + \gamma \qquad$ sur le support de μ^* .

On ne peut pas poser toujours $\gamma = 0$. FROSTMAN a démontré qu'on a $\gamma \geqslant 0$ pour $m = 1$ par l'utilisation du potentiel d'équilibre sur F , et que, si on considère le cas de $\alpha = 1$ (c'est-à-dire, le potentiel newtonien), on a $\gamma = 0$ pour $m = U^{\lambda}(M)$, où U^{λ} est le potentiel capacitaire sur F .

KAMETANI a étudié l'intégrale de Gauss sous une forme plus développée que celle de Frostman. Soit $\Phi(r)$ une fonction positive, continue et décroissante pour $r > 0$, et $\lim\limits_{r \to 0} \Phi(r) = +\infty$. Etant donnée $f(P)$ une fonction positive et semi-continue supérieurement sur un compact F , KAMETANI a réussi à construire une mesure non-négative μ^* portée par F telle que

(1) $\qquad U^{\mu^*}(P) \geqslant f(P)$ $\qquad$ à peu près partout sur F ,

(2) $\qquad U^{\mu^*}(P) \leqslant f(P)$ $\qquad$ sur le support de μ^* .

Pour cela, il a considéré l'intégrale [2]

$$G(\mu) = \int_F [U^{\mu}(P) - 2f(P)]\, d\mu(P)$$

pour toute mesure non-négative μ portée par F . S'il existe une mesure non-négative μ^* qui rend minimum $G(\mu)$ parmi toutes les mesures non-négatives μ portées par F , on a naturellement

$$G(\mu^* + \varepsilon\sigma) \geqslant G(\mu^*)$$

pour tout nombre positif ε (< 1) et pour toute mesure quelconque σ telle que $\mu^* + \sigma$ soit une mesure non-négative portée par F , ce qui entraîne facilement les résultats (1) et (2). Eh bien, une mesure non-négative μ^* qui rend minimum $G(\mu)$ parmi toutes les mesures non-négatives μ portées par F , existe-elle vraiment ? C'est le point essentiel. Si les μ sont des mesures non-négatives portées par F , posons

$$G^* = \inf_{\mu} G(\mu) \quad .$$

Alors, on a $G^* \leqslant 0$, car $G(0) = 0$. Prenons deux nombres positifs A et B tels que $\Phi(r_{PQ}) > A$ et $f(P) < B$ pour deux points quelconques P et Q de F . Alors, on a pour toute mesure positive μ de masse totale m portée par F

$$G(\mu) > Am^2 - Bm \quad .$$

Par suite, on a

$$G(\mu) > 0$$

pour toute mesure positive μ portée par F dont la masse totale est $> \frac{B}{A}$. Donc, on a

$$G^* = \inf_{\mu} G(\mu) \quad ,$$

où les μ sont des mesures non-négatives portées par F dont la masse totale est $\leq \frac{B}{A}$. Soit $\{\mu_n\}$ une suite des mesures non-négatives portées par F dont la masse totale est $\leq \frac{B}{A}$, telles que

$$G^* = \lim_{n \to \infty} G(\mu_n) \ .$$

En prenant une suite partielle de $\{\mu_n\}$ à l'avance, on peut supposer que $\{\mu_n\}$ est une suite (vaguement) convergente. Alors, on a

$$G^* \leq G(\mu^*) \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} G(\mu_n) = G^* \quad ,$$

en vertu de l'inégalité élémentaire

$$\iint_F \Phi \, d\mu^* \, d\mu^* \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} \iint_F \Phi \, d\mu_n \, d\mu_n$$

et

$$\int_F f \, d\mu^* \geq \overline{\lim}_{n \to \infty} \int_F f \, d\mu_n \quad .$$

Ainsi, μ^* minimise $G(\mu)$ parmi toutes les mesures non-négatives portées par F . Il arrive que μ^* s'annule identiquement. Mais, KAMETANI a démontré que μ^* s'annule identiquement seulement lorsque F est de Φ -capacité nulle.

Soit $K(x.y)$ une fonction positive, symétrique et continue en x et y dans l'espace euclidien ou plus généralement dans un espace topologique localement compact. $K(x.y)$ pourra être $+\infty$ pour $x = y$. On considère le potentiel pris par rapport au noyau K

$$U^{\mu}(x) = \int K(x.y) \, d\mu(y) \quad .$$

On pose désormais pour toutes mesures positives μ et ν

$$(\mu \ , \ \nu) = \int U^{\mu} d\nu \quad , \ \|\mu\|^2 = (\mu \ , \ \mu) = \int U^{\mu} \, d\mu \quad .$$

K étant symétrique, on a toujours $(\mu \ , \ \nu) = (\nu \ , \ \mu)$. Soient E_1 et E_2

deux ensembles boréliens et disjoints de K-capacité positive, contenus dans un compact fixé. Pour développer l'étude de Kametani [3], considérons l'intégrale

$$G(\mu , \nu) = \frac{\|\mu\|^2 \times \|\nu\|^2}{(\mu , \nu)^2}$$

pour tout couple (μ , ν) de deux mesures positives μ et ν, où μ est portée par E_1 et ν est portée par E_2. Cette intégrale est très utile pour obtenir l'analogue du résultat de KAMETANI et pour déterminer les noyaux de type positif. On appelle couple minimal sur E_1 et E_2 tout couple (μ_0 , ν_0) pour lequel $G(\mu , \nu)$ est minimum parmi tous les couples (μ , ν) de deux mesures positives μ et ν portées par E_1 et par E_2 respectivement. Etant donnés E_1 et E_2 arbitrairement, on ne sait pas s'il existe toujours un couple minimal sur E_1 et E_2. Mais,

PROPOSITION 1. - Soit (μ_0 , ν_0) un couple minimal sur E_1 et E_2. Posons

$$a = \|\mu_0\|^2 , \quad b = \|\nu_0\|^2 , \quad c = (\mu_0 , \nu_0)$$

et

$$g_1(x) = c\, U^{\mu_0}(x) - a\, U^{\nu_0}(x) , \quad g_2(x) = c\, U^{\nu_0}(x) - b\, U^{\mu_0}(x)$$

dans l'hypothèse $0 < a , b , c < +\infty$. Alors, on a

(1) $\quad g_1(x) \leq 0$ sur E_1 presque partout pour μ_0 ,

(2) $\quad g_1(x) \geqslant 0$ sur E_1 hors d'un ensemble de K-capacité nulle ;

en particulier, si E_1 et E_2 sont des compacts, hors d'un ensemble de K-diamètre transfini nul.

Analoguement quant à $g_2(x)$.

REMARQUE. - Un ensemble est dit de K-capacité nulle lorsqu'il est de mesure nulle pour toute mesure positive dont le potentiel est borné sur tout compact, et est dit de K-diamètre transfini nul lorsqu'il est de mesure nulle pour toute mesure positive d'énergie finie.

En effet, on a la relation

$$G(\mu_0 + \sigma , \nu_0) \geq G(\mu_0 , \nu_0)$$

pour toute mesure σ portée par E_1 telle que $\mu_0 + \sigma$ soit positive, d'énergie finie et $(\nu_0 , \sigma) < + \infty$. Cette intégrale entraîne

$$0 \leqslant 2 \int g_1 \, d\sigma + [c^2 ||\sigma||^2 - a(\nu_0 , \sigma)^2] ,$$

ce qui conduit facilement aux résultats (1) et (2) en prenant pour σ une mesure positive ou négative convenable.

PROPOSITION 2. - Si E_1 et E_2 sont des compacts disjoints de K-capacité positive, il existe toujours un couple minimal sur E_1 et E_2.

En effet, pour construire le minimum de $G(\mu , \nu)$ par rapport à tous les couples (μ , ν), il suffit de la construire par rapport à tous les couples (μ , ν) dont la masse totale est un, car le numérateur et le dénominateur de $G(\mu , \nu)$ sont de même puissance par rapport à la masse totale de μ et de ν. La proposition se démontre naturellement par l'utilisation du théorème du choix.

En fixant dans $G(\mu , \nu)$ une mesure positive μ portée par E_1, posons

$$G(\nu) = \frac{||\nu||^2}{(\mu , \nu)^2}$$

Alors, on obtient de la même façon que la proposition 1 :

PROPOSITION 1'. - Si E_1 et E_2 sont des compacts disjoints et si E_2 est de K-capacité positive, il existe une mesure positive ν_0 partie par E_2 telle que

(1) $\qquad g(x) \leqslant 0 \qquad$ sur le support de ν_0 ,

(2) $\qquad g(x) \geqslant 0 \qquad$ sur E_2 hors d'un ensemble de K-diamètre transfini nul, où $g(x) = c\, U^{\nu_0}(x) - b\, U^{\mu}(x)$, $b = ||\nu_0||^2$ et $c = (\nu_0 , \mu)$.

On sait que, si on y pose $u^* = \frac{c}{b} \nu_0$, cette proposition démontre un cas particulier du résultat de Kametani.

On va caractériser les noyaux de type positif ou satisfaisant au principe d'énergie. Un noyau symétrique K est dit de type positif si l'intégrale d'énergie

$$I(\sigma) = \iint K(x , y) \, d\sigma(y) \, d\sigma(x)$$

de toute mesure σ (signe quelconque), lorsqu'elle a un sens, est toujours $\geqslant 0$. Un noyau symétrique K est dit satisfaire au principe d'énergie, si l'intégrale d'énergie de toute mesure σ (signe quelconque) portée par un compact, lorsqu'elle a un sens est $\geqslant 0$ et s'annule seulement lorsque σ est identiquement nulle.

THÉORÈME 1. - Pour qu'un noyau positif et symétrique K soit de type positif, il faut et il suffit qu'on aie la propriété suivante :

"Soient μ et ν des mesures positives d'énergie finie à support compact. Si on a

$$U^{\mu}(x) \leq U^{\nu}(x)$$

sur le support de μ , on a la même inégalité au moins en un point du support de ν ".

THÉORÈME 2. - Pour qu'un noyau positif et symétrique K satisfasse au principe d'énergie, il faut et il suffit qu'on aie la propriété suivante :

"Soient μ et ν des mesures positives distinctes d'énergie finie à support compact. Si on a

$$U^{\mu}(x) \leq U^{\nu}(x)$$

sur le support de μ , on a

$$U^{\mu}(x) < U^{\nu}(x)$$

sur un ensemble de mesure positive pour ν ".

Dans chaque théorème, les conditions sont évidemment nécessaires, car on a

$$I(\mu - \nu) = ||\mu||^2 - 2(\mu , \nu) + ||\nu||^2$$

$$= \int (U^{\mu} - U^{\nu})\, d\mu + \int (U^{\nu} - U^{\mu})\, d\nu .$$

Inversement, étant donnée une mesure σ ($\not\equiv 0$) de signe quelconque, on peut trouver deux ensembles disjoints E_1 et E_2 tels que σ soit représentée comme différence de deux mesures positives ($\not\equiv 0$) μ et ν portées par E_1 et par E_2 respectivement. Pour démontrer $I(\sigma) \geqslant 0$, il suffit de démontrer que $G(\mu , \nu) \geqslant 1$. Il suffit de le démontrer au cas où E_1 et E_2 sont des compacts disjoints, car, sinon, on peut trouver des sous-compacts de mesures arbitrairement proches des masses totales des mesures μ et ν . Soit (μ_0 , ν_0) un couple minimal sur E_1 et E_2 . Alors, on a

(1) $\quad c\, U^{\mu_0}(x) \leq a\, U^{\nu_0}(x)$ $\qquad$ sur le support de μ_0 ,

(2) $\quad c\, U^{\nu_0}(x) \leq b\, U^{\mu_0}(x)$ $\qquad$ sur le support de ν_0 .

Si le noyau K jouit de la propriété indiquée dans le théorème 1, ces relations ont lieu en même temps au moins en un point du support de ν_0 . Donc, on a

$$G(\mu_0 , \nu_0) = \frac{ab}{c^2} \geqslant 1 \quad .$$

Le théorème 1 est ainsi démontré. Supposons que le noyau K jouisse de la propriété du théorème 2. Soient E_1 et E_2 deux ensembles boréliens disjoints. On va démontrer que $G(\mu . \nu) \geqslant 1$ pour tout couple (μ , ν) des mesures positives portées par E_1 et par E_2 respectivement. Si on avait

$$G(\mu_0 , \nu_0) = 1$$

pour un certain couple (μ_0 , ν_0) , ce serait un couple minimal sur E_1 et E_2 . Alors, on a

$$g_1(x) \leqslant 0$$

sur E_1 presque partout pour μ_0 . Par suite, on a

$$g_1(x) < 0$$

sur un ensemble de mesure positive pour ν_0 . De plus, on a

$$g_2(x) \leqslant 0$$

sur E_2 presque partout pour ν_0 . Donc, on a

$$c\; g_1(x) + a\; g_2(x) < 0$$

sur un ensemble de mesure positive pour ν_0 . D'autre part, on a

$$c\; g_1(x) + a\; g_2(x) \equiv 0$$

dans tout l'espace, car

$$G(\mu_0 , \nu_0) = \frac{ab}{c^2} = 1 \quad .$$

C'est contradictoire. Le théorème 2 est ainsi démontré.

THÉORÈME 3. - Tout noyau positif et symétrique K satisfaisant au premier ou second principa du maximum est nécessairement de type positif.

En effet, tout noyau positif et symétrique satisfaisant au second principe du maximum est naturellement de type positif. Supposons qu'un noyau positif et symétrique K satisfasse au premier principe du maximum. On va démontrer que

$$G(\mu , \nu) \geqslant 1$$

pour tout couple (μ , ν) de deux mesures positives portées par deux ensembles boréliens et disjoints E_1 et E_2 respectivement. Il suffit de le démontrer au cas où E_1 et E_2 sont des compacts disjoints. Soit (μ_0 , ν_0) un couple minimal sur E_1 et E_2. On a

$$(1) \qquad c\, U^{\mu_0}(x) \leq a\, U^{\nu_0}(x) \qquad \text{sur } S_{\mu_0} \text{ (le support de } \mu_0) ,$$

$$(2) \qquad c\, U^{\nu_0}(x) \leq b\, U^{\mu_0}(x) \qquad \text{sur } S_{\nu_0} \text{ (le support de } \nu_0) .$$

Alors, on a

$$\frac{c}{a} \sup_{x \in S_{\mu_0}} U^{\mu_0}(x) \leq \sup_{x \in S_{\mu_0}} U^{\nu_0}(x) \leq \sup_{x \in S_{\nu_0}} U^{\nu_0}(x)$$

$$\leq \frac{b}{c} \sup_{x \in S_{\nu_0}} U^{\mu_0}(x) \leq \frac{b}{c} \sup_{x \in S_{\mu_0}} U^{\mu_0}(x) .$$

Par suite, on a

$$G(\mu_0 , \nu_0) = \frac{ab}{c^2} \geqslant 1 .$$

Le théorème 3 est ainsi démontré.

Enfin, soulignons que OHTSUKA a démontré dernièrement que, étant un nombre quelconque $\lambda > 1$, on peut trouver un noyau positif et symétrique K qui satisfait au principe du maximum λ-dilaté, mais n'est pas de type positif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FROSTMAN (Otto). - Potentiels d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. - Diss. Lund, 1935.

[2] GAUSS (Carl Friedrich). - Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte, Carl Friedrich Gauss Werke, t. 5. - Göttingen, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, 1867 ; p. 195-242.

[3] KAMETANI (S.). - Positive definite integral quadratic forms and generalized potentials, Proc. imp. Acad. Japan, t. 20, 1944, p. 7-14.

[4] NINOMIYA (N.). - Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique, J. Inst. polytechn. Osaka City Univ., t. 8, 1957, p. 147-179.