GUSTAVE CHOQUET

Diamètre transfini et comparaison de diverses capacités

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. nº 4, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958-1959__3__A4_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL
Année 1958/59
-:-:-:-

DIAMÈTRE TRANSFINI ET COMPARAISON DE DIVERSES CAPACITÉS

par Gustave CHOQUET

Nous allons d'abord rappeler, dans un cadre général, ce qu'est le diamètre transfini associé à un noyau.

DÉFINITION. - Soit A un ensemble quelconque infini, Δ la diagonale de $A \times A$; et Φ un noyau sur A, c'est-à-dire (dans ce travail) une application symétrique de $A \times A$ dans $]-\infty, \infty]$.

Pour tout X fini $\subset A$, on pose :

$$\varphi(X) = \text{moyenne de } \Phi(x, y), \quad (x \neq y ; \; x, y \in X) \quad .$$

Puis on pose, pour tout entier n :

$$d_n(A) = \inf \varphi(X), \quad (X \subset A \text{ et nombre cardinal de } X = n) \quad .$$

Enfin on pose : $d(A) = \sup\limits_n d_n(A)$.

On appelle $d(A)$ la <u>constante de Fekete</u> de A, relative à Φ. Le diamètre transfini de A est une fonction simple de $d(A)$ qu'il n'est intéressant d'expliciter que dans les cas classiques ; nous préférons utiliser ici la constante de Fekete.

<u>Quelques égalités de base</u>. - Soit X une partie de A, ayant n éléments, et soit $x_0 \in A \dot{-} X$ (*). Soit μ_X la mesure $\frac{1}{n} \sum \varepsilon_u$ (où $u \in X$).

On pose

$$p(x_0, X) = \underset{y \in X}{\text{moyenne}} \; \Phi(x_0, y) = \Phi\mu_X(x_0) \quad .$$

On vérifie aisément les égalités :

$$(1) \qquad (n+1)\, \varphi(X \cup x_0) = (n-1)\, \varphi(X) + 2p(x_0, X)$$

(*) $(A \dot{-} B)$ désignera dans ce travail $A \cap \complement B$.

(2) $$n\varphi(X) = \sum_{u \in X} p(u\ ,\ X - u)$$

Conséquences de ces égalités.

1° $d_n(A)$ est fonction croissante de n.

En effet, soit $\varepsilon > 0$; il existe un X ayant n points, tel que

$$\varphi(X) \leq d_n(A) + \varepsilon \quad .$$

Soit alors a l'un des points x de X qui maximise $p(x\ ,\ X \dot{-} x)$; les égalités (1) et (2) montrent que

$$p(a\ ,\ X \dot{-} a) \geq \varphi(X) \quad .$$

On a donc

$$d_n(A) + \varepsilon \geq \varphi(X) \geq \varphi(X \dot{-} a) \geq d_{n-1}(A)$$

d'où $d_n(A) \geq d_{n-1}(A)$ puisque ε est arbitraire.

2° Soit X ayant n points; posons :

$$\varphi(X) - d_n(A) = \varepsilon \quad .$$

Pour tout $a \in A \dot{-} X$, on a :

$$2p(a\ ,\ X) + (n-1)\ \varphi(X) = (n+1)\ \varphi(X \cup a) \geq (n+1)\ d_{n+1}(A) \geq (n+1)\ d_n(A)$$
$$= 2p(a\ ,\ X) + (n-1)\varepsilon + (n-1)\ d_n(A) \quad .$$

d'où :

(3) $$p(a\ ,\ X) = \Phi\mu_X(a) \geq d_n(A) - \frac{\varepsilon(n-1)}{2} \quad .$$

En particulier, si $\varepsilon = 0$, on a :

$$\Phi\mu_X(a) \geq d_n(A) \qquad \text{pour tout } a \in (A - X) \quad .$$

Si $a \in X$ on ne peut rien dire en général de $\Phi\mu_X(a)$; mais si $\Phi \geq 0$ et si $\Phi = +\infty$ sur Δ, on a alors

$$\Phi\mu_X(a) \geq d_n(A) \qquad \text{pour tout } a \in A \quad .$$

PROPOSITION 1. - Si $\Phi \geq 0$ partout, avec $\Phi = +\infty$ sur Δ, et si $d(A) = \infty$, il existe une mesure $\mu \geq 0$ sur A de masse totale 1, et de la forme $\sum_n \lambda_n \varepsilon_{a_n}$ (ε_x masse $+1$ au point x), telle que le potentiel $\Phi\mu$ soit partout égal à $+\infty$.

C'est une conséquence facile de la relation (3).

Cas où A est un espace topologique compact. - Soit A compact et Φ un noyau $\geqslant 0$ et semi-continu inférieurement (s. c. i.) sur A.

LEMME 1. - Supposons en outre Φ continu en tout point de Δ (mais pas nécessairement fini). Pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ de masse totale 1 sur A, qui ne charge aucun point x en lequel $\Phi(x , x) < \infty$, on a :

$$d(A) \leqslant \int \Phi\mu \, d\mu \quad ,$$

c'est évident si le second membre est $+\infty$; sinon μ n'a aucune charge ponctuelle, et est donc limite faible de mesures à support fini X, de la forme μ_X précédemment définie.

Supposons d'abord Φ fini et continu. On a

$$\int \Phi\mu \, d\mu = \lim \int \Phi\mu_X d\mu_X \qquad \text{et, si } \overline{\overline{X}} = n \text{ ;}$$

$$\int \Phi\mu_X \, d\mu_X = \frac{1}{n^2} \sum_{a,b\in X} \Phi(a , b) = \frac{1}{n^2} \sum_a \Phi(a , a) + \frac{n(n-1)}{n^2} \varphi(X) \geqslant \frac{n-1}{n} d_n(A) \quad .$$

Quand $n \to \infty$, on passe à la limite et on obtient l'inégalité. Lorsque Φ est quelconque, on a pour tout noyau Φ' fini et continu tel que $\Phi' \leqslant \Phi$, la relation

$$d'(A) \leqslant \int \Phi' \mu \, d\mu \quad .$$

Or Φ est limite de l'ordonné filtrant croissant des $\Phi' \leqslant \Phi$; et l'on a, suivant le filtre associé,

$$d(A) = \lim d'(A) \quad \text{et} \quad \int \Phi\mu \, d\mu = \lim \int \Phi' \mu \, d\mu \quad .$$

C'est évident pour la seconde relation ; pour la première, il suffit de montrer que pour tout n

$$d_n(A) = \lim d'_n(A) \quad .$$

On le démontre en utilisant la continuité de Φ sur Δ. On déduit de cette inégalité la relation cherchée par passage à la limite.

LEMME 2. - Si à nouveau Φ est $\geqslant 0$ et s. c. i., et si, de plus Φ est infini sur Δ, il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ de masse totale 1 sur A, et telle que

$$d(A) \geqslant \int \Phi\mu \, d\mu \quad .$$

C'est évident si $d(A) = \infty$ puisqu'il suffit de prendre μ de la forme ε_a. Sinon pour tout n, il existe un ensemble fini X_n de n points tel que :

$$|d_n(A) - \varphi(X_n)| < \frac{1}{2^n} \quad .$$

Soit μ une valeur d'adhérence de la suite des μ_{X_n} ; comme Φ est s. c. i. et vaut ∞ sur Δ, la restriction ν_n de $(\mu_{X_n} \otimes \mu_{X_n})$ à $(A^2 \div \Delta)$ converge vers $\mu \times \mu$.

En vertu de la semi-continuité de Φ, on a

$$d(A) = \lim \int \Phi \, d\nu_n \geq \int N d(\mu \otimes \mu) = \int N\mu \, d\mu \quad .$$

NOTATION. - Pour tout A compact et pour tout noyau $\Phi \geq 0$ et s. c. i. sur A, on notera

$$e(A) = \inf \int \Phi\mu \, d\mu \qquad (\mu \geq 0 \text{ sur } A \text{, de masse totale } 1) \quad .$$

THÉORÈME. - Soit Φ un noyau symétrique ≥ 0 et s. c. i. sur A compact, qui vaut $+\infty$ sur Δ.

Alors

$$d(A) = e(A) \quad .$$

C'est une conséquence immédiate des lemmes 1 et 2.

Nous conviendrons désormais, si Φ est un noyau sur un espace E, de désigner par $e(A)$ et $d(A)$ (où A est un compact de E) les constantes définies plus haut et associées à la restriction de Φ à A.

Comparaison de la constante de Fekete et de la capacité. - Soit Φ un noyau ≥ 0 sur un espace E localement compact ; rappelons que la capacité d'un compact K de E (appelée Φ-capacité si on veut préciser) est le sup des masses totales des mesures $\mu \geq 0$ portées par K, et dont le Φ-potentiel est partout sur $E \leq 1$.

PROPOSITION 2. - Soit Φ symétrique, s. c. i. et ≥ 0 sur E localement compact. Pour tout K compact de E, la capacité de K est $\leq 1/d(K)$ et $1/e(K)$. En particulier si $e(K) = \infty$, K est de capacité 0 ; inversement, lorsque Φ est irégulier et borné à l'infini ou si Φ satisfait au principe du maximum k-dilaté), $(\text{cap } K = 0) \Longrightarrow e(K) = \infty$.

En effet, soit c la capacité de K ; il existe une mesure $\mu \geq 0$ sur K, avec $\|\mu\| = c$ et $\Phi\mu \leq 1$ partout.

On a :

$$e \leq \int \frac{\Phi\mu}{c} \frac{d\mu}{c} \leq \int \frac{d\mu}{c^2} = \frac{1}{c} \qquad \text{d'où} \quad c \leq 1/e \quad .$$

On procède de façon analogue pour d .

La dernière partie résulte de ce que, s'il existe une mesure $\mu > 0$ sur K , d'énergie finie, il existe une mesure $\mu' \leq \mu$ de potentiel fini et continu sur le support de μ' ; il résulte des hypothèses envisagées qu'alors la capacité de K n'est pas nulle.

COROLLAIRE. - Si Φ est symétrique, s. c. i. et ≥ 0 , régulier et borné à l'infini et ∞ sur Δ ,

$$(\text{cap } K = 0) \iff (e(K) = \infty) \iff (d(K) = \infty) \quad .$$

En outre, tout K de capacité nulle porte une mesure ≥ 0 de potentiel infini en tout point de K (c'est donc un noyau d'Evans).

Rappelons en outre que nous avons montré ailleurs, pour un tel noyau, que tout ensemble analytique X de capacité intérieure nulle est aussi de capacité extérieure nulle.

Quelques résultats fragmentaires.

1° On supposera toujours par la suite $\Phi \geq 0$, symétrique, s. c. i. sur E localement compact.

Pour tout K compact tel que $e(K) \neq \infty$, il existe $\mu_0 \in \mathfrak{M}^1(K)$ qui minimise l'énergie $[\mu , \mu]$; pour tout $\nu \in \mathfrak{M}^1(K)$, d'énergie finie, on a

$$N\mu_0 \geq [\mu_0 , \mu_0] , \quad \nu\text{-presque partout} \quad .$$

En particulier $N\mu_0 = [\mu_0 , \mu_0]$, μ_0-presque partout.

Donc si Φ satisfait au principe du maximum k-dilaté, on a

$$N\mu_0 \leq k[\mu_0 , \mu_0] \quad \text{partout dans } E .$$

Il en résulte que $c(K)$ et $1/e(K)$ ont un rapport majoré par k .

2° Signalons l'intérêt de quelques constantes :

$C(K) = \inf$ des masses totales des mesures $\mu \geq 0$ sur E , telles que $\Phi\mu \geq 1$ sur K .

$E(K) = \inf [\mu , \mu]$ pour toutes les mesures $\mu \geq 0$ portées par K , et de potentiel quasi-partout ≥ 1 sur K .

On a pour les noyaux étudiés :

$$c(K) \leq C(K) \leq E(K) \leq 1/e(K) \leq 1/d(K) \quad .$$

3° En particulier, voici quelques résultats pour l'étude de $E(K)$:

LEMME 3. - <u>Si</u> Φ <u>est de type-positif, on a</u> $E(K) = 1/c(K)$. <u>En outre, si de plus</u> Φ <u>est régulier,</u> $E(K)$ <u>est une vraie capacité en ce sens que pour toute suite croissante</u> A_n , <u>on a</u> :

$$E^*(\cup A_n) = \lim E^*(A_n) \quad .$$

La première partie du lemme s'établit aisément par la remarque suivante : si μ et ν sont portées par K , avec $\Phi\nu \geq 1$ quasi-partout sur K et si $\Phi\mu = 1$, μ-presque partout, ceci entraîne $[\nu - \mu , \mu] \geq 0$ ou $[\nu , \mu] \geq [\mu , \mu]$. Or, Φ est de type positif, donc $[\nu , \mu]^2 \leq [\nu , \nu] \times [\mu , \mu]$ d'où

$$[\nu , \mu]^2 \leq [\nu , \nu] \times [\nu , \mu] \quad \text{ou} \quad [\nu , \mu] \leq [\nu , \nu] ,$$

$$\text{donc enfin } [\mu , \mu] \leq [\nu , \nu] \quad .$$

Ceci, rapproché des propriétés de 1° ci-dessus permet d'établir que $E(K) = 1/c(K)$.

On note ensuite que si Φ est de type positif, on a aussi :

$E(K) = \inf [\mu , \mu]$ pour toutes les mesures $\mu \geq 0$ <u>sur</u> E , et de potentiel quasi-partout ≤ 1 sur K .

On n'a donc pas besoin de la restriction toujours gênante que les μ doivent être portées par K .

4° Ces considérations suggèrent, pour éviter les difficultés rencontrées dans l'étude des diverses capacités associées à un noyau lorsqu'on impose aux mesures d'être portées par le compact ou l'ensemble étudié, de se libérer de cette sujétion en introduisant une autre famille de constantes :

Soit toujours $\Phi \geq 0$, s. c. i. sur E supposé compact pour simplifier. On commence par définir une notion de quasi-partout lié à Φ ; ce sera là un outil transitoire.

Soit h une fonction numérique ≥ 0 et s. c. i. sur $\mathfrak{M}^+(E)$. Pour tout ensemble $X \subset E$, on pose :

$$H(X) = \inf h(\nu) \qquad (\text{où } \Phi\nu \geq 1 \text{ quasi-partout sur } X) \quad .$$

Cette relation définit en quelque sorte l'"encombrement" de la fonction caractéristique de X .

Plus généralement, on peut définir l'encombrement de toute fonction $\varphi \geq 0$ sur E :

$$H(\varphi) = \inf h(\nu) \qquad (\text{où } \Phi\nu \geqslant \varphi \text{ quasi-partout sur } E) \quad .$$

On montrera alors que, pour toute suite croissante φ_n on a :

$$H(\lim \varphi_n) = \lim H(\varphi_n) \quad ,$$

d'où des théorèmes de capacitabilité faciles à obtenir sans hypothèses supplémentaires sur Φ .

Exemples de fonction $h(\nu)$: $\|\nu\|$, $[\nu , \nu]$, etc. - Ces "encombrements" ont l'avantage de permettre une étude facile des passages à la limite.

D'autre part, lorsque le noyau Φ a des propriétés supplémentaires (type positif, principe du maximum, équilibre, balayage, etc.), on démontre que ces constantes sont égales aux constantes classiques : c , $1/e$, etc.

Donc, par l'intermédiaire temporaire de la notion d'encombrement, on a pu faire dans ces cas-là une étude commode des notions de convergence et de capacité. C'est par exemple ce qui se produit avec le noyau newtonien, ou plus généralement les noyaux $1/r^{\alpha}$ dans R^n (cf. la méthode utilisée par ARONSZAJN).

5° Signalons un résultat que nous démontrerons ailleurs :

Pour tout noyau Φ s. c. i. symétrique, $\geqslant 0$, égal à ∞ sur Δ , et continu hors de Δ , sur E compact dans lequel tout ouvert est un K_σ , tout ensemble G_δ de E est capacitable pour la Φ-capacité ordinaire.

Ce résultat ne suppose aucune condition de régularité de Φ . Si en plus Φ est régulier, alors tout X qui est un K-analytique de E , et de Φ capacité intérieure nulle, a aussi sa capacité extérieure nulle.

(Manuscrit reçu en octobre 1960)